Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička

O základních vlastnostech determinantů mocninných a jich upotřebení v theorii rovnic algebraických

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 26 (1897), No. 2-3, 105--120

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121619`

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1897

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

$$a = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$
$$a^2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1,$$

značí-li tré kořenů předložené rovnice kubické

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3.$$

A tu vede koëxistence dvou těchto podmínek k relaci snadno odvoditelné

$$a^2 = -\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2,$$

jíž patrně vyhověti lze pouze čísly rázu soujemného; a poněvadž koëfficienty rovnice předložené jsou čísla rázu reálního, nutno, aby *dva* z těchto kořenů měly ráz soujemný a sdružený, tedy bylo na př.

$$\alpha_1 = p + qi,$$
$$\alpha_2 = p - qi,$$

načež pak vyplyne relace

$$a^2 = 2(q^2 - p^2) - \alpha_3^2$$

čísly realními, jakož patrno, snadno splnitelná.

O základních vlastnostech determinantů mocninných a jich upotřebení v theorii rovnic algebraických.

Napsal*)

prof. dr. F. J. Studnička.

I.

Sestavíme-li z n různých prvků

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

n řad po sobě jdoucích mocnin

*) Poprvé částečně uveřejněno ve „Zpráv. kr. č. spol. nauk" r. 1896.

$$a_k^{n-1},\quad a_k^{n-2},\ \ldots,\ a_k^1,\ a_k^0,\quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

sluje determinant z těchto řad sestavený, totiž

$$\begin{vmatrix} a_1^{n-1}, & a_1^{n-2}, & a_1^{n-3}, & \ldots, & a_1^0 \\ a_2^{n-1}, & a_2^{n-2}, & a_2^{n-3}, & \ldots, & a_2^0 \\ a_3^{n-1}, & a_3^{n-2}, & a_3^{n-3}, & \ldots, & a_3^0 \\ \vdots & & & & \\ a_n^{n-1}, & a_n^{n-2}, & a_n^{n-3}, & \ldots, & a_n^0 \end{vmatrix} = \delta, \qquad (1)$$

s nímž se *Cayley* *) poprvé zanášel, dle mého návrhu determinantem *mocninným* (Potenzdeterminante).

Hodnotu jeho možná velmi snadno stanoviti, jelikož vyjadřuje se alternujícím součinem **)

$$\begin{aligned} &(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)\ldots(a_1 - a_n) \\ &\qquad \times (a_2 - a_3)(a_2 - a_4)\ldots(a_2 - a_n) \\ &\qquad\qquad \times (a_3 - a_4)\ldots(a_3 - a_n) \\ &\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \\ &\qquad\qquad\qquad \times (a_{n-1} - a_n), \end{aligned}$$

jakož i naopak možná střídavý součin tento zvoliti za východisko k odvození pojmu determinantního, což i *Cauchy* ***) a po něm jiní učinili.

Zvětšíme-li tu mocnitele prvního sloupce o 1,†) vznikne arci determinant nový δ_1, jehož však hodnota rovnati se bude hodnotě původní δ, znásobené součtem kombinací všech prvků třídy *prvé*, takže tu platí

$$\delta_1 = \delta\,(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n).$$

---

*) „A memoir on the symmetric function", London, 1857.

**) Viz *Studnička* „O determinantech" pag. 12.

***) Viz *Studnička* „A. Cauchy als formaler Begründer der Determinantentheorie", 1876, pag. 32.

†) Kdybychom tak učinili u jiného sloupce, annulloval by se identicky determinant příslušný.

Abychom pak mohli ještě kratčeji tuto relaci vyjádřiti, zaveďme za součet kombinací třídy

$$1., 2., 3., \ldots, k\text{-té}$$

neboli za součty symbolicky vyjádřené znakem

$$\Sigma C_n^1,\ \Sigma C_n^2,\ \Sigma C_n^3,\ \ldots,\ \Sigma C_n^k$$

označení co možná nejkratší, totiž

$$K_1,\ K_2,\ K_3,\ \ldots,\ K_k,$$

takže tu bude pro součet všech kombinací k-té třídy

$$\Sigma C_n^k \equiv K_n^k \equiv a_1 a_2 \ldots a_k + \ldots + a_{n-k+1} \ldots a_{n-1} a_n, \tag{2}$$

načež vytčená dříve relace bude zníti

$$\left(a_1^n\, a_2^{n-2} a_3^{n-3} \ldots a_n^0\right) \equiv \delta_1 = \delta \,.\, K_1, \tag{3}$$

zavedeme-li *Binetovo* jednoduché označování determinantů příslušnou diagonálou prvkovou do závorek vloženou i do pojednání tohoto.

