Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Václav Hlavatý

Promítání z roviny na rovinu prostoru pětirozměrného

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 53 (1924), No. 3, 251--271

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121635`

II. Le polynôme

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{k-1}x^{n-k+1} + a_kx^{n-k} + a_{k+1}\,x^{n-k-1} + \ldots + a_n$$

dont tous les coefficients, à l'exception de a_k, sont divisibles par le nombre premier p, dont a_0, a_n ne contiennent que la première puissance, ne possède, en cas de réductibilité, que des diviseurs de degré k et $n-k$.

L'auteur déduit, de ces deux théoremes, deux critères d'irréductibilité.

Promítání z roviny na rovinu prostoru pětirozměrného.

Napsal Dr. *Václav Hlavatý.*

§ 1.[1])

1. Prostor pětirozměrný můžeme určiti dvěma rovinami ${}^3\pi$ a ${}^1\pi$, které se neprotínají. Rovina ${}^3\pi$ nechť leží v našem prostoru a je půdorysnou. O rovině ${}^1\pi$ činím následující předpoklady: 1. Jest polorovnoběžna s naším prostorem, protínajíc ho v úběžném bodě „$u^0{}_\infty$". 2. Extremní odchylky (a tudíž všechny odchylky) rovin ${}^3\pi$ ${}^1\pi$ jsou $\alpha = \beta = 45^0$. — Úběžnou rovinu prostoru totálně kolmého ku ${}^3\pi$ nazvu ${}^2\pi$. Každý bod $\genfrac{}{}{0pt}{}{{}^1a}{{}^2a}$ roviny $\genfrac{}{}{0pt}{}{{}^1\pi}{{}^2\pi}$ určuje, s rovinou $\genfrac{}{}{0pt}{}{{}^2\pi}{{}^1\pi}$ prostor, který protíná průmětnu v $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{„druhém"}}{\text{„prvém"}}$ průmětu $\genfrac{}{}{0pt}{}{{}^1a_2}{{}^2a_1}$ bodu $\genfrac{}{}{0pt}{}{{}^1a}{{}^2a}$. Prostor $({}^3\pi\,{}^1a)$ protne ${}^2\pi$ v takovém bodě ${}^2a$, že ${}^1a_2 \equiv {}^2a_1$. Pak tedy každá přímka ${}^1A$ roviny ${}^1\pi$, procházející bodem $u^0{}_\infty$ zastává úlohu přímky C kapitoly prvé v nadprostoru $({}^1A\,{}^3\pi)$. Přímce ${}^1A$ odpovídá v rovině ${}^2\pi$ přímka ${}^2A$ $({}^2A_1 \equiv {}^1A_2)$, která v prvé kapitole se nazývala Γ.

2. V rovině ${}^3\pi$ zvolím dvě přímky $C_2 \parallel C'_2$ bodem „u^0" (tab. 4.), kteréž považuji za druhé průměty přímek C resp. C' v rovině ${}^1\pi$ bodem $(u^0{}_\infty)$. Vrcholy jejich distančních rovnoosých hyperbol (kap. I.) nechť jsou „h" na „C'_2" „h'" na „C_2" a $hh' \perp C_2$. Přímka C'', jejíž druhý průmět je $C''_2 \equiv hh'$ svírá (tak jako i všechny ostatní přímky v ${}^1\pi$ dle předpokladu) s ${}^3\pi$ úhel 45^0, i jest její distanční hyperbola o středu „c_2" taktéž rovnoosá o vrcholu h'' $[h''h = h''h' = hh']$. Těmito třemi přímkami jest pole ${}^1\pi_2$ stanoveno tak, že ${}^1\pi$ hoví hořejším dvěma přímkám. Důkaz je snadný.

---

[1]) Práce tato — z února 1922 — je pokračováním pojednání „Promítání z přímky na rovinu prostoru čtyřrozměrného" (v minulém ročníku. Značím ji kapitola I). Vzhledem k tiskovým poměrům omezil jsem se jen na **základní** konstrukce. Důkazy, které jsou snadné, nebo vyplývají z kapitoly I, pomíjím. Vysvětlení konstrukcí provádím jen, kde je to bezpodmínečně nutné.

Z toho však plyne, že každé přímce „C_2“ v poli ${}^1\pi_2$ přísluší rovnoosá distanční hyperbola. Máme-li tedy stanoviti distanci nějakého bodu „${}^1a$“ v ${}^1\pi$ od průmětny ${}^3\pi$ (tab. 4.), spojíme jeho druhý průmět ${}^1a_2 \equiv u_3$ s bodem c_2. Pak bod „r“ je vrcholem distanční hyperboly přímky $\overline{u_3c_2}$ a hledaná vzdálenost rovna $\overline{u_3r}$. ($\overline{c_2r} \perp \overline{u_3c_2}$).

Dvojznačnost roviny ${}^3\pi$ jest právě tak nezávadná, jako dvojznačné určení centra promítání distanční kružnicí v obyčejném centrálném promítání.

3. *Libovolný bod „a“ a rovina* $\genfrac{}{}{0pt}{}{{}^2\pi}{{}^1\pi}$ určuje prostor, který protíná rovinu ${}^3\pi$ v bodě $\genfrac{}{}{0pt}{}{a_2}{a_1}$ t. j. $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{druhém}}{\text{prvém}}$ průmětu bodu „a“. Bod $\genfrac{}{}{0pt}{}{a_2}{a_1}$ jest však též průmětem přímky $A \equiv ({}^2\pi a)({}^1\pi a)$ a proto představují oba průměty ∞^1 bodů „a“ na A. Nutno tedy bod „a“ blíže určiti. Za tím účelem stanovíme průsečík $a_{{}^1\pi}$ přímky $A' \equiv a_1a$ s rovinou ${}^1\pi$, kterýžto bod promítnu z ${}^2\pi$ do bodu „a_3“ v ${}^3\pi$ a nazývám třetím průmětem bodu a. Bod $a_{{}^1\pi}$ obdržím totiž také jako průsečík prostoru (${}^3\pi a$) s ${}^1\pi$. Pak $a_{{}^1\pi}$ jest centrem promítání bodu „a“ v prostoru (${}^3\pi a$):

třetí průmět a_3 bodu „a“ leží na spojnici a_1a_2.

Zároveň je zřejmo, že úlohy týkající se jediného bodu „a“ řeším v prostoru ($a_{{}^1\pi}{}^3\pi$) a netřeba se o nich blíže zmiňovati. Z libovolné věty o jednom průmětu bodu obdržím často věty o zbývajících dvou cyklickou záměnou. Slova, která se mají zaměniti cyklicky, uzavírám do závorek hranatých [ ][2]).

Úběžné přímky rovin ${}^3\pi$ resp. ${}^1\pi$ označím $U^{{}^3\pi}$ resp. $U^{{}^1\pi}$. Pak existují nadprostory ($U^{{}^3\pi}\,{}^1\pi$) ($U^{{}^1\pi}\,{}^3\pi$) a ($U^{{}^3\pi}\,{}^2\pi$) $\equiv$ ($U^{{}^1\pi}\,{}^2\pi$) a možno je psáti ${}^1\mathbf{U} \equiv ({}^1\pi U^{{}^3\pi})$, ${}^2\mathbf{U} \equiv ({}^2\pi U^{{}^1\pi})$, ${}^3\mathbf{U} \equiv ({}^3\pi U^{{}^1\pi})$. Každý bod v [${}^1\mathbf{U}$] má svůj [prvý] průmět v nekonečnu. Takové body nazývám úběžnými body [prvého] druhu. Úběžné body druhého druhu v nadprostoru ${}^2\mathbf{U} \equiv ({}^2\pi U^{{}^3\pi}) \equiv ({}^2\pi U^{{}^1\pi})$ nazývám též prostě úběžnými body. (Neboť nadprostor ${}^2\mathbf{U}$ je úběžný.)

Dále je zřejmo, že body, jichž [prvé] průměty se ztotožňují, leží v témž prostoru, obsahujícím rovinu [${}^1\pi$]. Body, které mají dva ztotožňující se průměty, leží na téže přímce.

4. *Libovolná přímka A a rovina* $\genfrac{}{}{0pt}{}{{}^1\pi}{\genfrac{}{}{0pt}{}{{}^2\pi}{{}^3\pi}}$ určují nadprostor, který protíná $\genfrac{}{}{0pt}{}{{}^3\pi}{\genfrac{}{}{0pt}{}{{}^3\pi}{{}^1\pi}}$ v přímce $\genfrac{}{}{0pt}{}{A_1}{\genfrac{}{}{0pt}{}{A_2}{A_{{}^1\pi}}}$ a tudíž:

průměty přímky jsou zase přímky.

---

[2]) Věta svrchu řečená o průmětech bodu „a“ se bude psáti takto: [První] průmět [a_1] bodu „a“ leží na spojnici [a_2a_3].

Ježto přímka A leží v nadprostoru $({}^3\pi A_{1\pi})$, kde přímka $A_{1\pi}$ v rovině ${}^1\pi$ zastává úkol přímky „C“ kapitoly prvé, možno dle toho tvrditi:

spojnice průmětů $a_1\ a_2\ a_3$ jednotlivých bodů „a“ přímky A obalují kuželosečku K_A, dotýkající se tečen $A_1\ A_2\ A_3$.

Na každé přímce existují tři úběžníky. Úběžný bod [prvého] druhu jest průsečný bod přímky A s nadprostorem $[{}^1\mathbf{U}]$. Jeho dva průměty v konečnu nalézají se na tečně $[{}^1T] \parallel [A_1]$. — Ježto přímka A — jak bylo řečeno — leží v nadprostoru $(A_{1\pi}\,{}^3\pi)$, tu všechny úlohy týkající se jediné přímky možno řešiti dle kapitoly prvé. — O zvláštních polohách přímky se k vůli stručnosti nezmiňuji.

5. Dvě přímky A, B leží v témž nadprostoru $[(A\,{}^1\pi) \equiv (B\,{}^1\pi)]$ když $[A_1] \equiv [B_1]$. Je-li $[A_1] \equiv [B_1]$ a $[A_2] \equiv [B_2]$, leží obě přímky v témž prostoru průsečném dvou nadprostorů $([A\,{}^1\pi)]$ a $[(A\,{}^2\pi)]$. Je-li $A_1 \equiv B_1$ $A_2 \equiv B_2$, $A_3 \equiv B_3$, leží obě přímky v téže průsečné rovině tří nadprostorů $(A\,{}^1\pi)$, $(A\,{}^2\pi)$, $(A\,{}^3\pi)$ a tedy se protínají. Čtvrtá společná tečna kuželoseček K_A a K_B jest spojnicí průmětů průsečného bodu. – Dvě přímky A a B, jichž průměty se neztotožňují, protínají se v bodě „x“, když spojnice $\overline{x_1 x_2 x_3}$ prochází průsečíky týchž průmětů přímek a jest tečnou společnou kuželosečkám K_A a K_B. Pak určují rovinu.

