Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 26 (1897), No. 2-3, 209--216

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121610

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1897

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Úlohy.

Úloha 22.

Řešiti rovnici

$$\sqrt{4x^2+3} = \sqrt[3]{8x^3+9x}.$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 23.

Řešiti soustavu rovnic

$$2^x(4^x-5)+3^y(9^y-5)=4700$$
$$2^x(4^x-9)+3^y(9^y-9)=4600.$$

Týž.

Úloha 24.

Řešiti soustavu rovnic

$$x^2-y=a, \quad xy=b.$$

Emanuela Holoubkova.

Úloha 25.

Kdy jsou realnými všechny 3 kořeny rovnice

$$x^3-ax^2+ax-1=0?$$

Jsou-li dva z kořenů těch imaginárné, který jest jich modul a která amplituda?

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 26.

Má-li rovnice

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0,$$

ve které a_0, a_1, a_2, a_3 *jsou hodnoty realné, kořen*

$$x = \cos\alpha + i \sin\alpha;$$

jest dokázati, že

$$2\cos\alpha = -\frac{a_0 a_1 - a_2 a_3}{a_0 a_2 - a_1 a_3}.$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 27.

Ustanoviti meznou hodnotu do nekonečna pokračujícího výrazu

$$1 + \frac{1 + \frac{1 + \frac{1 + \cdots}{x}}{x}}{x}$$

Týž.

Úloha 28.

Promítneme-li do stran trojúhelníka úsečku omezenou středy kružnice vepsané a opsané, jest průmět úsečky té do strany prostředně velké roven součtu průmětů do druhých dvou stran. Podati důkaz.

Josef Langr, posl. č. techniky.

Úloha 29.

Vedeme-li ku každé straně trojúhelníka výšku a těžnici a nazveme-li vzdálenost pat obou těch příček na stranách a, b, c postupně m, n, p, jest dokázati relaci

$$am + bn = cp,$$

je-li

$$a < c < b.$$

Týž.

Úloha 30.

Do trojúhelníka majícího úhly α, β, γ vepsán druhý, jehož strany jsou kolmy ku stranám prvního. Dokázati, že poměr podobnosti obou trojúhelníků jest

$$\frac{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 31.

V trojúhelníku rovnoramenném ABC $(AC = BC)$ *vedena k podstavě* AB *příčka* CE *tak, že úhel* $ACE = \frac{\gamma}{4}$. *Dokázati:*

a) $$\frac{AB \,.\, AE}{AC^2} = 4 \sin^2 \frac{\gamma}{4}.$$

b) $$\frac{AB}{AE} = 4 \cos^2 \frac{\gamma}{4}.$$

c) $$\frac{AC^2 + AE^2}{AC \,.\, AE} = 4 \frac{AC}{AB}.$$

d) *Je-li* $AB \,.\, AE = AC^2$, *jest úhel* $\gamma = 120^0$.

Prof. *V. Jeřábek.*

Úloha 32.

V trojúhelníku rovnoramenném ABC $(AC = BC)$ *jest vedena k podstavě* AB *příčka* CE *tak, že úhel* $BCE = \frac{\gamma}{4}$. *Dokažte:*

a) $$\frac{AB \,.\, AE}{AC^2} = 4 \sin\frac{\gamma}{4} \sin\frac{3\gamma}{4}$$

b) *Je-li* $AB \,.\, AE = AC^2$, *jest úhel* $\gamma = 72^0$.

Týž.

Úloha 33.

Poloměr svítící koule jest $R = 20$ *cm, druhé temné* $r = 4$ *cm, vzdálenost středů obou koulí* $c = 1$ *m. Ve vzdálenosti* $d = 12$ *cm od středu koule temné jest postavena rovná deska kolmo ku ose kužele dotyčného. Jak velký jest poloměr stínu vrženého menší koulí na desku?*

Prof. *V. Hübner.*

Úloha 34.

Kolmý kruhový kužel rozdělen jest řezem rovnoběžným se základnou ve dvě části stejného povrchu i stejného obsahu. Který úhel tvoří strana se základnou? V kterém poměru jest obsah řezu k základně? Řed. *A. Strnad.*

Úloha 35.

Bodem (4, 3) vésti přímku, která s přímkami určenými rovnicí

$$2x^2 - 7xy + 3y^2 = 0$$

omezuje trojúhelník, jehož obsah $\varDelta = 10$. *Týž.*

Úloha 36.

Vyšetřiti geom. místo vrcholu trojúhelníka abc, jehož základna pevná jest bc a příčka am půlící úhel při vrcholu a jest střední geom. úměrnou úseků bm a cm.

Josef Langr, posl. č. techniky.

Úloha 37.

Po pravoúhlých osách souřadných šinou se dvě přímky stálých délek a, b tak, že zůstávají spolu rovnoběžny. Průsekem první přímky a osy X vedena přímka $M \parallel Y$, průsekem druhé a osy Y vedena $M_1 \parallel X$. Které jest geom. místo průseku m přímek M, M_1? Jak sestrojíme jeho tečnu?

M. Aug. Haas na Strahově.

Úloha 38.

V trojúhelníku ABC jest půdice AB pevna a vrchol C proměnlivý. Které jest geom. místo vrcholu C, je-li poloměr kruhu při straně BC vně vepsaného roven n-násobnému poloměru kruhu vně vepsaného při straně AC? *Týž.*

Úloha 39.

