František Josef Studnička

O zobecnění poučky Hermite-ovy, k existenci soujemných kořenů rovnic algebraických se táhnoucí

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 26 (1897), No. 2-3, 95--105

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121617`

O zobecnění poučky Hermite-ovy, k existenci soujemných kořenů rovnic algebraických se táhnoucí.

Napsal

Prof. dr. **F. J. Studnička.**

Jakož jsem v předcházející své přednášce příležitostně poznamenal, pozná se pouhým pohledem na rovnici

$$x^2 + x + 1 = 0,$$

že má kořeny *soujemné*, tedy tvaru

$$x = a \pm bi,$$

zná-li se příslušná poučka *Hermite*-ova; představujíť tu koëfficienty *tří* po sobě jdoucích členů, totiž

$$1, \; 1, \; 1,$$

arithmetickou řadu stupně *null*-tého, jsou tedy z tohoto důvodu v příslušné rovnici *dva* kořeny soujemné. Zníť zobecněná poučka *Hermite*-ova k existenci soujemných kořenů se táhnoucí takto:

Představuje-li k po sobě jdoucích koëfficientů

$$a_m, \; a_{m+1}, \; a_{m+2}, \; \ldots, \; a_{m+k-1},$$

algebraické rovnice

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots . + a_{n-1} x + a_n = 0$$

arithmetickou řadu stupně m-tého pro

$$m \leqq k - 3,$$

jest z tohoto důvodu

$$k - m - 1 = 2h$$

kořenů jejích jakosti soujemné, takže při sudém k nutno, aby m bylo liché a naopak.

V uvedeném případě zvláštním jest patrně

$$k = 3\,, \quad m = 0\,, \quad h = 1\,.$$

Abychom dokázali správnost této důležité poučky, nutno předeslati několik zvláštních pouček, na nichž se zakládá, a tedy především vzorec, podlé něhož se stanoví m-tá difference arithmetické řady pomocí členů řady původní.

A tu se učí v theorii řad rozdílových, že možná si zjednati k dané řadě členů

$$a_1\,, \; a_2\,, \; a_3\,, \ldots a_k\,, \ldots \tag{1}$$

rozdíly

$$\begin{array}{l} \varDelta a_1\,, \; \varDelta a_2\,, \; \varDelta a_3\,, \ldots, \; \varDelta a_k\,, \ldots, \\ \varDelta^2 a_1\,, \; \varDelta^2 a_2\,, \; \varDelta^2 a_3\,, \ldots, \; \varDelta^2{}_k\,, \; \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varDelta^m a_1\,, \; \varDelta^m a_2\,, \; \varDelta^m a_3\,, \ldots, \; \varDelta^m a_k\,, \; \ldots, \end{array}$$

odečtením předcházejícího člena od následujícího podlé vzorce obecného

$$\varDelta^k a_p = \varDelta^{k-1} a_{p+1} - \varDelta^{k-1} a_p\,,$$

načež platí o libovolném členu prvního sloupce naší soustavy řadové*)

$$\varDelta^m a_1 = a_{m+1} - m_1 a_m + m_2 a_{m-1} - \ldots \pm a_1\,. \tag{2}$$

Jestli pak řada původní (1) stupně m-tého, jest

$$\varDelta^m a_p = k\,, \quad (p = 1\,, \; 2\,, \; 3\,, \ldots)$$

značí-li k veličinu stálou, a tedy

$$\varDelta^{m+n} a_1 = 0\,, \quad (n = 1\,, \; 2\,, \; 3\,, \ldots)\,,$$

načež ze vzorce (2) vyplyne, obrátíme-li,

$$a_1 - m_1 a_2 + m_2 a_3 - \ldots \pm a_{m+1} = 0\,. \tag{3}$$

---

*) Viz *Studnička*: „Všeobecné tvarosloví algebraické“, pag. 11.

