Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Arnošt Dittrich

Jak třeba zvoliti vazby a síly, aby soustava jimi daná dala se realisovati. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 31 (1902), No. 2, 115--124

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121595

kde α, β, γ značí číselné koefficienty, jež vyhovují podmínce $\alpha + \beta + \gamma = 0$, leží body ty na jedné přímce.“ *)

Rovnice středu I' úsečky $D_2 D_3$ jest

$$2I' = D_2 + D_3;$$

klademe-li tu za D_2 a D_3 hodnoty (7 *a*) a (7 *b*) a upravíme-li, obdržíme

$$2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) I'$$
$$= x_1 (x_2 + x_3) A_1 + x_2 (x_3 + x_1) A_2 + x_3 (x_1 + x_2) A_3;$$

rovnice bodu X a E jsou pak

$$(x_1 + x_2 + x_3) X = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3,$$
$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) E = x_1^2 A_1 + x_2^2 A_2 + x_3^2 A_3.$$

Násobíme-li prostřední z těchto tří rovnic výrazem $-(x_1 + x_2 + x_3)$ a sečteme-li všechny, dostaneme

$$2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) I' - (x_1 + x_2 + x_3)^2 X$$
$$+ (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) E = 0,$$

t. j. dle uvedené věty Grassmannovy leží body I', X a E v jedné přímce.

Týmž způsobem dokážeme, že body Y, F a střed I'' úsečky $D_1 D_2$ leží v jedné přímce a že podobnou zvláštní polohu mají body Z, H a střed I'' úsečky $D_3 D_1$.

(Pokračování.)

Jak třeba zvoliti vazby a síly, aby soustava jimi daná dala se realisovati.

Napsal

Arnošt Dittrich v Praze.

(Pokračování.)

Měl-li ν-tý bod soustavy souřadnice x_ν, y_ν, z_ν, rychlosti x'_ν, y'_ν, z'_ν a přejde-li během doby t do polohy $\overline{x_\nu}$, $\overline{y_\nu}$, $\overline{z_\nu}$, v níž má rychlosti $\overline{x'_\nu}$, $\overline{y'_\nu}$, $\overline{z'_\nu}$, lze říci, že stav x_ν, y_ν, z_ν, x'_ν, y'_ν, z'_ν přešel ve stav $\overline{x_\nu}$, $\overline{y_\nu}$, ..., $\overline{z'_\nu}$. Stav soustavy určen souhrnem $6n$

*) Základové geometrického počtu Grassmannova, roč. XXV. pag. 267.

souřadnic a rychlostí právě tak, jako dříve poloha veličinami x_ν, y_ν, z_ν. Proto lze též stav označiti jedinou písmenou, na př. r neb $\bar{r}$.

Mají-li se veličiny, jimiž stav r neb $\bar{r}$ určen, blíže vytknouti, lze psáti $(x, y, z, x', y', z')r$ neb $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')\bar{r}$, což značí, že stav r určen hodnotami $x_\nu, y_\nu, \ldots, z_\nu'$, stav $\bar{r}$ určen veličinami $\bar{x}_\nu, \bar{y}_\nu, \ldots, \bar{z}_\nu'$, kde $\nu = 1, \ldots, n$.

Že toto označení stavu jedinou písmenou jest výhodné, ukazuje se zejména tehdá, je-li stav r se stavem $\bar{r}$ v nějaké souvislosti. Takovou souvislost obdržíme na př., rozšíříme-li skupinu S přibráním transformace rychlostí, jež s transformací S spojena. Tím vznikne zase šestičlenná skupina, kterou v dalším označíme S′. Rovnice její jsou

$$\begin{aligned}
\bar{x}_\nu &= a_1 x_\nu + a_2 y_\nu + a_3 z_\nu + a_0, & \bar{x}_\nu' &= a_1 x_\nu' + a_2 y_\nu' + a_3 z_\nu', \\
\bar{y}_\nu &= b_1 x_\nu + b_2 y_\nu + b_3 z_\nu + b_0, & \bar{y}_\nu' &= b_1 x_\nu' + b_2 y_\nu' + b_3 z_\nu', \\
\bar{z}_\nu &= c_1 x_\nu + c_2 y_\nu + c_3 z_\nu + c_0, & \bar{z}_\nu' &= c_1 x_\nu' + c_2 z_\nu' + c_3 z_\nu', \\
& & \nu = 1, 2, \ldots, n. &
\end{aligned}$$

Tato soustava rovnic transformuje stav r ve stav $\bar{r}$, což lze Lie-ovou symbolikou vyznačiti rovnicí $r\mathrm{S}' = \bar{r}$.