Správnost vzorce (3) možná dovoditi spůsobem všelijakým, nejelementárněji postupným snižováním stupně determinantního podle známé formule transformační,*) jako na př.

$$\begin{vmatrix} 1, & a, & a^3 \\ 1, & b, & b^3 \\ 1, & c, & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a, & b^3-a^3 \\ c-a, & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1, & b^2+ba+a^2 \\ 1, & c^2+ca+a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\left[c^2-b^2+a(c-b)\right]$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)(c+b+a).$$

Zvětší-li se tu mocnitel i prvního i druhého sloupce, promění se mocninný determinaut δ v jiný, δ_2 zvaný, o němž pak platí relace

*) Viz *Studnička* „Über eine neue Determinantentransformation“, Sitzb d. k. böhm. Ges. d. Wis. 1879.

$$\left(a_1^n\, a_2^{n-1}\, a_3^{n-3} \ldots a_n^0\right) \equiv \delta_2 = \delta \,.\, K_2 \,, \tag{4}$$

z čehož patrno, že hodnota změněného takto determinantu se rovná součinu determinantu původního se součtem kombinací všech prvků třídy druhé, což i týmže spůsobem verifikovati možná, jako prvé.

Značí-li pak δ_3 mocninný determinant, an povstal z δ tím, že mocnitelové prvních tří sloupců byli o jednotku zvýšeni, bude podobně

$$\left(a_1^n\, a_2^{n-1} a_3^{n}\, {}^2 a_4^{n-4} \ldots a_n^0\right) \equiv \delta_3 = \delta \,.\, K_3 \,, \tag{5}$$

a podlé toho všeobecně, zvýší-li se o 1 mocnitel u prvků prvních k-sloupců,

$$\left(a_1^n\, a_2^{n-1} \ldots a_k^{n-k+1}\; a_k^{n-k-1} \ldots a_n^0\right) \equiv \delta_k = \delta \,.\, K_k \,, \tag{6}$$

z čehož konečně i plyne pro

$$k = n \,,$$

kdež tedy všichni mocnitelové jsou o 1 zvýšeni,

$$\delta_n = \delta \,.\, K_n \,, \tag{7}$$

což arci jest přímo evidentní, poněvadž

$$K_n = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \,,$$

v determinantu δ_n pak možná pro každý řádek stanoviti společný faktor, takže

$$\left(a_1^n\, a_2^{n-1} \ldots a_n^1\right) = \left(a_1^{n-1} a_2^{n-2} \ldots a_n^0\right) a_1 a_2 \ldots a_n \,.$$

Jdeme-li podobným postupem k dalším determinantům mocninným, kdež rozdíl mocnitelů prvních dvou sloupců jest větší nežli 1, obdržíme především, vyjadřuje-li rozdíl tento 3,

$$\left(a_1^{n+1} a_2^{n-2} a_2^{n-3} \ldots a_n^0\right) = \delta \,.\begin{vmatrix} K_1 \,, & K_2 \\ 1 \,, & K_1 \end{vmatrix} , \tag{8}$$

tak že podlé toho na př. platí

$$\begin{vmatrix} 1, & x, & x^4 \\ 1, & y, & y^4 \\ 1, & z, & z^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & x, & x^2 \\ 1, & y, & y^2 \\ 1, & z, & z^2 \end{vmatrix} \cdot \left(K_1^2 - K_2\right),$$

kdež patrně má význam

$$K_1 \equiv x + y + z,$$
$$K_2 \equiv xy + xz + yz;$$

anebo v případě složitějším

$$\begin{vmatrix} 1, & x, & x^2, & x^5 \\ 1, & y, & y^2, & y^5 \\ 1, & z, & z^2, & z^5 \\ 1. & u, & u^2, & u^5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & x, & x^2, & x^3 \\ 1, & y, & y^2, & y^3 \\ 1, & z, & z^2, & z^3 \\ 1, & u, & u^2, & u^3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} K_1, & K_2 \\ 1, & K_1 \end{vmatrix},$$