Jestli tedy arithmetická řada (1) stupně p-tého, a napíšeme-li pod jejích $(q+1)$ členů

$$a_m\,,\quad a_{m+1}\,,\quad a_{m+2}\,,\,\ldots\,,\quad a_{m+q}$$

binomické koëfficienty mocniny $q > p$, bude identicky rovnati se nulle součet součinů, vzniklých znásobením nad sebou stojících členů, vzatých s označením střídavým, tedy podlé vzorce (3) též

$$a_m - q_1 a_{m+1} + q_2 a_{m+2} - \ldots \pm a_{m+q} = 0\,. \qquad (4)$$

Podlé toho jest na př. u členů arithmetické řady stupně druhého

$$1,\; 4,\; 9,\; 16,\; 25,\; 36,\; 49,\; \ldots,$$

užijeme-li binomických koëfficientů mocniny čtvrté

$$1,\; 4,\; 6,\; 4,\; 1$$

a počneme-li členem třetím, identicky

$$1\,.\,9 - 4\,.\,16 + 6\,.\,25 - 4\,.\,36 + 49 = 0.$$

Jakožto praemissu druhou pak uvésti sluší poučku, podlé níž se rozhoduje o počtu soujemných kořenů, schází-li v příslušné rovnici m po sobě jdoucích členů, takže

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_k x^{n-k} + \underset{k+m}{a} x^{n-k-m} + \ldots + a_n = 0\,,$$

kterážto poučka, jakož známo, zní takto:

Jestli m číslo *sudé*, jest z *důvodu tohoto* počet soujemných kořenů taktéž m; značí-li však m číslo *liché*, jest tento počet $\left\{\begin{matrix} m+1 \\ m-1 \end{matrix}\right\}$, označeny-li jsou členy mezeru svírající $\left\{\begin{matrix} \textit{stejně} \\ \textit{nestejně} \end{matrix}\right\}$, jestli tedy při současnosti svrchních nebo spodních znamének

$$\begin{matrix} \text{buď} & \pm a_k x^{n-k} \pm a_{k+m} x^{n-k-m} \\ \text{nebo} & \pm a_k x^{n-k} \mp a_{k+m} x^{n-k-m}\,. \end{matrix}$$

Podlé toho má na př. rovnice

$$x^4 - 1 = 0$$

jen *dva* soujemné kořeny; neb tu platí $m = 3$ a označení členů krajních jest *nestejné*, totiž $+\,-$. Ale rovnice

$$x^4 + 1 = 0$$

má *čtvero* soujemných kořenů, poněvadž označení členů krajních jest *stejné*, totiž $+\,+$.

Ale podobná rovnice binomická

$$x^5 \pm 1 = 0$$

má v obou případech tu znamením $\pm$ vytčených *čtvero* kořenů soujemných, poněvadž zde

$$m = 4\,.$$

Konečně nutno si na pamět uvésti, že rovnice

$$f(x) = 0$$

obsahuje všechny kořeny rovnice stupně nižšího

$$\varphi(x) = 0$$

a všechny kořeny rovnice stupně taktéž nižšího

$$\psi(x) = 0\,,$$

jestli polynom rovničný $f(x)$ součinem polynomů podobných $\varphi(x)$ a $\psi(x)$, platí-li tedy

$$f(x) \equiv \varphi(x)\,.\,\psi(x)\,.$$

Majíce pak na zřeteli tyto tři praemissy, můžeme postupně*) odvozovati platnost zobecněné poučky Hermite-ovy takto:

Znásobíme-li polynom rovniční

$$\varphi(x) \equiv x^k + x^{k-1} + x^{k-2} + a_3 x^{k-3} + \ldots + a_k = 0 \qquad (5)$$

na obou stranách lineárním faktorem

$$\psi(x) \equiv x - 1\,, \qquad (6)$$

vznikne patrně

*) Se zřetelem ke čtenářům těchto listů volíme zde tuto přístupnější formu induktivní.

$$f(x) \equiv x^{k+1} + 0 + 0 + (a_3 - 1)\, x^{k-2} + \dots,$$

z čehož poznáváme, že *dva* po sobě jdoucí členové tu scházejí, že tedy rovnice odvozená

$$f(x) = 0$$

má *dva kořeny soujemné;* a poněvadž kořeny tyto neobsahuje rovnice pomocná

$$\psi(x) = 0,$$

soudíme, že obsaženy jsou v rovnici (5), u níž koëfficienty *tří* po sobě jdoucích členů představují arithmetickou řadu stupně *null-tého.*