Stanoviti jest společné tečny křivek

$$4x^2 + 25y^2 = 400$$

$$x^2 + y^2 - 14x - 14y + 89 = 0.$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 40.

Která jest číselná výstřednost zemské dráhy, je-li zdánlivý průměr slunce v přísluní 32′ 36″ a v odsluní 31′ 32″?

Týž.

Úloha 41.

V krajních bodech úsečky $\overline{oa}$ *jsou vztyčeny kolmice Y a T. Bodem b na* $\overline{oa}$ *zvoleným vedená příčka seče přímky Y, T v bodech m, q. Ze středu m poloměrem mq sestrojená kružnice protíná přímku vedenou bodem m rovnoběžně s* $\overline{oa}$ *v bodech n a p.*

a) Geometrickým místem bodů n a p jest hyperbola.

b) Je-li l průsečík přímky Y s kolmicí na $\overline{bm}$ *v bodě b vztyčenou, jest* $\overline{nl}$ *tečnou hyperboly.*

c) Ve kterém případě jest hyperbola rovnostranná?

Prof. *V. Jeřábek.*

Úloha 42.

V kterém úhlu vésti jest rovinu ku základně kužele rovnostranného, aby vznikl elliptický řez, jehož osy jsou v poměru 1 : 2?

Prof. *V. Hübner.*

Úloha 43.

Jak velký úhel svírají strany kužele rovnostranného s jeho základnou, když rovina kolmá k základně protíná oblinu kužélo-

vou v hyperbole rovnoosé? Jak dlouhé jsou osy hyperboly, znači-li m vzdálenost vrcholu jejího od vrcholu kužele?

Prof. *V. Hübner.*

Uloha 44.

Po vnější straně plochy kulové padá těleso k zemi. Jak daleko bude se pohybovati po kouli, mělo-li v nejvyšším bodě koule rychlost počáteční c? *M. Aug. Haas* na Strahově.

Úloha 45.

V jaké vzdálenosti od středu nutno zavěšiti přímou tyč, aby měla nejkratší dobu kyvu? *Týž.*

Úloha 46.

Jest určiti rovnici paraboly procházející bodem (0, 0) tak, aby osa její byla rovnoběžna s osou X a ohnisko měla v bodě (3, —4). Prof. *J. Sommer.*

Úloha 47.

Z přímého rovnoběžnostěnu, jehož podstavou jest čtverec o straně $a = 25\ cm$, vysoustružen co největší dvojkužel o rovných stranách, jehož osou jest úhlopříčná osa hranolu. Je-li povrch jeho $P = 19{\cdot}2\ dm^2$, ktery jest jeho obsah K?

Prof. *Vavř. Jelínek.*

Úloha 48.

Podstavami komolého jehlanu o krychlovém obsahu $K = 159{\cdot}358\ dm^3$ a povrchu $P = 450{\cdot}85\ dm^2$ jsou mnohoúhelníky opsané kolem kružnice; dolní má plochu $Z = 87{\cdot}72\ dm^2$ a obvod $O = 3{\cdot}58\ m$. Jak velký bude obsah k a povrch p největšího komolého kužele z něho vysoustruženého? *Týž.*

Úloha 49.

V trojúhelníku ABC jest dán ve straně AB bod D a ve straně BC bod E libovolně položený. Určiti ve straně AC bod F tak, aby

$$\sphericalangle ADF = \sphericalangle FEC.$$

Van Schooten Chr. Huygensovi r. 1648.

Úloha 50.

Dána kružnice průměru $AB = 2$. *Jedna polovice její rozpůlena bodem C, druhá rozdělena ve tři stejné díly body D a E. Spojnice CD a CE protínají průměr AB v bodech F a G. Má býti dokázáno, že*

$$CF + FG$$

neliší se od $\frac{\pi}{2}$ *více než o* $1:4000$.

Chr. Huygens Van Schootenovi r. 1654.

Poznámka: Poslední dvě historické úlohy sdělil redakci p. prof. Dr. W. Láska.

Správné řešení úloh 47., 48., 61. a 62. z předešlého ročníku zaslal dodatečně p. *Karel Hýbner*, stud. českého gymnasia v Opavě.

Vypsání cen za řešení úloh.

Výbor Jednoty českých mathematiků usnesl se na tom, aby uděleny byly ceny těm, kteří do konce měsíce června podají nejdokonalejší a největší počet řešení úloh v letošním ročníku Časopisu tohoto obsažených. Cenami budou publikace tyto:

1. Pět prvních cen:

Briot-Pšenička, Mechanická theorie tepla.
Řehořovský, Theorie souměrných funkcí kořenů.
Strnad, Mathematikové francouzské revoluce.
Strouhal, Ocel a její vlastnosti galvanické a magnetické.
Vaněček. Křivé čáry rovinné a prostorové.

2. Deset druhých cen:

Bellavitis-Zahradník, Methoda aequipollencí.
Jelínek, Početní úkoly tělesoměrné.
Řehořovský, Theorie souměrných funkcí kořenů.
Strnad, Mathematikové francouzské revoluce.
Studnička, Základové nauky o číslech.

3. Patnáct třetích cen:

Čubr. O měření země.
Jarolímek, Descriptivní geometrie I. vyd. díl I.—III.
Jarolímek, Descriptivní geometrie v úlohách.
Studnička, Algebra pro vyšší třídy stř. škol 2. vyd.
Šolín, Počátkové arithmografie.