kdež tedy obdobně platí

$$K_1 \equiv x + y + z + u,$$
$$K_2 \equiv xy + xz + \ldots + zu.$$

Vyjadřuje-li rozdíl tento 4, bude podobně

$$\left(a_n^{n+2} a_{n-1}^{n-2} a_{n-2}^{n-3} \ldots a_n^0\right) = \delta \begin{vmatrix} K_1, & K_2, & K_3, \\ 1, & K_1, & K_2, \\ 0, & 1, & K_1, \end{vmatrix}, \qquad (9)$$

takže podlé tohoto vzorce na př. platí

$$\begin{vmatrix} 1, & x, & x^5 \\ 1, & y, & y^5 \\ 1, & z, & z^5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & x, & x^2 \\ 1, & y, & y^2 \\ 1, & z, & z^2 \end{vmatrix} \cdot \left[K_1^3 - 2K_1K_2 + K_3\right],$$

kdež patrně jest

$$K_3 \equiv xyz.$$

Abychom pak dovedli pro větší rozdíl mocnitelů prvních dvou sloupců pohodlněji vyjádřiti příslušnou vlastnost těchto determinantů mocninných, zaveďme k označení nových zde vystupujících derminanantů *kombinačních* neboli *sestavných* *)

*) Očekávám, že toto mé pojmenování, jsouc zcela případné, bude obecně přijato.

symbol $\varDelta$, kladouce

$$\varDelta_m = \begin{vmatrix} K_1, & K_2, & K_3, & \ldots, & K_m \\ 1, & K_1, & K_2, & \ldots, & K_{m-1} \\ 0, & 1, & K_1, & \ldots, & K_{m-2} \\ \vdots & & & & \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & K_1 \end{vmatrix}, \tag{10}$$

načež obdržíme pro rozdíl k jednotek obnášející

$$\left(a_1^{n+k-2} a_2^{n-2} a_3^{n-3} \ldots a_n^0\right) = \delta \, . \, \varDelta_{k-1}, \tag{11}$$

při čemž arci uvážiti sluší, že kombinace třídy vyšší, nežli jest počet kombinovaných prvků, v příslušném determinantu kombinačním představují se nullou, takže

$$K_{n+h} \equiv \Sigma C_n^{n+h} = 0, \quad (h = 1, 2, 3 \ldots).$$

Další případ poskytuje nám determinant mocninný, kde jsou zvýšeni mocnitelové prvních dvou sloupců o libovolný počet jednotek, takže vyhovuje-li se podmínce

$$k > m - 1,$$

obecný tvar pak jest

$$\begin{vmatrix} a_1^{n+k}, & a_1^{n+m}, & a_1^{n-3}, & \ldots, & a_1^0 \\ a_2^{n+k}, & a_2^{n+m}, & a_2^{n-3}, & \ldots, & a_2^0 \\ a_3^{n+k}, & a_3^{n+m}, & a_3^{n-3}, & \ldots, & a_3^0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^{n+k}, & a_n^{n+m}, & a_n^{n-3}, & \ldots, & a_n^0 \end{vmatrix} = \delta_n^{k,m}; \tag{12}$$

mocnitel prvního sloupce zvýšen o $k + 1$, druhého pak o $m + 2$. A tu platí opět pravidlo, že hodnota determinantu (12) rovná se determinantu původnímu (1), znásobenému příslušným determinantem kombinačním, an tu podlé *Bineta* má označení

$$\varDelta_{n-k+1}^{k-1} = \left(\underbrace{K_2 K_2 \ldots K_2}_{k-1} \; \underbrace{K_1 K_1 \ldots K_1}_{n-k+1}\right), \tag{13}$$

při čemž arci nutno míti na zřeteli, že řádky jeho skládají se z n členů řady

$$\mathrm{K}_0 = 1,\ \mathrm{K}_1,\ \mathrm{K}_2,\ \mathrm{K}_3,\ \ldots,\ \mathrm{K}_n,\ \mathrm{K}_{n+1},\ \ldots,$$

takže na místo prvku diagonálního připadá, co vzorcem (13) jest naznačeno.