Kdyby pak bylo

$$\varphi_1(x) \equiv x^k + x^{k-1} + x^{k-2} + x^{k-3} + x^{k-4} + a_5 x^{k-5} + \dots,$$

bude při stejném $\psi(x)$ patrně

$$f(x) \equiv x^{k+1} + 0 + 0 + 0 + 0 + (a_5 - 1)x^{k-5} + \dots,$$

z čehož poznáváme, že *čtyři* po sobě jdoucí členové tu scházejí, a tedy soudíme, že předložená rovnice

$$\varphi_1(x) = 0,$$

kdež koëfficienty *pěti* po sobě jdoucích členů jsou veličiny stálé, a tedy představují arithmetickou řadu stupně *nulltého*, obsahuje *čtvero kořenů soujemných.*

A podobným spůsobem postupujíce, přicházíme k obecné poučce, že *rovnice*

$$\chi(x) = 0$$

obsahuje 2k kořeny soujemné, představuje-li (2k + 1) koëfficientů jejích arithmetickou řadu stupně null-tého.

Jdeme-li dále, předpokládajíce rovnici

$$\varphi(x) \equiv x^k + a x^{k-1} + (2a - 1)\, x^{k-2} + (3a - 2)x^{k-3} + a_4 x^{k-4} + \dots, \quad (7)$$

kdež koëfficienty prvních čtyř členů, totiž

$$1, \quad a, \quad (2a - 1), \quad (3a - 2)$$

představují arithmetickou řadu stupně *prvého*, zvolíme za druhý faktor

$$\psi(x) \equiv (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 ,$$

načež znásobením obdržíme

$$f(x) \equiv x^{k+2} + (a-2)x^{k+1} + 0 + 0 + \beta x^{k-2} + \ldots ,$$

z čehož patrno, že rovnice tato, postrádajíc dvou, po sobě jdoucích členů, má *dva* kořeny soujemné, any nejsouce obsaženy v rovnici pomocné

$$(x-1)^2 = 0 ,$$

přísluší druhé rovnici zde obsažené, totiž (7). A tím dovozena vlastní poučka *Hermite*-ova.*)

Podobně by objevilo se čtvero annullovaných členů v odvozené rovnici

$$f(x) = 0 ,$$

kdyby *šest* po sobě jdoucích koëfficientů polynomu $\varphi(x)$ představovalo arithmetickou řadu stupně *prvého;* a všeobecně by se takto dovodilo, že obsahuje rovnice (7) z tohoto důvodu $2k$ kořenů *soujemných*, představuje-li $(2k-2)$ koëfficientů po sobě jdoucích členů arithmetickou řadu stupně *prvého.*

Postoupíme-li ještě o krok dále, kde

$$\varphi(x) \equiv a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + a_3 x^{k-3} + a_4 x^{k-4} + \ldots + a_k , \quad (8)$$

kdež koëfficienty *pěti* po sobě jdoucích členů

$$a_0 , \quad a_1 , \quad a_2 , \quad a_3 , \quad a_4$$

představují arithmetickou řadu stupně *druhého*, bude především podlé vzorce (3) identicky

$$a_0 - 3a_1 + 3a_2 - a_3 = 0 ,$$
$$a_1 - 3a_2 + 3a_3 - a_4 = 0 ,$$

takže znásobíme-li $\varphi(x)$ polynomem binomickým

*) Nejslavnější tento mathematik dnešní Francie podal r. 1842 pouhé znění této poučky ve zvláštním případě tomto do „Nouv. Ann. de Math.“ I. pag. 385.

$$\psi(x) \equiv (x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1,$$

obdržíme patrně

$$f(x) \equiv a_0 x^{k+3} + b_1 x^{k+2} + b_2 x^{k+1} + 0 + 0 + b_5 x^{k-2} + \ldots,$$

z čehož pak soudíme, že rovnice odvozená

$$f(x) = 0 \qquad (9)$$

a tedy i rovnice původní

$$\varphi(x) = 0$$

má *dva* kořeny *soujemné;* význam koëfficientů b_k jest při tom arci lhostejný.