Skupina S′ vytvořena též šesti na sobě nezávislými infinitesimalními transformacemi

$$\mathrm{V}_1'f \equiv \mathrm{V}_1 f, \quad \mathrm{V}_2'f \equiv \mathrm{V}_2 f, \quad \mathrm{V}_3'f \equiv \mathrm{V}_3 f,$$

$$\mathrm{V}_4'f \equiv \sum_1^n{}_\nu \left(\frac{\partial f}{\partial z_\nu} y_\nu - z_\nu \frac{\partial f}{\partial y_\nu} + \frac{\partial f}{\partial z_\nu'} y_\nu' - z_\nu' \frac{\partial f}{\partial y_\nu'} \right),$$

$$\mathrm{V}_5'f \equiv \sum_1^n{}_\nu \left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu} z_\nu - x_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \frac{\partial f}{\partial x_\nu'} z_\nu' - x_\nu' \frac{\partial f}{\partial z_\nu'} \right),$$

$$\mathrm{V}_6'f \equiv \sum_1^n{}_\nu \left(\frac{\partial f}{\partial y_\nu} x_\nu - y_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \frac{\partial f}{\partial y_\nu'} x_\nu' - y_\nu' \frac{\partial f}{\partial x_\nu'} \right).$$

Ještě jednodušeji lze polohu neb stav vyznačiti jedinou písmenou, užíváme-li Lagrange-ových všeobecných souřadnic. Značíme-li tyto souřadnice, jichž jest $m = 3n - p$ písmenami $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, všeobecné komponenty rychlosti neb zrychlení

$\alpha'_1, \ldots, \alpha'_m$ resp. $\alpha''_1, \ldots, \alpha''_m$, lze polohu určenou souřadnicemi $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ vyznačiti písmenou α, stav daný veličinami $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_m$ označiti písmenou a.

§ 2. *Věta prvá.* Z věty prvé plynou podmínky pro vazby. Obsahuje-li soustava n bodů, jest poloha její ϱ určena $3n$ souřadnicemi x_ν, y_ν, z_ν. Mezi těmi může býti předem dáno p rovnic

$$\varphi_\pi(x, y, z, t) = c_\pi, \quad \pi = 1, \ldots, p, \quad p < 3n.$$

Funkce φ_π jsou na sobě nezávislé; c_π jsou stálé, jichž numerické hodnoty plynou z počátečních poloh soustavy. Význam vazeb jest pak následující:

Zaujímala-li soustava v dané době t polohu $(x, y, z)\varrho$, jest každá jiná poloha $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})\overline{\varrho}$, v níž poloha ϱ během doby $\overline{t} - t$ přejíti může, vázána řadou rovnic

$$\varphi_\pi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{t}) = \varphi_\pi(x, y, z, t), \quad \pi = 1, \ldots, p.$$

Poněvadž dle věty prvé lze soustavu z jakékoliv polohy ϱ, kterou v době t zaujímá, přenésti do jiných poloh $\overline{\varrho}$, jež se s vazbami srovnávají, pošinutím a otočením, jest

$$\varphi_\pi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{t}) = \varphi_\pi(x, y, z, t), \tag{1}$$

je-li

$$\varrho S = \overline{\varrho}.$$

Význam této symbolické rovnice udán v § 1. Čas, v němž soustava pošinutí a otočení dané rovnicemi S vykoná, jest $\overline{t} - t$.