6. *Rovina* ϱ nechť je dána dvěma rovnoběžkami AB. Ježto řady $A_1 \barwedge A_2 \barwedge A_3$ $B_1 \barwedge B_2 \barwedge B_3$, tak, že bodu $x_1 \equiv (A_1 B_1)$ odpovídají $x_2 \equiv (A_2 B_2)$ $x_3 \equiv (A_3 B_3)$, jsou pole $\varrho_1 \doublebarwedge \varrho_2 \doublebarwedge \varrho_3$. Tato tři kolineárná pole mají tentýž samodružný trojúhelník $\overline{rr'}$ $\overline{rr''}$ $\overline{r''r'}$, který nazývám charakteristický (obr. 1.). Strany jeho jsou tři zbývající tečny kuželoseček $K_A\ K_B$:

kuželosečky všech přímek roviny ϱ vepsány jsou charakteristickému trojúhelníku.

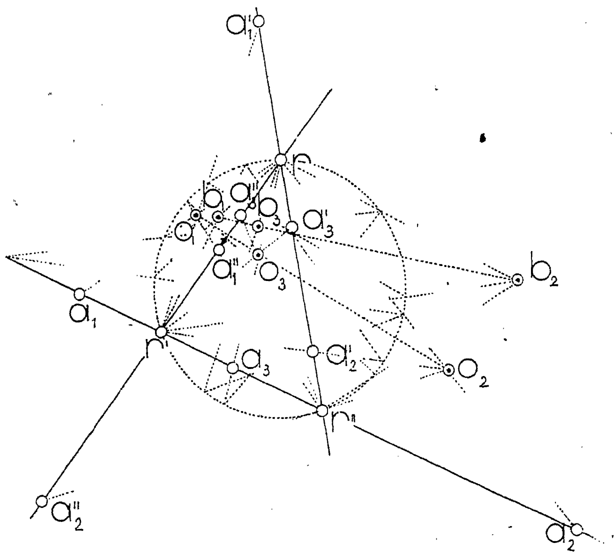
Neboť příkladně strana $r'r'' \equiv R_{123}$ jest prvým, druhým i třetím průmětem určité přímky R v rovině ϱ a body $r'\,r''$ jsou samodružné body všech tří řad $R_1 \barwedge R_2 \barwedge R_3$. — (Snadný poměrně důkaz provede se pomocí paraboloidu, určeného přímkami ${}^1R$, ${}^2R$, R_{12}, který přímka R protíná ve dvou bodech.)[3]) — Rovina ϱ má tři úběžné přímky. Obdržíme je, spojivše vždy dva souhlasné úběžné body přímek A resp. B.

Rovina ϱ buď dána charakteristickým trojúhelníkem $rr'r''$ a bodem „o“ (obr. 1.). Každá přímka, jejíž průměty procházejí jedním z bodů „r“, vytíná na protější straně trojúhelníka tři body, jež patří řadám

[3]) $\genfrac{}{}{0pt}{}{{}^1R}{{}^2R}$ je přímka průsečná nadprostoru $\genfrac{}{}{0pt}{}{(R_{12}\,{}^2\pi)}{(R_{12}\,{}^1\pi)}$ s rovinou $\genfrac{}{}{0pt}{}{{}^1\pi}{{}^2\pi}$.

na této straně. Tedy i přímka $\overline{[r]o}$ mezi ně patří a na $[r'r'']$ obdržíme body $a_1\, a_2\, a_3$, které patří řadám $R_1 \overline{\wedge} R_2 \overline{\wedge} R_3$.[4])

Úběžné [prvého] druhu stanovíme, určíme-li na dvou ze stran charakteristického trojúhelníka body $[{}^1a'_2]$ $[{}^1a'_3]$ resp. $[{}^1a''_2]$ $[{}^1a''_3]$ (na R' a R'') patřící v řadách $R'_1 \overline{\wedge} R'_2 \overline{\wedge} R'_3$ resp. $R''_1 \overline{\wedge} R''_2 \overline{\wedge} R''_3$ úběžným bodům $[{}^1a'_1]$ resp. $[{}^1a''_1]$. Pak $[\overline{{}^1a'\,{}^1a''}] \equiv [{}^1U]$.)[5] Bod $[b_1]$ a rovina $[{}^1\pi]$ určují prostor, který protíná rovinu ϱ v bodě b.



Obr. 1.

(Snadnou modifikaci této věty pro b_3 přenechám čtenáři.) Patří tedy [prvému] průmětu bodu jenom dva body jako geometrické místo zbývajících průmětů bodu b v ϱ.

K bodu $[b_1]$ *stanovíme* $[b_2]$ *resp.* $[b_3]$ *takto:* Ku přímce $\begin{matrix}[rb_1]\equiv[A_1]\\ [r'b_1]\equiv[A'_1]\end{matrix}$ stanovíme příslušné $\begin{matrix}[A_2]\equiv[rb_2]\\ [A'_2]\equiv[r'b_2]\end{matrix}$ resp. $\begin{matrix}[A_3]\equiv[rb_3]\\ [A'_3]\equiv[r'b_3]\end{matrix}$. Ježto body $[b_2]$, $[b_3]$ musí se nalézati na $[A_2]$, $[A_3]$ resp. $[A'_2]$ $[A'_3]$, musí se nacházeti v jejich průsečíku $[b_2]\equiv[A_2][A'_2]$ a $[b_3]\equiv[A_3][A'_3]$. Při konstrukci můžeme ovšem použíti kterýchkoliv dvou ze tří bodů $r\ r'\ r''$. Téže konstrukce užijeme, abychom k [prvému] průmětu nějaké přímky v ϱ stanovili průměty zbývající.

[4]) Závorky [] v této větě značí cyklickou záměnu čárek v pravo nahoře, a nikoliv číslic v pravo dole.

[5]) Čtvrtá společná tečna parabol $[K_{{}^1u}]$ jest $U_{{}^3\pi}$.

Průsečík „x“ přímky „X“ s rovinami ϱ stanovíme tak, že najdeme takovou přímku X_ϱ v ϱ že $[X_1] \equiv [X_{\varrho 1}]$. Existuje-li průsečík x, přímky X a X_ϱ se musí protínati.

7. *Zvláštní polohy roviny ϱ.*

I. ϱ protíná ${}^k\pi$ v bodech ($k = 1, 2, 3$). Pak k průmětů roviny jsou přímky. Z toho plyne:

Druhý průmět roviny $\frac{I}{2}$ kolmé ku ${}^3\pi$ jest přímka.

II. ϱ protíná $[{}^1\pi]$ v přímce. Pak [prvým] průmětem roviny ϱ je bod $[\varrho_1]$. Z toho plyne:

druhý průmět roviny totálně kolmé ku ${}^3\pi$ jest bod.

Kombinací případů I. II. získáme odvození další zvláštní polohy roviny.

III. Rovina ϱ nalézá se v úběžném nadprostoru [prvého] druhu $[{}^1\mathbf{U}]$. Takovou rovinu nazývám úběžnou [prvého] druhu. Jedna strana charakteristického trojúhelníka $[\varrho_{1\infty}]$ je v nekonečnu.

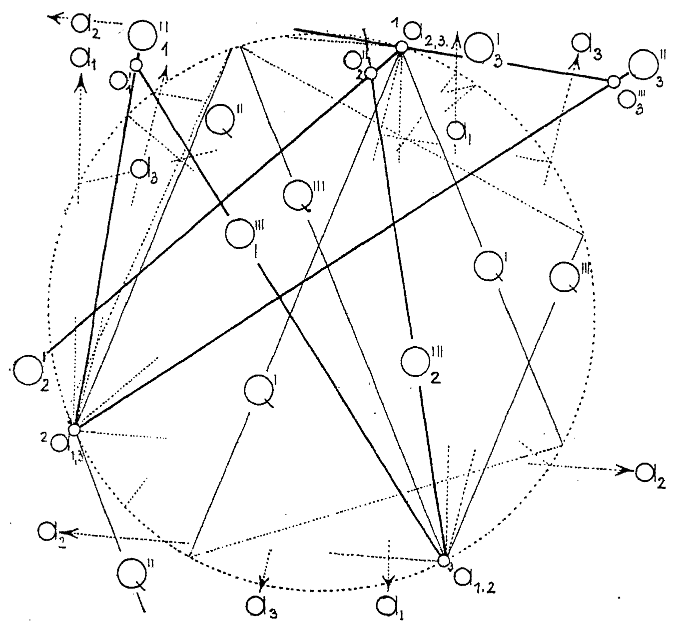
Dvě roviny jsou rovnoběžny, mají-li společnou úběžnou ${}^2U^\varrho \equiv {}^2U^\sigma$. V případě, že jen ${}^2U_1{}^\varrho \equiv {}^2U_1{}^\sigma$ $({}^2U_3{}^\varrho \equiv {}^2U_3{}^\sigma)|$ ale ${}^2U_3{}^\varrho \mp {}^2U_3{}^\sigma$ $({}^2U_1{}^\varrho \mp {}^2U_1{}^\sigma)$ jsou obě roviny rovnoběžny s nadprostorem $({}^2U_1{}^\varrho\, {}^1\pi)$ (nebo $({}^2U^\varrho_{1\pi}\, {}^3\pi)|$ a pak jsou buď v poloze obecné nebo polorovnoběžné, dle toho, zda-li prochází-li bodem ${}^2U_3{}^\varrho \,.\, {}^2U_3{}^\sigma$ $({}^2U_1{}^\varrho \,.\, {}^2U_1{}^\sigma)$ společná tečna (na níž leží průměty společného bodu úběžného) parabol K_{U^ϱ} K_{U^σ}.

8. *Společné elementy dvou rovin ϱ a σ:* Kromě konstrukcí, založených na úvahách prostorových, existuje konstrukce následující, značně jednoduchá, založená na úvaze projektivní: Pole $\varrho_1 \overline{\overline{\wedge}} \varrho_2 \overline{\overline{\wedge}} \varrho_3$ a $\sigma_1 \overline{\overline{\wedge}} \sigma_2 \overline{\overline{\wedge}} \sigma_3$. K poli $\tau_1 \begin{matrix} \equiv \varrho_1 \equiv \varrho'_1 \\ \equiv \sigma_1 \equiv \sigma'_1 \end{matrix}$ stanovíme $\varrho'_2 \overline{\overline{\wedge}} \sigma'_2$. K poli $\varphi_3 \begin{matrix} \equiv \varrho_3 \equiv \varrho_3'' \\ \equiv \sigma_3 \equiv \sigma_3'' \end{matrix}$ stanovíme $\varrho_2'' \overline{\overline{\wedge}} \sigma_2''$. Počet totožných elementů samodružných trojúhelníků soustav $(\varrho_2' \overline{\overline{\wedge}} \sigma'_2)$ $(\varrho''_2 \overline{\overline{\wedge}} \sigma''_2)$ stanoví druhé průměty společných elementů obou rovin. Jsou-li ϱ a σ v témž prostoru, jsou jejich char. trojúhelníky opsány téže kuželosečce.