Podlé toho jest na př.

$$\begin{vmatrix} 1, & x^k, & x^{k+n} \\ 1, & y^k, & y^{k+n} \\ 1, & z^k, & z^{k+n} \end{vmatrix} = \delta \,.\, \delta^1_{k+n-2}, \tag{14}$$

z čehož plyne pro $k = 2$, $n = 2$

$$\begin{vmatrix} 1, & x^2, & x^4 \\ 1, & y^2, & y^4 \\ 1, & z^2, & z^4 \end{vmatrix} = \delta \,.\, \begin{vmatrix} \mathrm{K}_2, & \mathrm{K}_3 \\ 1, & \mathrm{K}_1 \end{vmatrix}$$

pro $k = 2$, $n = 3$

$$\begin{vmatrix} 1, & x^2, & x^5 \\ 1, & y^2, & y^5 \\ 1, & z_2, & z_5 \end{vmatrix} = \delta \,.\, \begin{vmatrix} \mathrm{K}_2, & \mathrm{K}_3, & 0 \\ 1, & \mathrm{K}_1, & \mathrm{K}_2 \\ 0, & 1, & \mathrm{K}_1 \end{vmatrix} \quad \text{atd.,}$$

kdežto pro $k = 3$, $n = 4$ se obdrží

$$\begin{vmatrix} 1, & x^3, & x^4 \\ 1, & y^3, & y^4 \\ 1, & z^3, & z^4 \end{vmatrix} = \delta . \begin{vmatrix} \mathrm{K}_2, & \mathrm{K}_3 \\ \mathrm{K}_1, & \mathrm{K}_2 \end{vmatrix}$$

a pro $k = 3$, $n = 2$ vznikne relace

$$\begin{vmatrix} 1, & x^3, & x^5 \\ 1, & y^3, & y^5 \\ 1, & z^3, & z^5 \end{vmatrix} = \delta \,.\, \begin{vmatrix} \mathrm{K}_2, & \mathrm{K}_3, & 0 \\ \mathrm{K}_1, & \mathrm{K}_2, & \mathrm{K}_3 \\ 0, & 1, & \mathrm{K}_1 \end{vmatrix},$$

pak pro $k = 3$, $n = 3$ podobně

$$\begin{vmatrix} 1, & x^3, & x^6 \\ 1, & y^3, & y^6 \\ 1, & z^3, & z^6 \end{vmatrix} = \delta \,.\, \begin{vmatrix} \mathrm{K}_2, & \mathrm{K}_3, & 0, & 0 \\ \mathrm{K}_1, & \mathrm{K}_2, & \mathrm{K}_3, & 0 \\ 0, & 1, & \mathrm{K}_1, & \mathrm{K}_2 \\ 0, & 0, & 1, & \mathrm{K}_1 \end{vmatrix} \quad \text{atd.}$$

Abychom pak další ještě uvedli příklad, položme $k = 4$, $n = 2$, načež obdržíme relaci

$$\begin{vmatrix} 1, & x^4, & x^6 \\ 1, & y^4, & y^6 \\ 1, & z^4, & z^6 \end{vmatrix} = \delta . \begin{vmatrix} K_2, & K_3, & 0, & 0 \\ K_1, & K_2, & K_3, & 0 \\ 1, & K_1, & K_2, & K_3 \\ 0, & 0, & 1, & K_1 \end{vmatrix}$$

anebo pro $k = 5$, $n = 2$

$$\begin{vmatrix} 1, & x^5, & x^7 \\ 1, & y^5, & y^7 \\ 1, & z^5, & z^7 \end{vmatrix} = \delta . (K_2 K_2 K_2 K_2 K_1) \text{ atd.}$$

Zavedeme-li konečně zvýšení mocnitelů všech sloupců, vyjmouc poslední, obdržíme nejobecnější determinant mocninný

$$D_n = (a_1^{n+k} \, a_2^{n+l} \, a_3^{n+m} \ldots a_{n-1}^{n+p} \, a_n^0) = \delta \, \Delta_{K_1 \ldots K_n}, \quad (15)$$

kdež o mocnitelích platí

$$k > l > m > . , . > p ,$$

symbolem $\Delta_{K_1 \ldots K_n}$ pak vyjadřuje se kombinační determinant, jehož stupeň závisí na veličinách

$$k + 1, \quad l + 2, \quad m + 3, \ldots, p ,$$

o něž zvětšeny jsou mocnitelové sloupců determinantu původního δ.