Mezi všechna možná pošinutí a otočení náleží zejmena to, jež během doby dt převádí soustavu pohybem šroubovým do nové polohy. Tento šroubový pohyb udílí souřadnicím x_ν, y_ν, z_ν incrementa

$$dx_\nu = (Bz_\nu - Cy_\nu + D)\,dt,$$
$$dy_\nu = (Cx_\nu - Az_\nu + E)\,dt,$$
$$dz_\nu = (Ay_\nu - Bx_\nu + G)\,dt.$$

A, B, ..., G jsou libovolné stálé. Veličiny $\overline{x}_\nu$, $\overline{y}_\nu$, $\overline{z}_\nu$, $\overline{t}$ jsou zde

$$\overline{x}_\nu = x_\nu + dx_\nu, \quad \overline{y}_\nu = y_\nu + dy_\nu, \quad \overline{z}_\nu = z_\nu + dz_\nu, \quad \overline{t} = t + dt. \tag{2}$$

Mezi všechny možné pohyby šroubové náleží pak též transformace identická, jež souřadnicím x_ν, y_ν, z_ν udílí vzrost

$$dx_\nu = dy_\nu = dz_\nu = 0.$$

Tento šroubový pohyb obdržíme, položíme-li A = B = ... = G = 0. Dosadíme-li tato incrementa dx_ν, dy_ν, dz_ν, dt do rovnic

$$\sum_1^n {}_\nu \left(\frac{\partial\varphi_\pi}{\partial x_\nu} dx_\nu + \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial y_\nu} dy_\nu + \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial z_\nu} dz_\nu\right) + \frac{\partial\varphi_\pi}{\partial t} dt = 0,$$

jimž veličiny ty vyhověti musí, obdržíme, že

$$\frac{\partial\varphi_\pi}{\partial t} = 0, \quad \pi = 1, 2, \ldots, p.$$

Z rovnic těch plyne, že vazby nezávisí na čase.

Píšeme-li proto vazby ve tvaru

$$\varphi_\pi(x, y, z) = c_\pi, \quad \pi = 1, 2, \ldots, p,$$

značí věta prvá, že

$$\varphi_\pi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \varphi_\pi(x, y, z), \tag{3}$$

když

$$\overline{\varrho} = \varrho S.$$

Předpokládáme-li, že polohu ϱ lze zvoliti zcela libovolně, plyne z věty prvé, že funkce $\varphi_\pi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ rovná se na základě substituce S identicky funkci $\varphi_\pi(x, y, z)$. Pak jest ale φ_π invariantem šestičlenné skupiny S.

Funkce φ_π jest ale tehdá a jen tehdá invariantem*) této skupiny, hoví-li φ_π soustavě homogenních linearných partialních rovnic

$$V_i f = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 6.$$

Výrazy V_i jsou symboly infinitesimalních transformací, jež vytvořují skupinu S. Každá z funkcí φ_π hoví tedy rovnicím

$$\sum_1^n {}_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu} = 0, \quad \sum_1^n {}_\nu \frac{\partial f}{\partial y_\nu} = 0, \quad \sum_1^n {}_\nu \frac{\partial f}{\partial z_\nu} = 0,$$

$$\sum_1^n {}_\nu \left(\frac{\partial f}{\partial z_\nu} y_\nu - z_\nu \frac{\partial f}{\partial y_\nu}\right) = 0, \quad \sum_1^n {}_\nu \left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu} z_\nu - x_\nu \frac{\partial f}{\partial z_\nu}\right) = 0, \tag{4}$$

$$\sum_1^n {}_\nu \left(\frac{\partial f}{\partial y_\nu} x_\nu - y_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}\right) = 0.$$

*) *Scheffers*, S. Lie, Continuirliche Gruppen, str. 412.

Hledejme nyní všechny funkce φ_π, jež hoví rovnicím (4). Poněvadž funkce ty jsou na sobě nezávislé, představuje-li $\varphi_\pi = c_\pi$, $\pi = 1, \ldots, p$ vazby soustavy, třeba jen vyhledati všechny na sobě nezávislé funkce φ_π, jež rovnicím $V_i f = 0$ hoví.

Je-li $n \gtreqless 3$, tvoří rovnice $V_i f = 0$, $i = 1, \ldots, 6$, úplný system linearných homogenních partialních rovnic.