9. *Lineární prostor trojrozměrný* $\mathfrak{A}$ (krátce prostor $\mathfrak{A}$) stanoven je čtyřmi body m, n, p, q, ležícími na dvou mimoběžkách $M \equiv \overline{m\,n}$ $P \equiv \overline{p\,q}$. Průsečná rovina $[{}^1\mu]$ prostoru $\mathfrak{A}$ s nadprostorem $[{}^1\mathbf{U}]$ je stanovena úběžnými body [prvého] druhu přímek M, P a $N \equiv \overline{n\,q}$. Nazývám ji úběžnou rovinou [prvého] druhu. Tyto tři roviny se protínají v přímce. Neboť nadprostory ${}^1\mathbf{U}$ a ${}^3\mathbf{U}$ protínají se v prostoru $\mathfrak{U} \equiv (U^{3\pi} \,.\, U^{1\pi})$, ležícím v ${}^2\mathbf{U}$. I musí býti $\mathfrak{U}_1 \equiv \mathfrak{U}_3 \equiv \mathfrak{U}_2$ v nekonečnu. Prostor $\mathfrak{U}$ protíná tedy $\mathfrak{A}$ v přímce, jejíž všechny tři průměty v nekonečnu se ztotožňují:

V prostoru $\mathfrak{A}$ existuje jediná úběžná přímka prvého, druhého i třetího druhu zároveň. Jest to společná strana charakteristických trojúhelníků rovin $^1\mu$ $^2\mu$ $^3\mu$. I musí býti zbývající dvě strany těchto trojúhelníků rovnoběžny.

Vzhledem k symetrii konstrukcí bude tedy nejracionelnější stanovení prostoru $\mathfrak{A}$ pomocí průsečíků ^1a, ^2a, ^3a prostoru $\mathfrak{A}$ s rovinami $^1\pi$, $^2\pi$, $^3\pi$ a úběžného bodu „a“ prvého, druhého i třetího druhu zároveň. (Obr. 2.) Pak jest totiž úběžná rovina [prvého] druhu



Obr. 2.

určena bodem „a“, stopníkem [^1a], a bodem úběžným [prvého] druhu [^1u] přímky [^2a ^3a], jehož [$^1u_2 \equiv {}^3a_2$] a [$^1u_3 \equiv {}^2a_3$]. Dvě strany [Q'] charakteristického trojúhelníka roviny [$^1\mu$] obdržím jakožto tečny k parabole $K_{^1U^*}$ ([$^1U^*$] $\equiv \overline{[^1u]\ a}$).

10. *K bodu [o'_1]*[6]) *stanoviti průměty ostatní:* (Obr. 2.) Ježto prostor [($^1\pi\, o'_1$)] protíná $\mathfrak{A}$ v přímce [O'],[6]) jest [o'_1] [prvým] průmětem této přímky a naopak [O'_2]. [O'_3] jsou geometrickým místem [druhých] a [třetích] průmětů bodů [o'], které mají [prvý] průmět [o'_1] společný. — Ježto přímka [O'] protíná [$^1\pi$], procházejí [druhý]

6) [ ] vztahuje se též na čárku v pravo nahoře. Pro o_3''' nutno větu opět lehce modifikovati.

i [třetí] průmět $[O'_2]$ a $[O'_3]$ bodem $[{}^1a_{23}]$. Považuji bod $[o'_1]$ za [prvý] průmět úběžného bodu $\genfrac{}{}{0pt}{}{[\text{druhého}]}{[\text{třetího}]}$ druhu přímky $[O']$. Ve svazku o vrcholu $\genfrac{}{}{0pt}{}{[{}^2a_{13}]}{[{}^3a_{12}]}$ najdu k úběžnici $\genfrac{}{}{0pt}{}{[\text{druhého}]}{[\text{třetího}]}$ druhu $\genfrac{}{}{0pt}{}{[{}^2U_1 \equiv {}^2a_1\, o'_1]}{[{}^3U_1 \equiv {}^3a_1\, o'_1]}$ sdružený směr, udávající směr $\genfrac{}{}{0pt}{}{[\text{druhého}]}{[\text{třetího}]}$ průmětu bodu $\genfrac{}{}{0pt}{}{[o_2']}{[o_3]}$ (kterýžto je v nekonečnu) přímky $\genfrac{}{}{0pt}{}{{}^2U_2}{{}_3U_3}$. S těmito oběma směry vedu rovnoběžky $[O'_2]\,[O'_3]$ bodem $[{}^1a_{23}]$.

[Prvý] průmět $[A_1]$ nějaké přímky v $\mathfrak{A}$ jest zároveň [prvým] průmětem roviny $\alpha \equiv (\mathfrak{A}\,.\,[({}^1\pi\, A_1)])$ a možno tudíž jeden ze zbývajících průmětů voliti libovolně.

Průsečná přímka X dvou prostorů $\mathfrak{A}\ \mathfrak{A}'$: Bodům $[o_1]$ přiřadím přímky $\genfrac{}{}{0pt}{}{[O_2]}{[O'_2]}\,\genfrac{}{}{0pt}{}{[O_3]}{[O'_3]}$ v polích $\genfrac{}{}{0pt}{}{[\mathfrak{A}_2]}{[\mathfrak{A}'_2]}\,\genfrac{}{}{0pt}{}{[\mathfrak{A}_3]}{[\mathfrak{A}'_3]}$. Je-li $[O_2\,.\,O'_2] \equiv [\underset{2}{p}]$ a $[O_3 O'_3] \equiv \underset{3}{p}$ pak incidentní elementy korelace $[o_1]\ \overline{\underset{2}{p}\,\underset{3}{p}}$ řeší úlohu.

Průsečík roviny ϱ *s prostorem* $\mathfrak{A}$: Ulohu tuto snadno rozřeším pomocí úlohy předcházející.

(Existuje-li) *průsečík přímky X s prostorem* $\mathfrak{A}$ stanovím opět pomocí úloh předcházejících.[7]) Tyto úlohy dají se ovšem řešiti samostatně i úvahami prostorovými, jež pro stručnost neuvádím.

11. Přímka jest s prostorem buď mimoběžná, nebo ho protíná v bodě. Je-li tento bod v úběžné rovině prostoru, jsou oba útvary rovnoběžné. — Rovina s prostorem může býti polorovnoběžná. Pak se úběžné útvary roviny a prostoru protínají v bodě. Mají-li rovina a prostor ještě jeden bod společný v konečnu, protínají se v přímce, určujíce nadprostor. — Dva prostory jsou obecně $\frac{1}{3}$ rovnoběžné, protínajíce se v přímce v konečnu. Jsou-li oba prostory $\frac{2}{3}$ rovnoběžné, jest společná jejich přímka v úběžném prostoru. *Pak parabola vepsaná do čtyřstranu charakteristických trojúhelníků úběžných rovin druhého druhu patří hledané průsečnici.* Mají-li ještě bod v konečnu protínají se v rovině.

Nutná a postačující podmínka, aby dva prostory protínaly se v rovině (určovaly nadprostor) *jest společný průsečík přímek*

$$\overline{{}^3a_{12}\,{}^3a'_{12}}\quad \overline{{}^2a_{13}\,{}^2a'_{13}}\quad \overline{{}^1a_{23}\,{}^1a'_{23}}.^{8})$$

(Důkaz v odst. 13.) Je-li tato rovina v úběžném prostoru, jsou oba prostory rovnoběžné.

---

[7]) Existuje též samostatné řešení pomocí proj. geom.

[8]) Rovina ta je pak určena úběžnými body všech tří druhů.

12. *Zvláštní polohy prostoru:*

I. Prostor [$^1\mathfrak{U}$] v nadprostoru [^{1}U] má tu vlastnost, že [prvý] průmět všech jeho útvarů jest v nekonečnu. Nazývám ho úběžným prostorem [prvého] druhu. Takový prostor protíná rovinu [$^1\pi$] v přímce [^1A]. Body [$^3a_{12}$] resp. [$^2a_{13}$] padnou do nekonečna v daných směrech [$^3A_{12}$] resp. [$^2A_{13}$]. Úběžná [prvého] druhu, protínající [$^2\pi$] má svůj [třetí] průmět [$^1U_3 \| {}^2A_{13}$] a [druhý] průmět bod. Protne-li i [$^1\pi$] jest též její [prvý] průmět bodem a tudíž [druhý] i [prvý] průmět jest na [$^1U_3$]. *Protne-li* [^1U] *roviny* [$^2\pi$] [$^1\pi$], *její parabola degeneruje v* $^1U_3$.

Proložme touto přímkou úběžnou rovinu [$^1\varrho$] [prvého] druhu tak, aby protínala ještě [$^3\pi$]. Pak ovšem [$^1\varrho_3 \equiv {}^1U_3$] jest [třetím], a [$^1\varrho_2 \equiv {}^1U_2{}^* \| {}^3A_{12}$] bodem [$^1a_{23} \equiv {}^1U_3 \,.\, {}^1A_{23}$][9]) je [druhým] průmětem roviny [$^1\varrho$]. I promítají se rovnoběžky v [$^1\varrho$] bodem [^2a], tak že [$^1U_3 \equiv {}^1\varrho_3$], [$^1U_2$] jest však bodem na $^1U_2{}^*$:

Paraboly úběžných [^1U] *[prvého] druhu, které protínají* [$^2\pi$] *degenerují ve svazky paprsků body na* [$^1U_2{}^* \| {}^3A_{12}$], *kterážto přímka vedena je bodem* $^1a_2$, $\equiv$[$^1U_3 \,.\, {}^1A_{23}$]. *Podobně dokáže se věta: Paraboly úběžných* [$^1U^*$] *[prvého] druhu, které protínají* [$^3\pi$] *degenerují ve svazky paprskové body na* [$^1U_3 \| {}^2A_{13}$], *kterážto přímka vedena je bodem* [$^1U_2{}^* \,.\, {}^1A_{23}$].

II. Prostor $\mathfrak{A}$ obsahuje [$^1\pi$]. Pak [prvý] jeho průmět jest bod. — Rovina [$^1\pi$] je polorovnoběžna s $\mathfrak{A}$ a protíná ho v přímce. Pak útvary [$^1\pi$] $\mathfrak{A}$ určují nadprostor a [prvým] průmětem prostoru je přímka. — Rovina [$^1\pi$] je polorovnoběžna s $\mathfrak{A}$, neurčuje s ním však nadprostoru. Pak úběžná rovina [$^2\mu$] [druhého] druhu určuje s [$^1\pi$] nadprostor a tudíž [$^3\mu_1$] je přímka. — Rovina [$^1\pi$] je rovnoběžná s $\mathfrak{A}$. Pak roviny [$^2\mu$] a [$^1\pi$] určují prostor a jest tudíž [prvým] průmětem [$^2\mu_1$] úběžné roviny bod — Uvedené případy dají se při jisté opatrnosti kombinovati. (Příkladně prostor totálně kolmý ku $^3\pi$ neprotíná ani $^1\pi$ ani $^3\pi$ v přímce, kdežto polokolmý prostor ku $^3\pi$ může obě řečené roviny v přímkách protínati.)

