Josef Klobouček

Důkaz jisté věty z geometrie polohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 26 (1897), No. 2-3, 156--160

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121614

$$\varrho = \frac{m^2}{\sin \varphi m - R}.\text{*)}$$

Taktéž v případě druhém, tře-li se křivka A, pohybující se roviny A, v daném bodu s křivky K roviny stálé M, možno pohyb ten pokládati za pohyb kotálení, tenkráte evoluty E křivky se troucí A po společné normale N obou křivek v bodě s sestrojené.

V tomto případě jest $R'' = \infty$ a použijeme-li téhož vzorce obdržíme, označíce s R poloměr křivosti evoluty E v bodě e, v němž se jí normala N dotýká, týž vztah jako nahoře

$$\frac{m}{\varrho} = 1 - \frac{\sin \varphi}{m} R,$$

z kterého pak také plyne, že

$$\varrho = \frac{m^2}{m - R \sin \varphi}.$$

Položíme-li za m označení N a za $m \, . \sin \varphi = N \sin \varphi$ označení y, obdržíme pro poloměr křivosti křivky torné vzorec

$$\varrho = \frac{N^3}{N^2 - Ry}.\text{**)}$$

Důkaz jisté věty z geometrie polohy.

Napsal

Josef Klobouček,

assistent při realné škole v Kr. Vinohradech.

„Úpatní body os plochy druhého stupně, jdoucích daným bodem, leží na křivce pátého stupně, která daným bodem trojnásob kolmo prochází.“

Větu tuto uvádí *Reye* ve své geometrii polohy***), avšak dů-

---

*) *Fr. Machovec: „Zobrazování tečen a středů křivosti křivek na základě nové methody“*, str. 108.

**) Tamtéž, str. 110.

***) Die Geometrie der Lage. Vorträge von Dr. Theodor Reye, II., zweite, vermehrte Auflage. Neue Ausgabe 1882.

kazu pro stručnost nepodává. Dovolím si tedy v následujícím podati jeden důkaz a větu samu poněkud doplniti.

Předpokládejme, že daný bod je v konečnu a že není obsažen v žádné ze tří rovin symmetrie dané kvadratické plochy. Pak budou osy jím procházející tvořiti obecnou plochu kuželovou druhého stupně a jich poláry, jež jsou současně také osami, budou v polárné rovině daného bodu obalovati parabolu; abychom obdrželi úpatní bod jedné z os, třeba přidruženou osou vésti k této kolmou rovinu, která ji seče v hledaném bodě úpatním. Pozorujme, kolik takových bodů leží v libovolné rovině.

Za tím účelem veďme všemi osami v polárné rovině daného bodu ležícími roviny kolmé k osám sdruženým a stanovme třídu takto určené rozvinutelné plochy. Předně jest patrno, že řídící plochou její jest plocha kuželová normálná ke kuželi, který tvoří osy v daném bodě a dále, že každé dvě tečné roviny její stanoví spolu osu novou. Neboť nazveme-li osy, kterými tyto tečné roviny procházejí O'_1, O'_2, budou jim odpovídající osy O_1, O_2 obsahovati poly jejich a budou tedy průsečnice obou rovin a spojnice jich polů přímkami nejen sdruženými, ale poněvadž osy O_1, O_2 se sekou a jsou normálny k daným rovinám, i k sobě kolmými, tedy dle definice budou osami dané plochy druhého stupně.

Poněvadž osy ležící v jedné rovině obalují obecně parabolu, soudíme z předchozího, že každá tečná rovina rozvinutelné plochy bude ostatní tečné roviny protínati v přímkách obalujících parabolu. Nekonečně vzdálená rovina, jsouc také jednou z tečných rovin naší plochy, bude ji protínati v křivce druhého stupně, to jest plocha tato bude míti plochu kuželovou druhého stupně jakožto plochu řídící, jak shora bylo ukázáno.