Abychom pak obecně vyznačený zde determinant

$$\Delta_{K_1 \ldots K_2}$$

přesně vyjádřili, zavedeme pro příslušný determinant mocninný výraz

$$D_n = (a_1^0 \, a_2^{m_1} \, a_3^{m_1+m_2} \, a_4^{m_1+m_2+m_3} \ldots a_n^{m_1+m_2+\ldots+m_{n-1}}),$$

načež bude vzorcem

$$\Delta_{K_1 \ldots K_2} = (\underbrace{K_{n-1} \ldots K_{n-1}}_{m_1-1} \underbrace{K_{n-2} \ldots K_{n-2}}_{m_2-1} K_{n-3} \ldots \underbrace{K_2 \ldots K_2}_{m_{n-2}-1} \underbrace{K_1 \ldots K_1}_{m_{n-1}-1}) \quad (16)$$

vyjádřen determinant sestavný, kterýž znásoben determinantem základním δ vyjadřuje obecný náš determinant mocninný D_n.

Konečně plyne tu ze vzorce (15) i relace

$$\varDelta_{K_1 \ldots K_n} = \frac{D_n}{\delta},$$

z níž patrno, že determinant sestavný vyjadřuje se poměrem dvou determinantů mocninných.*)

II.

Předcházející vzorce, představující různé relace mezi determinanty mocninnými a sestavnými, jsou již o sobě nemálo zajímavými, nepostrádají však i praktické důležitosti, jakož dokazují již první relace vzorcem (6) vyjádřené, jimiž lze dovoditi souvislost kořenů algebraické rovnice s příslušnými koëfficienty jednotlivých mocnin jejích.

Značí-li obecní součinitelové

$$A_0, \ A_1, \ A_2, \ldots, A_n$$

*) Jest-li na př. $a_k = k$ $(k = 1, 2, 3)$ a $K_1 = 6$, $K_2 = 11$, $K_3 = 6$, bude $\delta = 2$, tedy

$$\begin{vmatrix} 11, & 6, & 0, & 0, & 0 \\ 6, & 11, & 6, & 0, & 0 \\ 1, & 6, & 11, & 6, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 6, & 11 \\ 0 & 0, & 0, & 1, & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & 2^4, & 2^7 \\ 1, & 3^4, & 3^7 \end{vmatrix} = 11315,$$

jakož se i přímým vyčíslením determinantů obou shledává. Zároveň tu poznamenávám, že vzorec (16) nebyl dosud mnou uveřejněn, jakož vůbec tato stať není ukončena vzorcem tímto a bude v ní dále pokračováno. A naopak jest pro $a_k = k$, $(k = 1, 2, 3, 4)$ a tedy $K_1 = 10$, $K_2 = 35$, $K_3 = 50$, $K_4 = 24$, $\delta = 12$, na př.

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 2^2, & 2^3, & 2^7 \\ 1, & 3^2, & 3^3, & 3^7 \\ 1, & 4^2, & 4^3, & 4^7 \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} K_3, & K_4, & 0 & 0 \\ 1, & K_1, & K_2, & K_3 \\ 0, & 1, & K_1, & K_2 \\ 0, & 0, & 1, & K_1 \end{vmatrix} = 191280,$$

jakož se vyčíslením druhého determinantu rychleji obdrží nežli z prvního, z čehož i praktický význam těchto vzorců jde na jevo.

vesměs čísla reální a n positivní číslo celistvé, jest výraz

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0 \quad (17)$$

algebraickou rovnicí stupně n-tého. Známe-li pak n hodnot tento polynom levé strany identicky annullujících

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots, \quad a_n,$$

obdržíme, dosadíce je do relace (17), soustavu

$$\begin{aligned} A_0 a_1^n + A_1 a_1^{n-1} + A_2 a_1^{n-2} + \ldots + A_{n-1} a_1 + A_n = 0, \\ A_0 a_2^n + A_1 a_2^{n-1} + A_2 a_2^{n-2} + \ldots + A_{n-1} a_2 + A_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_0 a_n^n + A_1 a_n^{n-1} + A_2 a_n^{n-2} + \ldots + A_{n-1} a_n + A_n = 0. \end{aligned}$$