13. *Lineární prostor čtyřrozměrný* **A** (nadprostor) určen je pěti body $a^{(i)}$ ($i = 1 \ldots 5$) neležícími v témž prostoru. Jeho úběžný prostor [prvého] druhu stanovím takto: Stanovím úběžný bod [prvého] druhu každé přímky $a^{(5)}\, a^{(k)}$ ($k = 1 \ldots 4$). Tyto čtyři body určují hledaný prostor [$^1\mathfrak{U}$]. Prostor ten protíná [$^1\pi$] v přímce [^1A]. Stanovím ji tím způsobem, že ve dvou rovinách prostoru [$^1\mathfrak{U}$] stanovím vrchol v konečnu charakteristického trojúhelníka. Spojnice obou vrcholů jest přímka [$^1A_{23}$]. — Přímky ^3A a ^1A určují prostor, který protíná $^2\pi$ v bodě, jehož prvý, druhý a třetí průmět jest v bodě $q_{123} \equiv ({}^1A \,.\, {}^3A)$. (Obr. 3.) I musí tedy přímka $^2A_{13}$ tímto bodem procházeti, má-li patřiti témuž nadprostoru:

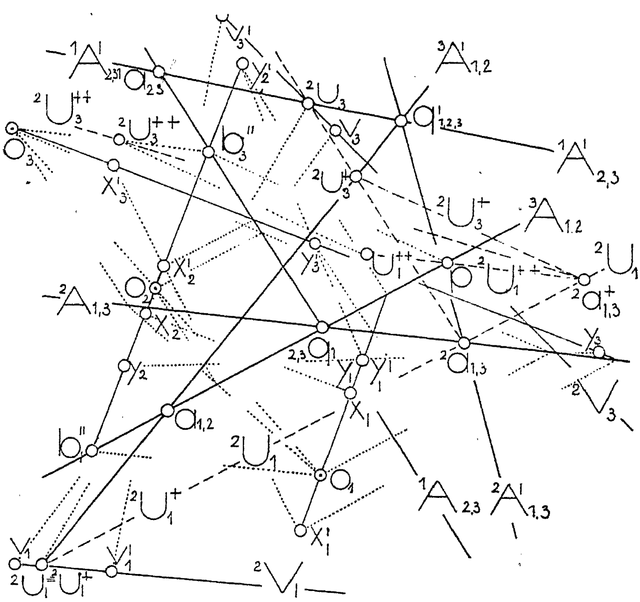
---

9) neboť rovina [$^1\varrho$] protíná [$^3\pi$] v bodě [^3a], a [$^3a_2$] jest dán směrem [$^3A_2$].

Tři přímky ^1A ^2A ^3A v rovinách $^1\pi$, $^2\pi$, $^3\pi$ určují jen tenkráte nadprostor, když se průměty $^1A_{23} \nparallel {^2A_{13}} \nparallel {^3A_{12}}$ protínají v jednom bodě.

Určení to jest ovšem i postačující. — Známe-li přímky ^1A, ^2A, ^3A, známe i úběžný prostor [prvého] druhu.

Dle odstavce 12. ad I., paraboly úběžných [prvého] druhu, jichž [$^1U_2 \equiv {^2A_{13}}$] (nebo [$^1U_2 \equiv {^3A_{12}}$]), degenerují ve svazek paprsků každým bodem na [$^3A_{12}$] (nebo [$^2A_{13}$]). Dále paraboly úběžných [prvého] druhu [$^1U'$] protínajících [$^1\pi$] degenerují ve svazky rovnoběžných přímek. Směr jejich obdržíme takto: Z úběžných [^1U]10) zvolím takovou, která [$^1U'$] protíná v bodě [b^I]. (Zobrazen jen bod b^{II}). Pak [$^1U'_3 \,.\, {^2A_{13}} \equiv b_3{}^I$] a [$^1U'_2 \,.\, {^3A_{12}} \equiv b_2{}^I \equiv {^1U_2}$]. I jest tedy [$b_3{}^I b_2{}^I$] hledaným směrem. Pro konstruktivní účely důležité jsou ty, kdež [$^1U'_3 \equiv \parallel {^1A_{23}}$] a tudíž i [$^1U'_2 \parallel {^1A_{23}}$].



Obr. 3.

14 *K prvému průmětu* [o_1] *bodu „o" v nadprostoru* A *stanoviti průměty ostatní.* Dá se snadno dokázati, že [„o_1"] jest [prvým] průmětem [ω_1] roviny ω, obsahující [^1A]. Existuje tedy ∞^2 přímek O, jichž [$o_1 \equiv O_1$] (a které protínají ^1A). Zvolme na [$^1A_{23}$] libovolný bod [$b_3{}^{II}$], jímž jedna z přímek prochází. Považuji [o_1] za

10) [$^1U_3 \equiv {^2A_{13}}$].

úběžný [druhého] druhu „$^2u'$“ na úběžné přímce [druhého] druhu [$^2U'$]. (Odstavec předcházející, konec.) Pak jest [$^2A_{13} \parallel o_1\, b_1^{II} \equiv {}^2U'_1$] a [$^2A_{13} \parallel o_3\, b_3^{II} \equiv {}^2U'_3$] a tudíž [$b_1^{II}\, b_3^{II}$] určuje směr úběžného [$u'_{2\infty}$], takže [$b_1^{II}\, b_3^{II}$] $\equiv$ [$O_2^{1,2}$]. Ježto bod [$^2u'_3$] leží na [$^2U'_3$] ([$^2u'_3 \equiv \overline{{}^2u'_1\ {}^2u'_{2\infty}} \,.\, {}^2U'_3$]) jest $^2U'_3 \equiv O_3^{1,2}$:

Bodem [„o_1“] *vedeme* [$\overline{o_1\, b_1^{II}} \parallel {}^2A_{13}$], *bodem* [$b_1^{II}$] *libovolnou* [$O_2 \equiv b_1^{II}\, b_3^{II}$], *načež* [$O_3 \parallel {}^2A_{13}$] *bodem* [$b_3^{II}$].

Považuji-li [$o_1 \equiv {}^3u'_1$] za prvý průmět úběžného bodu [třetího] druhu, dá se dokázati podobná konstrukce:

Bodem [o_1] vedeme [$o_1\, b_1^{III} \parallel {}^3A_{12}$], bodem [$b_1^{III}$] na [$^2A_{13}$] libovolnou [$O_3^{1,3} \equiv b_1^{III}\, b_2^{III}$], načež [$O_2^{1,3} \parallel {}^3A_{12}$] bodem [$b_2^{III}$] na [$^1A_{23}$].

Ku přímce [X'_1] stanoviti příslušné [X'_2] a [X'_3]. Ježto dva nadprostory protínají se v prostoru, možno [X'_1] $\equiv$ [$x'_1\, y'_1$] považovati za [prvý] průmět [$\mathfrak{A}_1$] určitého prostoru $\mathfrak{A}$, *či-li [X'_2] a [X'_3] možno zvoliti zcela libovolně.* (obr. 3.) Aby přímka X' byla stanovena, určíme na ni dva body x' y'. Konstrukce výhodně provedena na obr. 3.

— Je-li naší úlohou *stanoviti na nějaké úběžné [druhého] druhu* $^2V'$ body (dáno [$^2V'_3 \equiv {}^2V_3$, $^2V'_1 \equiv {}^2V_1$]), můžeme libovolný bod [^2v] na [$^2V'$] stanoviti takto. Nechť [$^2U_1 \parallel {}^3A_1$] jest prvním průmětem takové úběžné [druhého] druhu [^2U], která protíná [$^2V'$] v bodě [^2u]. I musí [$^2u_3 \equiv {}^2U_3$] býti bod jednak na [$^2a_{13}\ {}^2u_3$] $\parallel$ [$^1A_{32}$], jednak na [$^2V_3$] a tedy v jejich průsečíku. Spojnice [$^2u_3\ {}^2u_1$] určuje pak směr úběžného bodu [$^2u_{2\infty}$]:

Libovolným bodem [$^2a_{13}$] na [$^2A_{13}$] vedeme rovnoběžky s [$^3A_{12}$, $^2A_{23}$], kteréž protnou [$^2V'_1$, $^2V'_3$] v bodech [$^2u_1$] [$^2u_3$].

K prvému průmětu ϱ_1 stanoviti zbývající průměty roviny ϱ v **A**. Je-li pole [$\varrho_1 \equiv A_1\ B_1$], možno přímky [$A_2$, B_2] voliti zcela libovolně, ale přímky [A_3] a [B_3] musí procházeti bodem [x_3] (je-li [$x_1 \equiv A_1 B_1$, $x_2 \equiv A_2 B_2$]). — Při určování průmětů prostoru není žádného omezení.

15. *Průsečík „o“ přímky $X \equiv \overline{x\,y}$ s nadprostorem* **A** *(obr. 3).* Zvolíme v **A** takovou přímku X', aby souhlasné průměty obou přímek se ztotožňovaly. Pak obě přímky leží v průsečné rovině nadprostorů ($^1\pi\, X_1$) ($^2\pi\, X_2$) ($^3\pi\, X_{1\pi}$) a tudíž se protínají v bodě „o“, je-li $\overline{o_1\, o_2\, o_3}$ společná tečna obou kuželoseček K_x a $K_{x'}$, vepsaných trojúhelníku $X_1\ X_2\ X_3$.

Průsečnice W roviny „ω“ s nadprostorem **A**. Způsobem v odstavci 14. vyloženým stanovíme v nadprostoru **A** úběžnou [$^2V'$] [druhého] druhu, aby souhlasné průměty její a úběžné přímky

[^2V] [druhého] druhu roviny ω se ztotožňovaly, načež najdeme společnou tečnu [$^2u_3\ ^2u_1$] obou kuželoseček $K_{2V}\ K_{2V'}$. Podobným způsobem stanovíme bod [^1u] průsečný úběžné [^1V] [prvého] druhu roviny „ω“. Přímka [$^2u\ ^1u$] $\equiv W$.

Průsečná rovina μ prostoru $\mathfrak{A}^*$ s nadprostorem **A**. Právě vylíčeným způsobem můžeme stanoviti průsečíky $^1u\ ^2u\ ^3u$ tří úběžných $^1U\ ^2U\ ^3U$ s nadprostorem, načež $\mu \equiv {^1u}\ ^2u\ ^3u$. — Úběžnou přímku [druhého] druhu [$^2u^{**}\ ^2u^*$] roviny [$^2\mu$] můžeme krátce též stanoviti takto:

Stopníkem [$^2a_{13}{}^+$] prostoru $\mathfrak{A}^+$ s [$^2\pi$] vedu úběžné [$^2U^+$] a [$^2U^{++}$] v $\mathfrak{A}^+$, aby [$^2U^+_1 \parallel {^3A_{12}},\ ^2U_1^{++} \parallel {^2A_{13}}$], načež musí [$^2U^+_3 \,.\, \overline{^2v_3\ ^2a_{13}}$] $\equiv$ [$^2u^+_3$], [$^2U^+_{2\infty} \parallel {^2u_3}^x\ ^2u_1^+ \,.\, ^2U_1^+ \equiv {^2u_1^+}$] a podobně [$^2U_3^{++} \,.\, \overline{b_3^{II} o_3}$] $\equiv$ [$^2u_3^{++}$],[11]) [$^2u_3^+\ u_1^{++}$] $\parallel b_3^{II} p$. Spojnice [$^2u^+\ ^2u^{++}$] je hledaná úběžná [druhého] druhu průsečné roviny μ.