Neboť rovnice ty jsou na sobě nezávislé, t. j. nelze nalézti funkce χ_i, které nejsou vesměs rovny nulle tak, aby

$$\sum_1^6 {}^i \chi_i V_i f \equiv 0.$$

Tato identita může pro neurčitost funkce f obstáti jen tehdá, hoví-li veličiny χ_i rovnicím

$$(5) \qquad \begin{aligned} \chi_1 + z_\nu \chi_5 - y_\nu \chi_6 &= 0, \\ \chi_2 + x_\nu \chi_6 - z_\nu \chi_4 &= 0, \\ \chi_3 + y_\nu \chi_4 - x_\nu \chi_5 &= 0. \end{aligned} \qquad \nu = 1, \ldots, n.$$

Těmto $3n$ rovnicím o šesti proměnných lze, protože dle předpokladu $3n > 6$, vyhověti jen tehdá, vymizí-li všechny šestiřádkové determinanty, jež z matice rovnic (5) lze utvořiti. Zejmena musí též vymizeti determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & z_\nu, & -y_\nu \\ 0, & 1, & 0, & -z_\nu, & 0, & x_\nu \\ 0, & 0, & 1, & y_\nu, & -x_\nu, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & 0, & z_\mu, & -y_\mu \\ 0, & 1, & 0, & -z_\mu, & 0, & x_\mu \\ 0, & 0, & 1, & y_s, & -x_s, & 0 \end{vmatrix},$$

kde ν, μ, s jest jedno z čísel $1, 2, \ldots, n$, zvolené tak, že

$$\mu \neq \nu, \qquad s \neq \mu, \qquad s \neq \nu.$$

Vypočteme-li tento determinant, obdržíme

$$\Delta = (z_\mu - z_\nu)\left[(x_\mu - x_\nu)(y_s - y_\nu) - (x_s - x_\nu)(y_\mu - y_\nu)\right].$$

Tento determinant není identicky roven nulle, poněvadž by vymizel buď, je-li $\mu = \nu$, neb je-li $s = \mu$ neb $s = \nu$, což jsme právě vyloučili. Následkem toho nelze nalézti funkce χ, čímž dokázáno, pokud $n \gtreqless 3$, že rovnice (4) jsou na sobě nezávislé.

Poněvadž dále výrazy $V_i f$ jsou symboly infinitesimálných transformací šestičlenné skupiny, jest

$$(V_i V_k) \equiv \sum_1^6 {}^l c_{ikl} V_l f, \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, 6. \\ k = 1, 2, \ldots, 6. \end{matrix}$$

Lze tedy závorkové výrazy*) Jakobi-ho utvořené z výrazů V_i složiti lineárně se stálými koefficienty z výrazů V_i.**) Proto tvoří rovnice (4) úplný system.***)

Funkce φ_π mají býti na sobě nezávislé. Poněvadž rovnic jest 6, proměnných $3n$, lze nalézti na sobě nezávislých φ_π, jež rovnicím (4) hoví, jen $3n - 6$. Soustava mající n bodů má tedy nanejvýše $3n - 6$ vazeb a proto alespoň 6 Lagrangeových souřadnic, pokud $n \gtreqless 3$.

Odvoďme nyní $3n - 6$ na sobě nezávislých řešení rovnic (4). Tato hledaná řešení obsažena ve výrazech r_{hk}, kde

$$r_{hk}^2 = (x_h - x_k)^2 + (y_h - y_k)^2 + (z_h - z_k)^2$$
$$h = 1, \ldots, n, \qquad h \neq k, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Každý z těchto výrazů hoví rovnicím (4), jak se snadno substitucí přesvědčíme.

Výrazů r_{hk} jest $\frac{n(n-1)}{2}$. Pokud $n \gtreqless 3$, jest $\frac{n(n-1)}{2} \gtreqless 3n - 6$. Proto nebudou obecně všechny ty výrazy na sobě nezávislými.

Pokud $n = 3$ nebo $n = 4$, jest $\frac{n(n-1)}{2} = 3n - 6$. Pak jsou řešení r_{hk} vesměs na sobě nezávislá. Neboť r_{hk} udává vzdálenost bodu h od bodu k. Vzdálenosti 3 neb 4 bodů jsou ale na sobě nezávislé. Kdyby i všechny až na jedinou byly dány, není tím tato zbývající vzdálenost určena.

Je-li $n > 4$, jest $\frac{n(n-1)}{2} > 3n - 6$. Přesvědčíme se opět,

---

*) *Scheffers*, S. Lie, Vorlesungen über Differentialgleichungen, Teubner 1891. str. 196 a násl.