Z této soustavy (n) rovnic čítající, spojí-li se s rovnicí (17), možná pak $(n+1)$ koëfficient

$$A_k, \ (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

přímo vyloučiti, poněvadž tu při stejnoměrnosti její se zřetelem k těmto koëfficientům platí

$$\begin{vmatrix} x^n, & x^{n-1}, & x^{n-2}, \ldots, & x, & 1 \\ a_1^n, & a_1^{n-1}, & a_1^{n-2}, \ldots, & a_1, & 1 \\ a_2^n, & a_2^{n-1}, & a_2^{n-2}, \ldots, & a_2, & 1 \\ \vdots & & & & \\ a_n^n, & a_n^{n-1}, & a_n^{n-2}, \ldots, & a_n, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Rozložíme-li však determinant zde se vyskytující podlé prvků prvního řádku, obdržíme, zřetel majíce ku příslušným subdeterminantům mocninným a ke vzorcům (1) i (6),

$$\delta x^n - \delta K_1 x^{n-1} + \delta K_2 x^{n-2} - , \ldots \pm \delta K_{n-1} x \mp \delta K_n = 0;$$

a porovnáme-li koëfficienty jednotlivých mocnin zde se vyskytujících s koëfficienty týchže mocnin polynomu (17), poznáme, že všeobecně platí

$$\delta K_m = (-1)^m A_k. \quad (18)$$

Kdybychom tedy položili za základ rovnici

$$x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n = 0\,, \quad (19)$$

takže platí o těchto nových koëfficientech

$$b_m = \frac{A_m}{A_0}\,,$$

přejde relace (18) v jednodušší

$$b_m = (-1)^m K_m\,,\text{*)} \quad (20)$$

z níž patrno, že postupně tu platí

$$\begin{aligned} K_1 &= -b_1\,, \\ K_2 &= +b_2\,, \\ K_3 &= -b_3\,, \\ &\ldots\ldots \\ K_n &= (-1)^n b_n\,. \end{aligned} \quad (21)$$

Soustava těchto n rovnic, v nichž vyskytují se hodnoty kořenů a_k pouze v mocnině *první*, nahražuje tedy jedinou rovnici stupně n-tého (19).

A naopak řešíce tuto soustavu n-rovnic stupně prvního, přicházíme postupným eliminováním konečně k rovnici jediné, avšak stupně n-tého, kdež neznámou jest kterákoli z n neznámých v soustavě (21) obsažených.

Jestli na př. pro $n = 2$

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= -b_1 \\ a_1 \,.\, a_2 &= \quad b_2\,, \end{aligned}$$

bude výsledek, vyloučíme-li z obou rovnic a_2

$$a_1^2 + b_1 a_1 + b_2 = 0\,,$$

a vyloučíme-li a_1, podobně

$$a_1^2 + b_1 a_2 + b_2 = 0\,,$$

kteréžto rovnice obě nahražuje

---

*) Dokáže-li se jiným spůsobem, jakož snadno možná, správnost vzorce tohoto, stanovícího koëfficienty rovnice b_m co symmetrické funkce kořenů K_m, obdrží se obrácením příslušné vzorce, vyjadřující hodnoty mocninných determinantů (6).

$$x^2 + b_1 x + b_2 = 0$$

svými dvěma kořeny a_1, a_2.

Podobně obdrží se pro $n = 3$

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= -b_1 , \\ a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 &= b_2 , \\ a_1a_2a_3 &= -b_3 , \end{aligned}$$

vyloučíme-li napřed neznámé a_2, a_3,*)

$$a_1^3 + b_1a_1^2 + b_2a_1 + b_3 = 0 ,$$

a vyloučíme-li a_1, a_3,

$$a_2^3 + b_1a_2^2 + b_2a_2 + b_3 = 0 ,$$

a konečně vyloučíme-li a_1, a_2

$$a_3^3 + ba_3^2 + b_2a_3 + b_3 = 0 ,$$

takže tyto tři kubické rovnice nahražuje

$$x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3 = 0$$

svými třemi kořeny a_1, a_2, a_3.