Průsečný prostor $\mathfrak{A}$ dvou nadprostorů **A** *a* **A**$'$. Oba prostory jsou dány (obr. 3.) stopami $^1A\ ^2A\ ^3A$ resp. $^1A'\ ^2A'\ ^3A'$. — Bod v [$^1\pi$] či-li [^1a] hledaného prostoru jest [$^1a \equiv {^1A}\ ^1A'$]. Obdržíme tedy ihned stopní trojúhelník $^1a\ ^2a\ ^3a$ hledaného prostoru. Další bod [^2u] stanovíme průsečíkem úběžných ^2U a $^2U'$; [$\overline{^2U_1 \equiv {^2U'_1}} \parallel {^3A_{12}}$], [$^2a_{13}\ ^2u_3$] $\equiv$ [$^2U'_3$], kdežto [$^2\dot{U}_3$] je bodem na [$\overline{^2a_{13}\ ^2u_3}$] $\equiv$ $^2U'_3$ tedy [$^2u_3 \equiv {^2U_3}$]. Směr [$^2U'_{2\infty}$] je dán spojnicí bodů [$^2u_1$] $\equiv$ [$^2U'_1\ ^3A'_{12}$] a [$^2U'_3 \,.\, ^1A'_{23}$] $\equiv$ [$^2u_3$]. I jest tedy [„^2u“] bod hledaný.

16. Zvláštní polohy nadprostoru:

I. α) **A** obsahuje [$^1\pi$]. Pak jest [prvý] průmět všech útvarů v **A** přímkou [$A_1 \equiv {^3A_1} \equiv {^2A_1}$] *Průměty zbývajících stop se stotožňují.*

β) **A** jest úběžným nadprostorem [prvého] druhu (obsahuje tedy [$^1\pi$]). Ježto [$^3A_1$] jest v nekonečnu, jest i [$^2A_1$] v nekonečnu: *Průměty zbývajících stop jsou úběžné.*

II. **A** nechť je rovnoběžno s [$^1\pi$]. Pak [$^1A_{23}$] jest úběžnou přímkou roviny $^3\pi$ a tudíž [$^2A_{13} \parallel {^3A_{12}}$]. *Průměty zbývajících stop jsou rovnoběžné.*

17. *Projekce nadprostoru* **A** *z bodu „c“ do nadprostoru* **A**$' \equiv (A\ ^3\pi)$. (Obrázek nechť si udělá čtenář laskavě sám.) Nemetrické úlohy v **A** mohu řešiti též tak, že nadprostor ten promítnu do **A**$' \equiv (^1A \,.\, ^3\pi)$, kde provedu potřebné konstrukce dle kap. I., načež rozřešenou úlohu promítnu zpět do A. — Bod „c“ zvolím v $^1\pi$. Libovolný bod „a“ promítnu z nadprostoru **A** do **A**$'$, když stanovím průsečík „a'“ přímky $^aX \equiv (c\ a)$ s nadprostorem **A**$'$. Ježto **A**$'_3 \equiv {^1A_3}$ musí $a'_3 \equiv {^aX_3} \,.\, ^1A_3$; „$a_1$“ $\equiv$ „a'_1“ $\equiv {^aX_1}$ (neboť ^aX protíná $^1\pi$.) Pak tedy $(^aX \,.\, a'_1\, a'_3) \equiv x'_2$. Je-li bod „$a'$“ zpět promítnouti do „$a$“, tu vyhledám druhý průmět A_2 takové přímky A v **A**, jejíž $A_1 \equiv a_1$, $A_3 \equiv {^aX_3}$. Pak $(A_2\ ^aX_2) \equiv a_2$ a $(\overline{a_1\, a_2} \,.\, ^aX_3) \equiv a_3$ (Neboť přímky A a X protínají se, ležíce v průsečné rovině prostoru $(^1\pi\, a_1)$ a nadprostoru $(^aX_{1\pi} \,.\, ^3\pi)$).

---

[11]) Když [pb_3^{II}] určuje směr [$^2U_{2\infty}^{**}$].

Pro konstruktivní účely je výhodno znáti: průsečný prostor $\mathfrak{A}$ obou nadprostorů, prostor $\mathfrak{U}$, který se promítá do úběžného prostoru $\mathfrak{U}'$ nadprostoru **A'** a konečně rovinu π, která se promítá do ${}^3\pi$. Průsečný prostor $\mathfrak{A}$ určen jest stopou ${}^3A_{12}$ a stopou ${}^1A$. Prostor ten se při projekci s bodu „c" nemění, tudíž jeho úběžná rovina μ promítá se opět do téže roviny μ a patří tedy prostoru $\mathfrak{U}$, z něhož potřebujeme znáti ještě jeden bod „u", který stanovím zpětným pochodem. Stanovím průsečík „u" přímky ${}^uX$, spojující bod c s libovolným bodem u' na ${}^2A'$ (${}^2A'_{13} \equiv {}^1A'_{23}$). ${}^uX_2 \equiv c_2 \equiv u_2$ ${}^uX_1 \equiv u'_1 \equiv u_1$ a k bodům u_1, u_2 stanovíme u_3 (odstavec 14.). Je výhodné za bod „u'" zvoliti ten, který má prvý a třetí průmět u'_{13} v úběžném bodě přímky ${}^2A'_{13}$. Pak totiž „u" jest úběžníkem prvého druhu. — Rovina π musí býti *průsečná rovina prostoru* $(c^3\pi)$ *s nadprostorem* **A**, neboť jenom přímky X v tomto prostoru protínají ${}^3\pi$. Její stopa jest ${}^3A_{12}$. Její úběžná U^π má $U^\pi \parallel {}^3A_{12}$ a $\pi_3 \equiv U^\pi_3$ je bodem a tedy bodem c_{23}. Dle toho snadno U^π_1 stanovíme. *Máme-li* nějaký útvar K v **A** promítnouti do **A'**, stanovíme společné body útvaru K a resp. $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{A}$, π. Tím získáme snadno body *úběžné,* při promítání *nepromĕnné* a konečně *stopní* útvaru K'.

§ 2.

Orthogonalita.

1. Dva kolmé prostory i-dimensionálné ($i = 1 \,..\, 4$) v prostoru pětirozměrném jsou takové, jichž ($i - 1$) dimensionálné úběžné prostory jsou polárně sdružené vzhledem k absolutní sférické varietě v úběžném nadprostoru. Tato varieta protíná rovinu ${}^2\pi$ v imaginárné kružnici ${}^2O^i$, jejíž reálné zobrazení kružnice ${}^2O$, má ${}^2O_1 \equiv {}^1O_2$.

Pomocí polárných vlastností[12]) ($i - 1$) dimensionálných úběžných prostorů mohu tedy řešiti úlohy, týkající se orthogonality příslušných prostorů i-dimensionálných. — Základní úlohy jsou dvě (a k nim duální):

I. V úběžném nadprostoru k bodu „u" stanoviti polárně sdružený prostor (a duální).

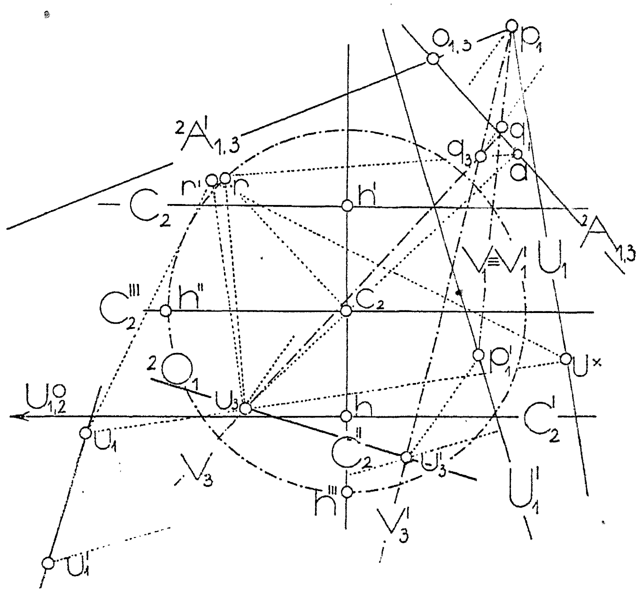
II. Ku přímce U stanoviti polárně sdruženou rovinu (a duální).

2. *K bodu „u" stanoviti polárný prostor* $\mathfrak{U}$ (obr. 4.). Rovina ${}^1\pi$ budiž dána přímkami C C' a vrcholy příslušných distančních hyperbol h a h', bod „u" svými průměty u_1 $u_{2\infty}$ u_3. Bod ten se nalézá v úběžné rovině prostoru ($u_{1\pi}$ ${}^3\pi$).[13]) Tato úběžná rovina protíná absolutní sférickou varietu rovněž v kružnici (imaginárné). Poláru U polu „u" k této kružnici mohu stanoviti dle zásad cen-

[12]) Míněno vždy k absolutní sférické varietě.

[13]) $u_{1\pi}$ je bod průsečný prostoru (${}^3\pi\, u$) s ${}^1\pi$ a jeho druhý průmět je tedy u_3.

trálného promítání v trojrozměrném prostoru ($u_{1\pi}$ ${}^3\pi$) z bodu $u_{1\pi}$. Distanci $(u_{1\pi} u_3) = u_3 r$ odměřím na distanční hyperbole přímky $c\, u_{1\pi}$. Další přímku ${}^2A$ hledaného prostoru získám v rovině ${}^2\pi$, jako poláru k polu, který obdržím průsečíkem přímky $\overline{u_3\, u_{1\pi}}$ s rovinou ${}^2\pi$ — vzhledem k ${}^2O^i$. Stanovím-li tedy antipoláru k u_3 vzhledem k ${}^2O_1$ získám ${}^2A_{13}$ jakožto průmět úběžné přímky roviny totálně kolmé k prostoru (u ${}^3\pi$). Úběžný prostor $\mathfrak{U}$ určen jest přímkami (U ${}^2A$). — Úloha: *K prostoru* $\mathfrak{U}$ *stanoviti pól „u"* řeší

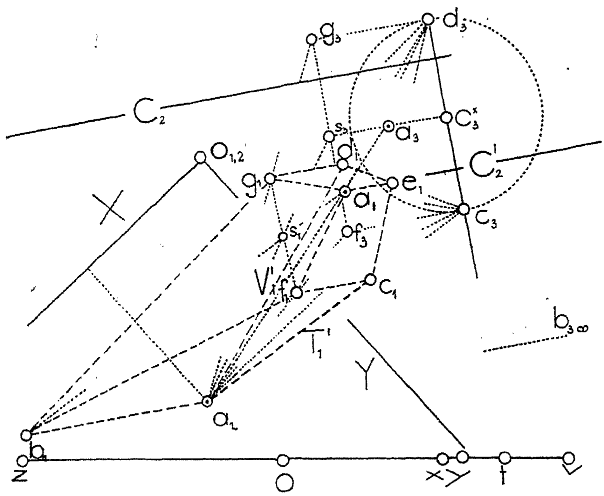


Obr. 4.

se duálně. Tím jsou v zásadě rozřešeny úlohy: *Ku přímce A stanoviti nadprostor kolmý* **A**, *a obráceně k nadprostoru* **A** *stanoviti přímku A kolmou.*