**) *Scheffers*, S. Lie, Continuirliche Gruppen, str 390.

***) Tamtéž str. 216.

že mezi výrazy r_{hk} jest $3n - 6$ na sobě nezávislých. Vzdálenosti tří libovolných bodů 1, 2, 3 jsou dojista na sobě nezávislé. Též vzdálenosti každého dalšího bodu $4, \ldots, n$ jsou vesměs na sobě a vzdálenostech r_{12}, r_{13}, r_{23} nezávislé. Neboť, kdyby i tyto tři vzdálenosti byly dány, dále $3(n-4)$ vzdáleností bodů $4, 5, \ldots, n-1$ od bodů 1, 2, 3 a ještě vzdálenosti r_{1n}, r_{2n}, není tím vzdálenost r_{3n} určena. Jsou tedy dojista vzdálenosti tří bodů a vzdálenosti ostatních $n-3$ bodů od těchto tří na sobě nezávislé. Vzdálenost těch jest $3(n-3)+3 = 3n-6$. Více takových r však vůbec není. Proto obsahují výrazy r_{hk} všechna na sobě nezávislá řešení rovnic (4).

Každá z funkcí φ_π jest řešením rovnic (4). Poněvadž každé řešení tohoto úplného systému jest funkcí $3n-6$ na sobě nezávislých řešení, lze každou z funkcí φ_π vyjádřiti pomocí $3n-6$ na sobě nezávislých z veličin r_{hk}.

Poněvadž naopak každá funkce $3n-6$ na sobě nezávislých řešení hoví rovnicím (4), jest libovolná funkce všech r_{hk} nejobecnějším výrazem, který za φ_π zvoliti lze, má-li o soustavě platiti věta prvá. Vyjádříme-li totiž přebytečná r_{hk}, jichž jest $\frac{1}{2}n(n-1)-(3n-6)$ pomocí $3n-6$ na sobě nezávislých, stane se φ_π funkcí těchto veličin. Proto hoví φ_π rovnicím (4), což nutno a stačí, má-li o soustavě platiti věta prvá.

Z geometrického významu funkcí r plyne, že vazby úplných soustav jsou funkcí vzdáleností bodů soustavy. Při tom předpokládáme, že vazby dány soustavou rovnic, z nichž každá obsahuje neurčitou konstantu.

Má-li soustava maximalní počet vazeb, jichž jest $3n-6$, lze za funkce φ_π zvoliti přímo $3n-6$ na sobě nezávislých z veličin r_{hk}. Označme je $\bar{r}$. Vazby dány pak rovnicemi $\bar{r} = \text{const.}$ Poněvadž zbývající veličiny r lze, jak již řečeno, funkcemi $\bar{r}$ vyjádřiti, budou při pohybu všechna $r_{hk} = \text{const}$, poněvadž $\bar{r} = \text{const.}$ Pak se ale vzdálenosti bodů při pohybu nemění, soustava ta tvoří útvar tuhý.

Předpokládali jsme v předchozím, že soustava čítá aspoň tři body. Třeba ještě vyšetřiti vazby soustav, jež obsahují dva resp. jeden bod.

Skládá-li se soustava ze dvou bodů, jež mají souřadnice

x_1, y_1, z_1 a x_2, y_2, z_2, hoví vazby této soustavy rovnicím $V_i f = 0$, jež se v tomto případě redukují na

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{\partial f}{\partial y_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z_1} + \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0,$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial z_1} y_1 - z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{\partial f}{\partial z_2} y_2 - z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} = 0, \\ (6) \qquad &\frac{\partial f}{\partial x_1} z_1 - x_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} z_2 - x_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial y_1} x_1 - y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y_2} x_2 - y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0. \end{aligned}$$

Specialisací předchozích úvah obdržíme, že rovnice (6) jsou na sobě nezávislé, nevymizí-li determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & z_1, & -y_1 \\ 0, & 1, & 0, & -z_1, & 0, & x_1 \\ 0, & 0, & 1, & y_1, & -x_1, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & 0, & z_2, & -y_2 \\ 0, & 1, & 0, & -z_2, & 0, & x_2 \\ 0, & 0, & 1, & y_2, & -x_2, & 0 \end{vmatrix}.$$

Vypočteme-li tento determinant, obdržíme, že $\Delta \equiv 0$. Proto nejsou rovnice (6) na sobě nezávislé; jedna z nich, na př. $V_6 f = 0$, dá se pomocí ostatních vyjádřiti

$$V_6 f \equiv \sum_1^5 \lambda \chi_\lambda V_\lambda f.$$

χ_λ jsou funkce souřadnic, jež lze snadno ustanoviti.