A že i obecně přijde se od soustavy (21) n rovnic stupně prvního n neznámých obsahující k rovnici jedné neznámé stupně n-tého (19), možná dokázati asi takto:

Značí-li k_p součet všech kombinací p-té třídy n prvků

$$a_1 , \quad a_2 , \quad a_3 , \ldots , \quad a_n , \tag{22}$$

v nichž se nevyskytuje prvek a_k, bude patrně

$$\begin{aligned} K_1 &- a_k &&= k_1 , \\ K_2 &- a_k k_1 &&= k_2 , \\ K_3 &- a_k k_2 &&= k_3 , \\ &\cdots\cdots\cdots \\ K_{n-1} &- a_k k_{n-2} &&= k_{n-1} , \\ K_n &- a_k k_{n-1} &&= 0 ; \end{aligned}$$

*) Eliminace tato provede se nejpohodlněji, znásobíme-li rovnice tyto, jak po sobě jdou, veličinami

$$+ a_1^2 , \quad - a_1 , \quad + 1$$

a sečteme-li pak na obou stranách.

znásobíme-li pak relace tyto, jak po sobě jdou, mocninami případně označenými

$$-a_k^{n-1}\,,\quad a_k^{n-2}\,,\quad -a_k^{n-3}\,,\ldots,\ \pm a_k\,,\ \mp 1\,,$$

a sečteme-li konečně na obou stranách, zkrátivše napřed co možná, obdržíme

$$a_k^n - K_1 a_k^{n-1} + K_2 a_k^{n-2} - \ldots \pm K_{n-1} a_k \mp K_n = 0\,,$$

což patrně platí pro všech n hodnot (22) a nahražuje se rovnicí s jedinou neznámou

$$x^n - K_1 x^{n-1} + K_2 x^{n-1} - \ldots \pm K_{n-1} x \mp K_n = 0\,,$$

jejímž řešením se však obdrží n hodnot annullujících (22), představujících tedy její kořeny,

A zde připojuje se nejpřirozenějším spůsobem fundamentální poučka z theorie algebraických rovnic, již poprvé přesně že odůvodnil r. 1799 *Gauss*, bylo v předcházející slavnostní přednášce taktéž podotčeno.

Abychom i dalších vzorců zde využitkovali, stanovme, že rovnici 4. stupně

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \tag{23}$$

vyhovují hodnoty a_1, a_2, a_3, takže současně platí

$$\begin{aligned} a_1^4 + pa_1^2 + qa_1 + r &= 0\,,\\ a_2^4 + pa_2^2 + qa_2 + r &= 0\,,\\ a_3^4 + pa_3^2 + qa_3 + r &= 0\,; \end{aligned}$$

z těchto čtyř rovnic možná vyloučiti koëfficienty p, q, r, načež výsledek eliminace zní

$$\left|\begin{matrix} x^4\,, & x^2\,, & x\,, & 1\\ a_1^4\,, & a_1^2\,, & a_1\,, & 1\\ a_2^4\,, & a_2^2\,, & a_2\,, & 1\\ a_3^4\,, & a_3^2\,, & a_3\,, & 1 \end{matrix}\right| = 0,$$

aneb rozložíme-li determinant podlé prvků prvního řádku,

$$x^4\,(a_1^2 a_2 1) - x^2 (a_1^4 a_2 1) + x\,(a_1^4 a_2^2 1) - (a_1^4 a_2^2 a_3) = 0\,.$$

Vyjádříme-li pak hodnoty těchto determinantů mocninných podlé vzorců předcházejících příslušnými determinanty sestavnými, obdržíme, zkrátivše společným faktorem δ,

$$x^4 - x^2 \begin{vmatrix} K_1, & K_2 \\ 1, & K_1 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} K_2, & K_3 \\ 1, & K_1 \end{vmatrix} - K_3 K_1 = 0 .$$

Porovnáme-li tedy s rovnicí (23), zjednáme si relace

$$\begin{aligned} K_1 K_1 - K_2 &= -p , \\ K_1 K_2 - K_3 &= +q , \\ K_1 K_3 \quad &= -r , \end{aligned}$$

znásobíme-li však stejniny tyto, jak po sobě jdou, veličinami

$$K_1^2 , \quad K_1 , \quad 1$$

a sečteme-li na obou stranách, vznikne

$$K_1^4 + pK_1^2 - qK_1 + r = 0 , \tag{24}$$

tedy rovnice 4. stupně, z níž plyne se zřetelem k rovnici (23), že

$$- K_1 = - (a_1 + a_2 + a_3) = a_4$$

jest též jejím kořenem, a že tu

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 ,$$

jakož z rovnice dané jde zřejmě na jevo.