3. *V úběžném nadprostoru stanoviti ku přímce* $\overline{u\,u'}$ *rovinu* μ *polárně sdruženou.* (Obr. 4.) Stanovíme oba prostory $\mathfrak{U}$ resp. $\mathfrak{U}'$ k *„u"* resp. *„u'"* polárně sdružené $\mathfrak{U} \equiv ({}^2A\ U)$ $\mathfrak{U}' \equiv ({}^2A'\ U')$. Oba protínají se v hledané rovině μ, jejíž stopník o na ${}^2\pi$ jest určen $o \equiv ({}^2A \,.\, {}^2A')(o'_{13} \equiv {}^2A_1 \,.\, {}^2A'_1)$. Další její libovolný bod q stanovíme takto. V obou prostorech stanovíme takové přímky úběžné, že $V_1 \equiv V'_1$, a $V_{2\infty} \equiv V'_{2\infty}$ jest bodem v libovolném směru $\overline{u_3 p_1}$. Pak se obě přímky protínají v bodě q. Bodem u_3 resp. u'_3 veďme rovnoběžky s daným směrem $\overline{u_3 p_1} \parallel \overline{u'_3 p'_1}$, načež $p_1 p'_1 \equiv V_1 \equiv V'_1$. Přímky V_3 resp. V'_3 určeny jsou jednak body $p_3 \equiv u_3$

resp. $p'_3 \equiv u'_3$ (neboť p jest na U, p' na U') jednak průsečnými body přímek ${}^2A_{13} . V_1$ resp. $({}^2A'_{13}\, V'_1)$. Pak $V_{2\infty} \equiv V'_{2\infty} \equiv q_{2\infty}$, $q_3 \equiv V_3 . V'_3$ a $q_1 \equiv V_1 . q_3\, q_{2\infty}$. Takovým způsobem můžeme stanoviti libovolný počet bodů q hledané roviny. — Úloha duální zní: *K polárné rovině μ stanoviti poláru $\overline{u u'} \equiv M$.* Ježto u_3 jest antipol ku ${}^2A_{13}$, u'_3 antipol ku ${}^2A'_{13}$, jest i průmět o_{13} stopníka o roviny μ na ${}^2\pi$ antipolem k $\overline{u_3\, u'_3} \equiv M_3$. Stačí tedy stanoviti ke dvěma bodům roviny μ polárné prostory, v jichž průsečné rovině z M_3 (a $M_{2\infty}$) stanovíme M_1. Úhrnem tedy možno tvrditi:



Obr. 5.

Třetí průmět úběžného bodu přímky kolmé k nadprostoru jest antipolem průmětu ${}^2A_{13}$ stopy ${}^2A$ nadprostoru v ${}^2\pi$. — Jediný vrchol v konečnu charakteristického trojúhelníka úběžné roviny prostoru totálně kolmého k rovině ϱ jest antipolem třetího průmětu úběžné U^ϱ této roviny ϱ.

Stupně kolmosti i-dim. prostorů ($i = 1 \ldots 4$) jsou projednávány v každé učebnici vícedim. geom. a netřeba se o nich zmiňovati.

5. Poznavše tyto základní problémy můžeme řešiti celou řadu úloh, jež s nimi souvisí. Uvedu zde čtyři nejdůležitější a to

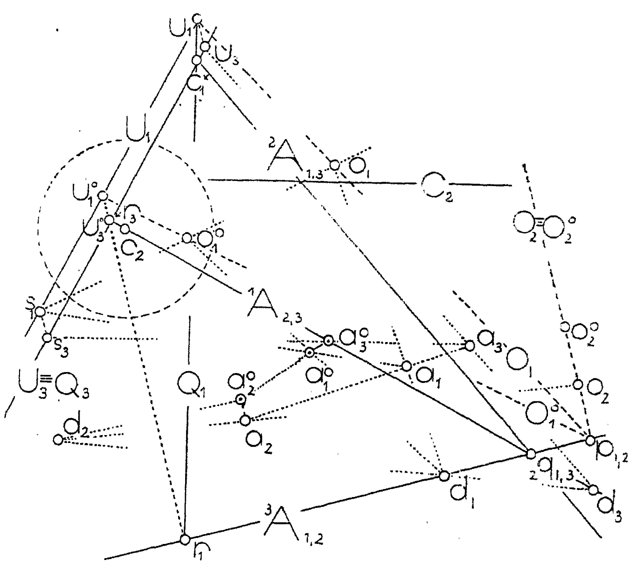
I. Souřadnicové stanovení bodu.

II. Otáčení nadprostoru.

III. Extrémní úhly dvou prostorů $\frac{1}{3}$ rovnoběžných.

IV. Transformace rovin ${}^\varkappa\pi$ ($\varkappa = 1, 2, 3$).

Souřadnicové stanovení bodu. (Obr. 5.) Rovina ${}^1\pi \equiv (C\ C')$, kde $C \parallel C'$ prochází úběžným bodem „b'" v našem prostoru. — V rovině ${}^3\pi$ zvolíme osy $X \perp Y$. Přímka $\overline{c_3\ d_3}$ (antipolára k $b'_{3\infty}$) jest prvým a třetím průmětem úběžné přímky roviny *os* V a T, a body $\delta_1 \equiv d_3$ resp. $\gamma_1 \equiv c_3$ jejich úběžníky. V prostoru $(a_2\ {}^2\pi)$ nanesu na $Z' \parallel Z$, $V' \parallel V$, $T' \parallel T$ od bodu a_2 v ${}^3\pi$ délky $\overline{a_2 b_1} = \overline{oz} = z$, $\overline{a_2 c_1} = \overline{ot} = t$, $\overline{a_2 d_1} = \overline{a_2 v} = v$, načež sestrojím první průmět „a_1" protějšího vrcholu k „a_2" v souřadnicovém rovnoběžnostěnu pro-



Obr. 6.

storu $(a_2\ {}^2\pi)$. Bod „a_1" jest prvým průmětem bodu „a". Body g_3 resp. f_3 musí ležeti na $d_3g_3 \parallel c_3f_3 \parallel a_2b_{3\infty}$. Ježto $\overline{a_2g}$ resp. $\overline{a_2f}$ protíná ${}^3\pi$, jest třetí průmět této přímky g_3 resp. f_3 ($g_3 \equiv \overline{d_3b'_{3\infty}}$. $\overline{a_2g_1}$, $f_3 \equiv \overline{c_3b'_{3\infty}}$. $\overline{a_2f_1}$). Půlící bod „s" stěnové úhlopříčny gf má $s_3 \equiv \overline{g_3f_3}$. $\overline{a_2s_1}$ a $\overline{s_3b_{3\infty}} \equiv \overline{s_3a_3}$. Pak tedy $\overline{s_3b_{3\infty}}$. $\overline{a_2a_1} \equiv a_3$. Tím získali jsme všechny tři průměty $a_1\ a_2\ a_3$ bodu a $(x\ y\ z\ t\ v)$. — Obou bodů $f_3\ g_3$ jsme k tomuto stanovení nepotřebovali. Neboť přímka $\overline{ag}$ má svůj třetí průmět $\overline{c_3\ g_3}$ a tudíž $a_3 \equiv \overline{a_2\ a_1}$ $\overline{c_3\ g_3}$ nebo $a_3 \equiv \overline{a_2\ a_1}$. $\overline{d_3 f_3}$. Toho s výhodou užijeme při úloze obrácené: *Z průmětů bodu „a" nalézti jeho pět souřadnic.* (Obr. 5.) Bodem d_3 vedeme $\overline{d_3\ b_{3\infty}} \parallel C_2$, načež $\overline{c_3\ a_3}$. $\overline{d_3\ b_{3\infty}} = g_3$, kterýž je třetím obrazem přímky $\overline{a_2 g}$. První její obraz je spojnice $a_2 g_3$ a tedy $g_1 \equiv \overline{a_2 g_3} . \overline{a_1 c_3}$. Pak tedy snadno stanovíme b_1 a po té f_1. Pomocí těchto stanovíme c_1 jakož i bod d_1 pomocí $a_2 b_1 g_1$. Ježto d_3 c_3 $b_{3\infty}$ známe, $d_2 \equiv c_2 \equiv b_2 \equiv a_2$ a d_1 c_1 b_1 jsme nalezli, snadno odměříme souřadnice z v t.

6. *Otáčení nadprostoru* $\mathbf{A} \equiv ({}^1A\ {}^2A\ {}^3A)$ *do nadprostoru* $\mathbf{A}^0 \equiv ({}^1A\ {}^3\pi)$ děje se kol společného prostoru $\mathfrak{A} \equiv ({}^1A\ {}^3A)$. Každý bod otáčí se v rovině otáčení ϱ, kolmé totálně k $\mathfrak{A}$. Úběžnou této roviny U stanovíme následním způsobem:[14] (Obr. 6.) U_3 jest antipolárou bodu q_{123} (odst. 3 konec). V nadprostoru $\mathbf{A}^0$ stanovíme známým způsobem úběžný bod u^0 kolmice ku $\mathfrak{A}$ $[(\overline{u_1{}^0 u_3{}^0} . \overline{u_3{}^0 r_1}) \equiv -u^0_{\overset{2}{1\pi}} u_3{}^0]$. Antipol k ${}^1A$ jest pak dalším bodem u^* úběžné $U \equiv u^0 u^*$, neboť jest to úběžný bod kolmice k nadprostoru $\mathbf{A}^0$. (Zde tedy $U_1 \parallel U_3$ a $U_{2\infty}$ je bod ve směru $\overline{u_1{}^0 u_3{}^0} \perp {}^3A_{12}$.) Každý bod „$a$" při otáčení do polohy „a^0" pohybuje se v rovině (aU), která protíná $\mathbf{A}^0$ v přímce $\overline{a^0u^0}$ a $\mathbf{A}$ v přímce $\overline{au}$, kde bod „u" $\equiv (U . \mathbf{A})$. Najdeme ho takto: V $\mathbf{A}$ zvolíme takovou úběžnou Q, aby $Q_{2\infty} \equiv U_{2\infty}$, $Q_3 \equiv U_3$. Pak obě přímky se protínají v hledaném bodě „u". Obdržíme bod r_3 na ${}^1A_{33}$, r_1 na ${}^3A_{12}$ (odst. 13.) a bod $c_1{}^* \equiv c_3{}^* \equiv (Q_3\ {}^2A_{13})$ (neboť Q protíná ${}^2\pi$). Pak $\overline{c_1{}^* r_1} \equiv Q_1$ $\overline{c_3{}^* r_3} \equiv Q_3$ a $u_1 \equiv (Q_1 . U_1)$, z kteréhož na U_3 odvodíme u_3. —

Přímky $\overline{au}$ a a^0u^0 protínají se v bodě d', který jsa v $\mathfrak{A}$, jest centrem otáčení pro bod „a". I jsou přímky $\overline{aa^0}$ všech bodů „a" nadprostoru $\mathbf{A}$ v rovinách ϱ vzájemně rovnoběžny a tudíž prvé průměty $\overline{a_1a_1{}^0}$ protínají se v témž bodě „s"$_1$ na U_1. Libovolná přímka $A \equiv \overline{ab}$ v $\mathbf{A}$ protne $\mathfrak{A}$ v bodě „d", který při otáčení do polohy $A^0 \equiv \overline{a^0b^0}$ zůstane pevný. Ježto ${}^3A_1$ jest prvým průmětem $\mathfrak{A}_1$ padne d_1 na $\mathfrak{A}_1 \equiv {}^3A_1$ a tudíž $\overline{a_1{}^0b_1{}^0}$ a a_1b_1 protínají se na ${}^3A_1$ v bodě d_1:

pole $\mathbf{A}_1$ *a* $\mathbf{A}_1{}^0$ *jsou centricky kolineární. Středem kolineace je určitý bod* s_1 *na* U_1, *osou kolineace přímka* ${}^3A_{12}$.