Z předešlého snadno se poznává, že rozvinutelná plocha jest plochou třetí třídy, poněvadž ji lze definovati jakožto obálku rovin, které se dotýkají dvou parabol v různých rovinách položených a společnou tečnu majících; její čarou úvratu jest kubická parabola.

Stanovivše povahu rozvinutelné plochy, můžeme přistoupiti ku vlastnímu důkazu.

Protněme za tou příčinou plochu tuto libovolnou rovinou, která neprochází vrcholem osového kužele. Tím obdržíme určitou křivku třetí třídy a mimo to jistou kuželosečku jako pronik osového kužele s touto rovinou, a tyto dvě křivky jsou v té souvislosti, že každému bodu druhé přísluší jediná tečna prvé a na opak. Body úpatní ležící v této rovině jsou tím charakterisovány, že jimi přidružené tečny procházejí.

Abychom stanovili počet jejich, zvolme na kuželosečce libovolný bod a promítněme z něho body její na tečny křivky druhé, jim přidružené. Takto stanovené body budou naplňovati křivku stupně čtvrtého s trojnásobným bodem. Určuje totiž libovolná přímka s oběma svazky, svazkem paprskovým promítajícím a se svazkem tečen, dvě soumístné řady bodové takové, že každému bodu prvé odpovídá jeden bod druhé, ale každému bodu druhé tři body prvé.

Čtyři společné elementy těchto dvou řad jsou průsečíky vytvořené křivky s přímkou. Poněvadž však středem svazku paprskového procházejí tři elementy svazku druhého, jsou jim odpovídající elementy tečnami vytvořené křivky v tomto bodě, který tedy bude bodem trojnásobným.

Dalších pět pevných bodů kuželosečky s touto křivkou stanoví polohu hledaných úpatních bodů.

K témuž výsledku bychom dospěli, kdybychom místo libovolné roviny uvažovali některou z tečných rovin rozvinutelné plochy; v tomto případě by se průsečná křivka třetí třídy rozpadala na kuželosečku a bod. Kdybychom sečnou rovinu proložili vrcholem osového kužele, rozpadala by se kuželosečka ve dvě přímky; v jich bodu průsečném obdrželi bychom tři body, a v průsečících těchto přímek s rovinami tečnými rozvinutelné plochy k nim kolmými, další dva body úpatní.

Vrchol našeho kužele je skutečně trojnásobným bodem křivky úpatní, neboť jím procházejí tři tečné roviny rozvinutelné plochy a každé z nich jest na kuželi přidružena osa k ní kolmá. Rovina dvou těchto os přidružených jest tečnou rovinou naší plochy, obsahujíc osu sdruženou ku průsečnici ostatních dvou, tedy průsečnice kterýchkoli dvou jest osou kolmou a přidruženou ku rovině třetí, to jest všecky tři roviny sekou se pravoúhelně a jich tři průsečnice jsou tečnami křivky úpatní v tomto bodu.

Veškeré osy stanovené jako průsečnice dvou tečných rovin rozvinutelné plochy stanoví systém paprskový třetího stupně první třídy a jim odpovídající osy, které jsou určeny jakožto spojnice dvou bodů polární křivky třetího stupně dané plochy, tvoří systém paprskový prvního stupně třetí třídy. Tato křivka polární se promítá z libovolného bodu kuželem druhého stupně a prochází středem quadratické plochy; kužel polárný příslušný ke kuželi, kterým se polární křivka z tohoto středu promítá, jest řídícím kuželem rozvinutelné plochy.

Poněvadž libovolným bodem jde nejvýše 6 normál ku ploše druhého stupně, soudíme z toho, že úpatní křivka pro daný bod bude procházeti šesti úpatníky normál z daného bodu ku ploše vedených; týmiž body bude procházeti křivka polární. Více realných bodů mimo těchto šest nemůže míti úpatní křivka s plochou společných; neboť pak by každý bod se musil jeviti jako průsečík osy, na níž leží, s plochou druhého stupně a současně jakožto průsečík sdružené kolmé roviny k ose jeho, což jest jen tehdy možno, je-li tečná rovina v bodě tomto ku ploše druhého stupně vedená kolmá ku příslušné ose.