Z čehož pak podobným spůsobem se dovozuje dále, že rovnice (8) obsahuje $2k$ kořenů *soujemných,* představují-li koëfficienty $(2k+3)$ členů po sobě jdoucích arithmetickou řadu stupně *druhého.*

Na tomto induktivním základě možná konečně sestaviti řadu závěrků tuto: *Představují-li koëfficienty rovničních členů po sobě jdoucích*

3	arithm. řadu st.	0-tého,	má rovnice		2,
4	„ „ „	1-ního,	„	„	2,
5	„ „ „	2, 0-ho,	„	„	2, 4,
6	„ „ „	3, 1 „,	„	„	2, 4.
7	„ „ „	4, 2, 0-ho	„	„	2, 4, 6,
8	„ „ „	5, 3, 1 „	„	„	2, 4, 6,
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
k	„ „ „	$k-m$, $m \gtrless 3$,	má rovn.		2, 4, 6, ..., $2h$

kořenů soujemných pouze z důvodu tohoto; neb ve zvláštních případech, kde k jest číslo *liché,* může se jich vyskytnouti více, jakmile buď označení krajních členů v rovnici (9) jest nestejné anebo jakost jiných koefficientů další soujemnost kořenů podmiňuje. Podlé toho má na př. rovnice

$$x^8 + x^7 + x^6 - 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 7x - 8 = 0$$

nejméně *čtvero* kořenů *soujemných;* dva jsou nutně *reálné,* poněvadž samostatný člen (-8) této rovnice stupně *sudého* má označení *negativní*, nerozhodnuto tedy pouze o dvou kořenech spůsobem tímto.

Kdybychom však chtěli deduktivně si zjednati zobecněnou poučku Hermite-ovu, znásobili bychom

$$\varphi(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \ldots + a_k \qquad (10)$$

s pomocným polynomem

$$\psi(x) \equiv (x-1)^m = x^m - m_1 x^{m-1} + m_2 x^{m-2} - \ldots \pm 1, \qquad (11)$$

načež by vznikl součin

$$f(x) \equiv b_0 x^{k+m} + b_1 x^{k+m-1} + b_2 x^{k+m-2} + \ldots + b_n x^{k+m-n} + \ldots, \qquad (12)$$

kdež by o koëfficientech těchto nových platilo

$$\begin{array}{llllll} b_n & = a_n & - m_1 a_{n-1} & + m_2 a_{n-2} & - m_3 a_{n-3} + \ldots & \pm a_{n-m}, \\ b_{n+1} & = a_{n+1} & - m_1 a_n & + m_2 a_{n-1} & - m_3 a_{n-2} + \ldots & \pm a_{n-m+1}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n+h} & = a_{n+h} & - m_1 a_{a+h-1} & + m_2 a_{n+h-2} & - \quad \ldots & \pm a_{n+h-m}. \end{array}$$

Přiměřenou volbou stupně arithmetické řady, jiż představují koëfficienty funkce (10), jakož i mocniny pomocnou funkci (11) určující, docílí se pak snadno, že podlé vzorce (3) annulluje se v rovničním polynomu (12)

$$2, 4, 6, \ldots, 2h$$

po sobě jdoucích členů, což pak jest znamením, že tolikéž kořenů soujemných z *tohoto* důvodu čítá rovnice původní

$$\varphi(x) = 0.$$

A z obecného pravidla tohoto plynou pak přímo všechny zvláštní, dříve tu o sobě odůvodněné poučky, mezi nimiž i původní theorem Hermite-ův.

Dodatek prvý.

V témže časopise, v němž uveřejnil mladý Hermite svou thesi, podal později a to ve sv. 4. řady 2. pag. 79 *Faure* trochu obecnější poučku podobnou, že totiž rovnice

$$\begin{aligned} F(a)\,x^m + F(a+1)\,x^{m-1} + F(a+2)\,x^{m-2} + \ldots \\ + F(a+m) = 0 \qquad (13) \end{aligned}$$

obsahuje kořeny soujemné, značí-li symbol $F(a)$ algebraickou racionální celistvou funkci stálé a, jestli tedy obecně

$$F(a) = b_0 a^k + b_1 a^{k-1} + b_2 a^{k-2} + \ldots + b_k, \qquad (14)$$

a při tom zároveň platí

$$k \leqq m - 2. \qquad (15)$$

Uvážíme-li, že rovnice (13) obsahuje koëfficientů $(m+1)$, jež podlé významu (14) a podmínky (15) představují arithmetickou řadu stupně o 3 neb více jednotek nižšího, pak podřizuje se tvrzení Faure-ovo zcela naší zde zobecněné poučce.