— Ježto $\overline{aa^0}$ protíná U v bodě s, musí spojnice $a_3a_3{}^0$ procházeti bodem s_3 a $a_3{}^0$ padne do ${}^1A_{23}$:

Body $a_3{}^0$ *obdržím v průsečících paprsků* $\overline{s_3a_3}$ *a přímky* ${}^1A_{23}$. — *Body* a_2 *a* „$a^0{}_2$" *leží — jak je zřejmo — na kolmicích k* ${}^3A_{12}$.

— Nejkratší konstrukce bodu s_1 je tato: Z libovolného bodu „p" na ${}^3A$ nanesu na $\overline{pu}$ resp. $\overline{pu^0}$ délky $\overline{po} = \overline{po^0}$ jinak libovolné. Pak ovšem musí $o_1o_1{}^0$ procházeti bodem $s_1 \equiv o_1o_1{}^0 . U_1$. Z bodu s_1 odvodím s_3 na U_3. — Mám-li nyní otáčeti bod „a" do „a^0" odvodím $a_3{}^0 \equiv \overline{s_3 a_3} . {}^1A_{23}$, $a_1{}^0$ pomocí a_1 $(\overline{a_1o_1} . {}^3A \equiv d_1$;

[14]) ${}^1\pi \equiv (c\ C)$.

$a_1{}^0 \equiv \overline{o_1{}^0 d_1} \,.\, \overline{s_1 a_1}$, načež $a_2{}^0 \equiv \overline{a_1{}^0\, a_3{}^0} \,.\, \overline{a_2\, a_2{}^0}(\perp {}^3A_{12}.)$ — Je-li správně rýsováno, musí $d_2 \equiv \overline{a_2\, o_2} \,.\, \overline{a_2{}^0\, o_2{}^0}$, $d_3 \equiv \overline{a_3\, o_3} \,.\, \overline{a_3{}^0\, o_3{}^0}$ [15]) ležeti s „d_1“ na téže přímce. —

Při úloze obrácené odvodíme nejprve „a_1“ z $a_1{}^0$, načež na přímce $\overline{sa^0}$ stanovíme z daného „a_1“ body „a_2“ a „a_3“. Pro konstruktivní účely je výhodné znáti rovinu π, která při otáčení padne do ${}^3\pi$. Musí to býti taková rovina, u níž právě vylíčenou konstrukcí nelze při otáčení stanoviti třetí průmět; tedy její třetí průmět musí býti bod s_3. Stopou je přímka ${}^3A_{12}$ a tudíž prvý průmět její úběžné U^π bude $U_1{}^\pi \parallel {}^3A_{12}$ a třetí $s_3 \equiv U_3{}^\pi$, dle čehož přímku tu snadno nalezneme. (Zarýsována není.)

7. *Extremní úhly dvou prostorů* $\mathfrak{P}$ *a* $\mathfrak{P}^*$. Ježto úhel (resp. extremní úhly) ostatních lineárních útvarů v pětirozměrném prostoru neskytají obtíží, nebo se řeší dle kap. I., zmiňuji se jen o úloze nahoře vytčené. — Z libovolného středu „s“ na průsečnici X obou prostorů opišme kouli v prostoru $\mathfrak{P}$. Dá se snadno dokázati, že její pravoúhlý průmět do $\mathfrak{P}^*$ jest trojosý elipsoid, který se s koulí protíná v koncových bodech nejdelší osy na X. Průměty A^* B^* dvou kolmých průměrů koule A, B jsou sdruženými průměry elipsoidu. Úhly přímek $\widehat{A\,A^*}$ resp. $\widehat{B\,B^*}$ jsou úhly prostorů. Existuje ∞^2 úhlů prostorů $\mathfrak{P}$ a $\mathfrak{P}^*$. Je zřejmo, že takové úhly budou extrémní, jichž rameno-průměr elipsoidu má extremní délku. Tento případ nastává u os elipsoidu:

theoreticky existují tři extremní úhly dvou $\frac{1}{3}$ *rovnoběžných prostorů, z nichž jeden* $\widehat{XX^*}$ *je vždy roven nule.*

Jsou-li osy ellipsoidu X^*, Y^* a Z^*, jsou roviny $(YY^*) \equiv \eta$, $(ZZ^*) \equiv \zeta$ polokolmy (stereometricky) k rovinám (YZ) a (Y^*Z^*)[16]) a tudíž také k $\mathfrak{P}$ a $\mathfrak{P}^*$.

roviny η *a* ζ *zbývajících extremních úhlů jsou polorovnoběžné a polokolmé k oběma prostorům.*

Nazvu-li úběžnou rovinu prostoru $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}^*}$ $\genfrac{}{}{0pt}{}{\pi}{\pi^*}$ a její poláru $\genfrac{}{}{0pt}{}{U}{V}$, úběžnou přímku roviny $\genfrac{}{}{0pt}{}{\zeta}{\eta}$ $\genfrac{}{}{0pt}{}{A}{B}$, najdu tyto jakožto příčky úběžných útvarů $(U\ V\ \pi\ \pi^*)$. Řešení:

Prostor určený mimoběžkami $(U\ V)$ protíná $\genfrac{}{}{0pt}{}{\pi}{\pi^*}$ v přímce $\genfrac{}{}{0pt}{}{O}{Q}$ (ježto útvary U, V, π, π^* jsou v témž nadprostoru). Příčky mimo-

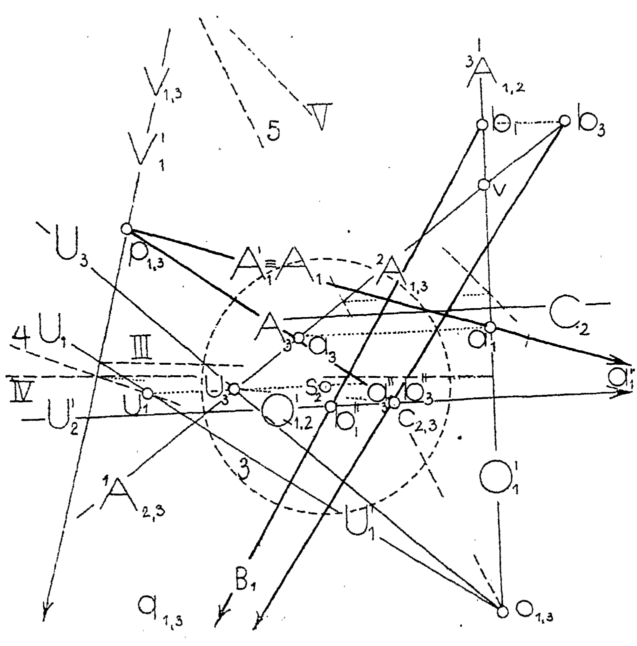
[15]) $u_3 \equiv O_3 \equiv o_3$, $u_3{}^0 \equiv O_3{}^0 \equiv o_3{}^0$.

[16]) Kap. I.

běžek U, V, O, Q jsou hledané $A\ B$. Přímky (U, O) (V, Q) jsou polárami a tudíž i (A, B):

roviny ξ η jsou vzájemně totálně kolmé.

(Obr. 7.) Rovina ${}^1\pi$ budiž dána středem „s“ kružnice ${}^1O$ a přímkou C. Prostor $\mathfrak{P}$ nechť je dán mimoběžkami $({}^1A\ {}^3A)$, prostor $\mathfrak{P}^*$ bodem „c“ v ${}^1\pi$ a rovinou ${}^3\pi$. Pak polára U stanoví se jako U na tabulce předcházející.[17]) Polára V musí ležeti v rovině ${}^2\pi$ a tudíž $V_1 \equiv V_3$



Obr. 7.

je antipolárou bodu $\mathfrak{P}_3^* \equiv c_2$. Útvary U, V, π, π^* promítnu z „c“ do nadprostoru $({}^1A\,{}^3\pi) \equiv \mathbf{A}'$. (§ 1. odst. 17.) Průsečný prostor $\mathfrak{U} \equiv ({}^2\mathbf{U}\ \mathbf{A}')$. Zůstane tedy rovina $\pi \equiv \pi'$ při promítání nezměněná (neboť je v nadprostoru $\mathbf{A}'$ i ${}^2\mathbf{U}$) a jest tedy $\pi_1' \equiv {}^3A_1$ (kap. I.). Rovinu π^* promítnu do průsečné roviny prostorů $(c\ \pi^*) \equiv (c\ {}^3\pi)$ a nadprostoru $({}^1A\,{}^3\pi)$. *Promítá se tedy π^* do ${}^3\pi \equiv \pi^{*\prime}$.* Při promítání přímky U do U' bod $u \equiv (\mathbf{A}'U) \equiv (\mathfrak{U}U)$ zůstane pevný. $U_1 \equiv U'_1$, $U'_3 \equiv {}^1A_{23}$, a $U'_2 \perp {}^3A_{12}$ (t. j. rovnoběžně se směrem $U_{2\infty}$) bodem c_2. Dále $V_1 \equiv V'_1$, $V'_3 \equiv {}^1A_{23}$, a $V'_2 \equiv c_2$. — Průsečná přímka Q' prostoru $(U'\ V')$ s ${}^3\pi \equiv \pi^*$, jest stopou tohoto prostoru a promítá

[17]) Náhodou padne o_{13} na ${}^3A_{12}$ a tedy u_3 v o_{13} je polární trojúhelník ${}^1O_2{}^i$.

se do $U'_2 \equiv Q'_{12}$. U'_2 jest totiž druhým průmětem přímky U' a nalézá se na ní též druhý průmět mimoběžky V', která s U' určuje prostor $(U'\ V')$. Průsečná O' tohoto prostoru s $\pi \equiv \pi'$ má $O_1 \equiv \pi_1 \equiv {}^2A_1$, $O_{2\infty}$ je úběžný bod na U'_2 a $O_3 \equiv {}^1A_3$. — Hyperboloidy určené mimoběžkami $(Q'\ V'\ U')$ resp. $(Q'\ V'\ O')$ mají ještě dvě (hledané) příčky (druhé osnovy) $A'\ B'$ společné. A_1 a B_1 jsou další společné tečny obrysových kuželoseček obou hyperboloidů. Průměty površek hyp. $(Q'\ V'\ U')$, (kteréž protínají Q' a tedy ${}^3\pi$) jsou tečnami k obrysu tohoto hyperboloidu a značím je arabskými ciframi. Dle kap. I. k bodu (libovolnému) u_3 stanovím na $\overline{U'_1\ V'_1}$ body ${}^{u'}u_1\ {}^{v'}u_1$ $({}^{u'}u_1 \equiv u_1,\ \overline{c_2u_3}\ .\ V'_1 \equiv {}^{v'}u_1,)$ načež $4 \equiv \overline{{}^{u'}u_1\ {}^{v'}u_1}$ je průmětem určité površky, protínající ${}^3\pi \equiv \pi^*$ v bodě přímky Q. — Ježto $o_1 \equiv o'_1$, $o'_2 \equiv c_2$, $o'_3 \equiv {}^1A_3\,.\,\overline{c_2\,o_{13}}$, jest k bodu o'_3 tečna příslušná $5 \equiv \overline{c_2\,o_{13}}$. — Podobně stanovíme tečny IV, V k obrysu druhého hyperboloidu a k $U'_1 \equiv 3$ tečnu III. příslušnou. Lehko nyní najdeme $A_1\ B_1$. Ježto A, B protínají V, musí se $A_1 \equiv A'_1$ a A'_3 resp. $B_1 \equiv B'_1$ a B_3 protínati na V_1 v bodech p_{13} resp. q_{13} a tudíž $A_{2\infty}$ resp. $B_{2\infty}$ je bodem. Průsečíky přímek $a \equiv \overline{(A'\ O')}$ resp. $b \equiv (B'\ O')$ při promítání zůstanou pevny, tudíž $A_3 \equiv \overline{p_3\,a_3}, B_3 \equiv \overline{q_3 b^3}$.[18]) Extremní úhly jsou pak směry $a''_\infty \equiv (A\ .\ Q)$ $a_\infty \equiv (A\ O)$ resp. $b''_\infty \equiv (B\,Q)$ $b_\infty \equiv (B\,O)$ určeny, při čemž body $a''\ b''$ — v prostoru $(c\,{}^3\pi)$ — mají $a''_3 \equiv b''_3 \equiv c_2$. Další — zde již neprovedená — konstrukce neskytá obtíží.