Přistupme nyní k nekonečně vzdáleným bodům křivky úpatní. Dle obecné theorie jest jich pět; lze však ukázati, že z nich jest pouze jediný reálný, a sice je stanoven onou povrchovou přímkou osového kužele, která prochází středem plochy druhého stupně. Neboť ostatní čtyři body, které jsou stanoveny jakožto body jisté nekonečně vzdálené kuželosečky, ležící na sdružených tečnách jiné nekonečně vzdálené kuželosečky, musí býti imaginárné, poněvadž řádná realná přímka kolmá k dané rovině nemůže býti s toutéž rovinou rovnoběžná, po případě v ní ležeti.

Poznamenejme konečně, že tato křivka, ležíc celá na kuželi druhého stupně, nemá obecně ani stationarných bodů ani stationarných tečen, poněvadž by jinak na libovolné površce tohoto kužele neležel (mimo trojnásobný bod ve vrcholu) již pouze jediný bod křivky úpatní, jak musí skutečně býti, má-li se vyhověti definici úpatního bodu.

Dále lze dokázati, že libovolná přímka protíná obecně osm tečen naší křivky. Neboť myslíme-li si vrcholem kužele proloženu onu přímku, bude se v něm protínati šest tečen křivky úpatní, z nichž dvě a dvě jsou soumezné, tečny obsažené v tečných rovinách plochy kuželové, jdoucích onou přímkou, jsou další dvě tečny, tedy celkem osm tečen.

Pro charakteristická čísla naší křivky máme tedy hodnoty

$$m = 5,\ r = 8,\ \Theta = 0,\ \beta = 0,$$

ostatní hodnoty plynou použitím známých vzorců z těchto čtyr, tedy

$$n = 9,\ g = 20,\ h = 6,\ x = 16,\ y = 12,\ \alpha = 8,\ p = 0.$$

Degenerace křivky této na více křivek stupňů nižších podmíněna jest degenerací plochy kuželové, na které leží. Na příklad zaujme-li vrchol kužele některou s hora vytčených poloh, rozpadne se kužel na dvě roviny. Pro body ležící na hlavních osách dané plochy druhého stupně jsou tyto roviny rovinami symmetrie téže plochy.

Křivka úpatní se pak degeneruje na přímku a dvě kružnice v jednom bodě této přímky se sekoucí k sobě kolmé.

V tomto případě stává se totiž sdružená normálná rovina ke spojnici tohoto bodu se středem dané plochy neurčitou a lze tudíž každý její bod pokládati za úpatník.

V úvaze předešlé předpokládána jest obecná centrálná plocha druhého stupně; avšak věc nejeví valné změny, předpokládáme-li jakoukoli nezvrhlou plochu kvadratickou.

Pro plochy rotační nastává hořejší redukce vždy, poněvadž kužel osový se vždy rozpadá ve dvě normálné roviny.

Při plochách kuželových vyskytují se větší odchylky, kterých — abych celou věc nekomplikoval — zde vyšetřovati nemínim.

Věstník literární.

Annuaire de l' Observatoire Municipal de Montsouris pour l' année 1896 et 1897. Analyse et Travaux de 1894/5. Météorologie. — Chimie. – Micrographie. Applications a l' Hygiène. Gauthier-Villars. Paris 1896, 1897.

Meteorologické observatorium na Montsouris v Paříži založeno bylo přičiněním M. *Dumasa* ministrem vyučování *Duruyem* r. 1871. Ředitel *Marié-Davy* vytknul r. 1873 za program činnosti tohoto observatoria: Výzkum účinků v proměnách po-