Důkaz, že koëfficienty

$$F(a), \quad F(a+1), \quad F(a+2), \quad \ldots, \quad F(a+m)$$

představují v tomto případě mathematickou řadu stupně k-tého, jejíž postupné difference jsou derivace

$$F'(a), \quad F''(a), \quad F'''(a), \quad \ldots, \quad F^{(k)}(a),$$

vede se i pomocí poučky Taylorovy zcela snadno.

Dodatek druhý.

Při odvozování poučky Hermite-ovy užívali jsme pomocné funkce

$$\psi(x) = (x-1)^m,$$

abychom v polynomu $f(x)$ si mohli zjednati účelnou volbou mocnitele m tolik se annullujících členů po sobě jdoucích, kolik se dovolovalo počtem koëfficientů polynomu $\varphi(x)$, představujících arithmetickou řadu daného stupně.

Téhož prostředku možná však užiti též při pomocné funkci

$$\psi(x) \equiv x - c,$$

aby se annulloval sudý počet členů polynomu $f(x)$.

Jestli totiž, jako prvé, obecně

$$\varphi(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + a_3 x^{k-3} + \ldots + a_k,$$

vznikne násobením zde užívaným

$$f(x) \equiv a_0 x^{k+1} + \left.\begin{matrix} a_1 \\ -ca_0 \end{matrix}\right| x^k + \left.\begin{matrix} a_2 \\ -ca_1 \end{matrix}\right| x^{k-1} + \left.\begin{matrix} a_3 \\ -ca_2 \end{matrix}\right| x^{k-2} + \left.\begin{matrix} \ldots + a_k \\ - \ldots - ca_{k-1} \end{matrix}\right| - ca_k,$$

načež annulluje se *dvé* členů, platí-li

$$a_1 = ca_0,$$
$$a_2 = ca_1 = c^2 a_0,$$

z čehož patrno, že rovnice naše bude míti *dva* kořeny *soujemné, představují-li* *tři* po sobě jdoucí koëfficienty její *řadu geometrickou.*

$$a_0, \quad ca_0, \quad c^2 a_0.$$

Kdyby se annullovaly ještě další *dva* členy, tedy současně ještě bylo

$$a_3 = ca_2 = c^3 a_0,$$
$$a_4 = ca_3 = c^4 a_0,$$

vzniklo by v odvozené rovnici *čtvero* po sobě jdoucích null, což by podmiňovalo čtvero soujemných kořenů.

A všeobecně se takto dovozuje, že *rovnice*

$$\varphi(x) = 0$$

má $2k$ *soujemných kořenů, představuje-li* $(2k + 1)$ *koëfficient kterýchkoli členů po sobě jdoucích geometrickou řadu*

$$a_p, \ ca_p, \ c^2 a_p, \ \ldots, \ c^{2k} a_p.$$

Podlé toho má tedy na př. rovnice

$$x^3 - ax^2 + a^2 x - b = 0$$

dvé kořenů soujemných, poněvadž koëfficienty prvních tří po sobě jdoucích členů, totiž

$$1, \ -a, \ a^2,$$

představuje řadu geometrickou, kdež stálý poměr jest

$$c = -a.$$

Ostatně potvrzuje okolnost tato i zjev mnohem bližší. Jestiť známo, že v tomto případě

$$a = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$
$$a^2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1,$$

značí-li tré kořenů předložené rovnice kubické

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3.$$

A tu vede koëxistence dvou těchto podmínek k relaci snadno odvoditelné

$$a^2 = -\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2,$$

jíž patrně vyhověti lze pouze čísly rázu soujemného; a poněvadž koëfficienty rovnice předložené jsou čísla rázu reálního, nutno, aby *dva* z těchto kořenů měly ráz soujemný a sdružený, tedy bylo na př.

$$\alpha_1 = p + qi,$$
$$\alpha_2 = p - qi,$$

načež pak vyplyne relace

$$a^2 = 2(q^2 - p^2) - \alpha_3^2$$

čísly realními, jakož patrno, snadno splnitelná.

O základních vlastnostech determinantů mocninných a jich upotřebení v theorii rovnic algebraických.

Napsal*)

prof. dr. F. J. Studnička.

I.

Sestavíme-li z n různých prvků

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

n řad po sobě jdoucích mocnin

---

*) Poprvé částečně uveřejněno ve „Zpráv. kr. č. spol. nauk“ r. 1896.