8. *Zvláštní případy extrémních úhlů dvou prostorů* uvedeny jsou téměř ve všech učebnicích vícedim. geom. a pro stručnost se o nich nezmiňuji.

Transformace.

I. roviny ${}^1\pi$. Budiž dána rovina ${}^1\pi'$, z které máme promítati, příkladně bod „a“. Prostor $(a\,{}^1\pi')$ protne ${}^3\pi$ v bodě a'_1. Dále $a'_2 \equiv a_2$. Přímka $\overline{a'_1 a} \equiv A$ má $A_1 \equiv \overline{a_1 a'_1}$, $A_2 \equiv \overline{a_2\,a'_1}$, $A_3 \equiv a_3$. (Neboť všechny útvary v $(a\,{}^3\pi)$ promítají se z ${}^3\pi$ do $a_{{}^1\pi}$ na ${}^1\pi$.) Průsečík $a'_{{}^1\pi} \equiv (A\ {}^1\pi')$ stanovíme dle odstavce 6 § 1. Načež druhý průmět $(a'_{{}^1\pi})_2 \equiv a'_3$. I máme a'_1 prvý, $a_2 \equiv a'_2$ druhý, $(a'_{{}^1\pi})_2$ třetí průmět bodu „a“ v nové soustavě $({}^3\pi\ {}^1\pi'\ {}^2\pi)$. Transformaci tuto možno provésti i když ${}^1\pi$ nehoví podmínkám v odstavci 1. § 1. uvedeným.

II. roviny ${}^3\pi$, což jest v podstatě transformace roviny ${}^2\pi$. Máme-li promítati do roviny ${}^3\pi'$, stanovíme průsečík a^I prostoru $(a^1\pi)$ s ${}^3\pi'$. $(a_1{}^I \equiv a_1$ je prvý, $a_2{}^I$ druhý a $a_3{}^I$ třetí průmět bodu $a^I)$. Pak stanovíme průsečík a^{II} prostoru $(a\,{}^2\pi')$ (${}^2\pi'$ jest rovina příslušná k ${}^3\pi'$) s rovinou ${}^3\pi'$ $(a_1{}^{II},\ a_2{}^{II} \mp a_2,\ a_3{}^{II})$. Průsečík $a'_{{}^1\pi}$ přímky $\overline{aa^I}$ s rovinou ${}^1\pi$ promítneme z ${}^2\pi'$ do a^{III} na ${}^3\pi'$ $(a_1{}^{III},\ a_2{}^{III}\ a_3{}^{III} \mp a_3)$.

[18]) Ovšem že A_3, B_3 musí procházeti bodem c_{32}, neboť musí protínati Q v prostoru $(c\pi)$.

Pak (dle kap. I. § 2. odst. 8.) stanovíme pravou podobu roviny ${}^3\pi'$ a získáme z bodů $[a_1^I\ a_2^I\ a_3^I]$[19]) bod $[a'_1]$.[20]) Dle prvého dílu tohoto odstavce transformujeme pak soustavu $({}^3\pi'\ {}^1\pi\ {}^2\pi')$ do soustavy $({}^3\pi'\ {}^1\pi'\ {}^2\pi')$, kde ${}^1\pi'$ hoví vůči ${}^3\pi'$ podmínkám odst. 1. § 1.

*

Projection d'un plan sur un plan dans l'espace à cinq dimensions.

(Extrait de l'article précédent.)

Supposons donnés, dans l'espace à cinq dimensions, deux plans ${}^1\pi$ et ${}^3\pi$, n'ayant pas de point commun, et construisons le plan fuyant ${}^2\pi$ de l'espace[21]) totalement perpendiculaire à ${}^3\pi$. Le point d'intersection a_1 (a_2) de l'espace $(a{}^1\pi)$ $[(a{}^2\pi)]$ et du plan ${}^3\pi$ s'appelle première (deuxième) projection d'un point „a“. Pour déterminer le plan ${}^1\pi$ (donné par les deuxièmes projections C_2 et C'_2 de deux parallèles C et C' dans ${}^1\pi$ - avec deux hyperboles de distance appartenant à C et C') on fait les deux suppositions suivantes: 1. Le plan ${}^1\pi$ est demiparallèle à l'espace ordinaire. 2. Les angles extrêmes α et β des plans ${}^3\pi$ et ${}^1\pi$ ont la valeur $\alpha = \beta = 45^0$. — L'espace $(a{}^3\pi)$ coupe le plan ${}^1\pi$ au point $a_{1\pi}$, la deuxième projection $(a_{1\pi})_2$ duquel s'appelle „troisième projection“ du point a. On obtient le même point „$a_{1\pi}$“ en trouvant le point d'intersection de la droite $\overline{a_1 a}$ et du plan ${}^1\pi$. Donc: *Toutes les trois projections d'un même point sont situées sur la même droite.* — Il y a trois hyperespaces ayant des positions singulières ${}^1U \equiv ({}^1\pi\ U^{3\pi})$, ${}^2\mathrm{U} \equiv ({}^2\pi\ U^{1\pi}) \equiv ({}^2\pi\ U^{3\pi})$, *et* ${}^3\mathrm{U} = ({}^3\pi\ U^{1\pi})$ (les droites $U^{3\pi}$, $U^{1\pi}$ étant les droites fuyantes des plans ${}^3\pi$ et ${}^1\pi$). Je les appelle: hyperespace de la première, deuxième, troisième espèce. La [première][22]) projection de chaque figure dans $[{}^1\mathrm{U}]$ se trouve à l'infini. *La droite A* et le plan $[{}^1\pi]$ déterminent l'hyperespace: *La [première] projection de la droite A est une droite A_1.* En considérant la droite $A_{1\pi} \equiv (A\,{}^3\pi)\ {}^1\pi$ on arrive au problème — traité dans l'article de l'auter „La projection d'un droite sur un plan dans l'espace à quatre dimensions.“ T. LI., — de la projection dans l'hyperespace $(A_{1\pi}\ {}^3\pi)$, prenant la droite A comme axe de projection; on peut appliquer, directement, les résultats de ce travail aux considérations actuelles. Le point d'intersection $[{}^1u] \equiv (A\ [{}^1\mathrm{U}])$ s'appelle point de fuite de la [première] espèce. —

[19]) [ ] vztahuje se jen na římské indexové číslice.

[20]) [ ] vztahuje se jen na arabské indexové číslice.

[21]) J'appelle tout court l'espace linéaire à trois (quatre) dimensions espace (hyperespace).

[22]) [ ] signifie que le théorème en question est valable pour tous les trois éléments que l'on obtient à l'aide de la permutation cyclique du mot ou de la lettre en paranthèses.

Le plan ϱ. On démontre que les projections ϱ_1 ϱ_2 ϱ_3 du système de points du plan ϱ sont liées par des homographies $\varrho_1 \overline{\overline{\wedge}}\, \varrho_2 \overline{\overline{\wedge}}\, \varrho_3$ ayant toutes les mêmes points unis, qui forment *le triangle caractéristique* du plan ϱ. *Ses trois côtés touchent toutes les coniques appartenant aux diverses droites situées dans le plan* ϱ. Chaque plan coupe l'hyperespace [^{1}**U**] suivant la droite fuyante de la [première] espèce [^1U]. — *L'espace* coupe le plan [$^1\pi$] au point [^1a] dont la projection [$^1a_{23}$] est l'unique sommet, non situé à l'infini du triangle caractéristique du plan fuyant de la [première] espèce. Chaque espace qui n'est pas situé à l'infini contient une droite fuyante qui est, à la fois, de la première, de la deuxième et de la troisième espèce. — *L'hyperespace A* coupe le plan [$^1\pi$] suivant une droite [^1A]. Les projections $^1A_{23}$, $^2A_{13}$, $^3A_{12}$ ont un même point commun: $q_{1,2,3}$. On construit, dans l'espace fuyant de la [première] espèce deux plans. En joignant les deux sommets, non situés à l'infini, des triangles caractéristiques, on obtient [$^1A_{23}$]. Pour faciliter la solution de problèmes non métriques dans un même hyperespace, on applique *une méthode de projection de cet hyperespace* **A** *sur l'hyperespace* **A**$' \equiv {}^1A\ {}^3\pi$, *le point „c" étant centre de projection* (donnée au chap. I.).

2. Deux espaces à d dimensions ($d < 5$) sont perpendiculaires, si leurs espaces de fuite sont polaires par rapport à l'espace sphérique absolu à trois dimensions. Cet espace sphérique coupe $^2\pi$ suivant une circonférence $^2O^i$ dont la représentation réelle soit ^2O. On a quatre problèmes principaux à résoudre dans ^{2}**U**: 1. Trouver l'espace $\mathfrak{U}$ polaire à un point donné „u". 2. „$\mathfrak{U}$" étant donné, trouver son pôle „u". 3. Déterminer le plan μ polaire à la droite donnée U. 4. Trouver la droite U polaire au plan donné μ.

On démontre facilement le théorème suivant: *La troisième projection u_3 du pôle „u" est l'antipôle de la droite $^2A_{13}$ de son espace polaire $\mathfrak{U}$ par rapport à $^2O_1$. La projection $^2o_{13}$ du point commun „o" des plans μ et $^2\pi$ est l'antipôle de la troisième projection U_3 de la droite polaire U par rapport à* $^2O_1$.

En se servant de ce théorème, on peut résoudre beaucoup de problèmes; citons en les quatre principaux:

1. Trouver les projections du point „a" dont on connaît les coordonnées x_a, y_a, z_a, t_a, v_a. 2. Faire tourner l'hyperespace **A** autour de l'espace ($^1A\ {}^3A$) dans la position $A^0 \equiv$ (^{1}**A** $^3\pi$). 3. Trouver les angles extrêmes de deux espaces 1/3 parallèles. 4. Transformer, respectivement, les plans $^1\pi$ et $^3\pi$.

---

[23]) Cela veut dire que ^2U ($^2U^x$) possède un point (de fuite) commun à l'infini avec [$^3\pi$; $^1\pi$].