Podobně bychom obdrželi pro rovnici

$$x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0 , \tag{25}$$

annulluje-li se veličinami

$$a_1 , \quad a_2 , \quad a_3 , \quad a_4 ,$$

platí-li tedy současně

$$\begin{aligned} a_1^5 + pa_1^3 + qa_1^2 + ra_1 + s &= 0 , \\ a_2^5 + pa_2^3 + qa_2^2 + ra_2 + s &= 0 , \\ a_3^5 + pa_3^3 + qa_3^2 + ra_3 + s &= 0 , \\ a_4^5 + pa_4^3 + qa_4^2 + ra_4 + s &= 0 , \end{aligned}$$

obdobným vyloučením koëfficientů p, q, r, s

$$\begin{vmatrix} x^5, & x^3, & x^2, & x, & 1 \\ a_1^5, & a_1^3, & a_1^2, & a_1, & 1 \\ a_2^5, & a_2^3, & a_2^2, & a_2, & 1 \\ a_3^5, & a_3^3, & a_3^2, & a_3, & 1 \\ a_4^5, & a_4^3, & a_4^2, & a_4, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

anebo rozložením podlé prvků prvního řádku a po přiměřeném zkrácení

$$x^5 - x^3 \begin{vmatrix} K_1, & K_2 \\ 1, & K_1 \end{vmatrix} + x^2 \begin{vmatrix} K_2, & K_3 \\ 1, & K_1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} K_3, & K_4 \\ 1, & K_1 \end{vmatrix} + K_1K_4 = 0.$$

Porovnáme-li pak tyto koëfficienty s původně danými, obdržíme relace

$$\begin{aligned} K_1K_1 - K_2 &= -p, \\ K_1K_2 - K_3 &= +q, \\ K_1K_3 - K_4 &= -r, \\ K_1K_4 \quad\;\; &= +s; \end{aligned}$$

znásobíme-li však je, jak po sobě jdou, mocninami

$$K_1^3, \quad K_1^2, \quad K_1, \quad 1,$$

a sečteme-li pak na obou stranách, vznikne

$$K_1^5 + pK_1^3 - qK_1^2 + rK_1 - s = 0,$$

což znamená, že

$$-K_1 = -(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = a_5$$

též jest kořenem rovnice předložené (25), že tedy i tu platí

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0,$$

jakož známo.

Jak by možná bylo zjev tento z opačného hlediska přímo vyplývající zevšeobecniti, jde již ze dvou těchto případů zvláštních zřejmě na jevo.

Konečně budiž ještě poukázáno k tomu, že základní determinant mocninný δ, jak vzorcem (1) tu stanoven a následujícím součinem alternujícím vyjádřen, velmi dobře slouží k odvození poučky Borchardtovy, podle níž se posuzuje jakost kořenů algebraické rovnice stupně n-tého.

Jestiť čtverec determinantu mocninného determinantem souměrným, kdež prvky představují součty mocnin prvků daných vedle vzorce

$$s_k = a_1^k + a_2^k + a_3^k + \dots + a_n^k,$$

takže platí všeobecně

$$(a_1^0 a_2^m a_3^{m+1} \dots a_n^{m+n-2}) = (s_0 s_{2m} s_{2m+2} \dots s_{2(m+n-2)}), \tag{26}$$

a v našem případě, kde specialisujeme, kladouce

$$m = 1,$$

zvláště se obdrží vzorec

$$(a_1^0 a_2^1 a_3^2 \dots a_n^{n-1})^2 = (s_0 s_2 s_4 \dots s_{2n-2}) = \varDelta_n . \tag{27}$$

A poněvadž mocninný determinant na levé straně zde stojící vyjadřuje se známým součinem

$$\Pi_n^2 \equiv (a_2 - a_1)^2 (a_3 - a_1)^2 (a_3 - a_2)^2 \dots (a_n - a_{n-1})^2,$$

bude podle toho

$$\varDelta_n \equiv \Pi_n^2, \tag{28}$$

na čemž pak zakládá se poučka, že rovnice dříve uvedená má *m* dvojic sdružených kořenů soujemných, obsahuje-li řada determinantů vzorcem (27) stanovených

$$\varDelta_1, \varDelta_2, \varDelta_3, \dots, \varDelta_n$$

m změn znamének, jak pojem tento poprvé stanovil *Descartes.*