Pro tuto souvislost rovnice $V_6 f = 0$ s ostatními stačí nalézti jen řešení rovnic $V_\lambda f = 0$, $\lambda = 1, \ldots, 5$. O těchto zbývajících rovnicích lze dokázati, že jsou na sobě nezávislé, poněvadž pak závorkové výrazy symbolů V_λ závisí na výrazech V_λ, kde $\lambda = 1, 2, \ldots, 5$, tvoří rovnice ty úplnou soustavu linearných homogenních rovnic.

Proměnných je 6, rovnic 5; proto lze udati jen $6 - 5 = 1$ řešení. Každé další řešení jest na tomto závislé. Výsledek ten praví, že soustava ze dvou bodů složená má jen jednu vazbu. Tuto vazbu lze snadno uhodnouti; zní

$$\varphi \equiv (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Čítá-li úplná soustava jen jediný bod x, y, z, nalezneme všechny vazby s větou prvou se srovnávající řešením rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} y - z \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} z - x \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} x - y \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Rovnic těch jest 6, proměnných 3; proto jsou nanejvýše tři z těchto rovnic na sobě nezávislé. Za tyto tři původní rovnice zvolíme ovšem nejjednodušší

$$(7) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Jest patrno, že tyto tři rovnice jsou na sobě nezávislé; poněvadž dále závorkové výrazy, jež z levých stran těchto rovnic lze utvořiti, jsou vesměs identicky rovny nulle, dán rovnicemi (7) úplný system, který má $3 - 3 = 0$ řešení. Soustava, jež čítá jediný hmotný bod, nemá vazeb žádných.

Z věty prvé plynou tedy dosti značná omezení pro vazby úplných soustav, jež dány rovnicemi, z nichž každá obsahuje neurčitou konstantu.

V tomto případě plyne z předchozího, že

1. vazby neobsahují čas,
2. vazby jsou libovolnou funkcí vzdáleností bodů soustavy.
3. Čítá-li úplná soustava více než 3 body, jest vazeb nanejvýše $3n - 6$, obsahuje-li 2 body, možná vazba jediná, redukuje-li se na jediný bod, nelze udati vazbu žádnou.

Tyto vlastnosti mají jisté důsledky.

Poněvadž vazby neobsahují čas, platí o soustavách úplných princip živé síly

$$T - T_0 = \int_{t_0}^{t} dt \sum_{1}^{n} \nu \, (X_\nu x_\nu' + Y_\nu y_\nu' + Z_\nu z_\nu').$$

T_0 jest kinetická energie v době t_0, T jest kinetická energie v době t.

Poněvadž vazby neobsahují čas, jest aktualné pošinutí soustavy vždy též virtualným. Mezi pošinutí aktualná náleží dle věty prvé vždy též libovolný pohyb šroubový. Následkem toho platí o úplných soustavách princip těžiště a princip ploch

$$\sum_1^n m_\nu x_\nu'' = \sum_1^n X_\nu, \quad \sum_1^n m_\nu y_\nu'' = \sum_1^n Y_\nu, \quad \sum_1^n m_\nu z_\nu'' = \sum_1^n Z_\nu,$$

$$\sum_1^n m_\nu (y_\nu z_\nu'' - y_\nu'' z_\nu) = \sum_1^n (y_\nu Z_\nu - Y_\nu z_\nu),$$

$$\sum_1^n m_\nu (z_\nu x_\nu'' - z_\nu'' x_\nu) = \sum_1^n (z_\nu X_\nu - Z_\nu x_\nu),$$

$$\sum_1^n m_\nu (x_\nu y_\nu'' - x_\nu'' y_\nu) = \sum_1^n (x_\nu Y_\nu - X_\nu y_\nu).$$

(Pokračování.)

Poznámka k nauce o redukované délce linearného magnetu.

Napsal

Dr. Bohumil Kučera,

assistent fysikálního ústavu v Darmštatě.

Nauka o pólech magnetu má podklad čistě mathematický; póly nejsou fysikálně danými body na magnetu, nýbrž jsou pomocnými pojmy, kteréž ovšem při jistých měřeních značně ulehčují mathematické zpracování výsledků. Již ku konci století 18. zanášeli se Lambert,[1]) Kupffer[2]) a Dalla Bella[3]) touto otázkou, ale došli dle různých experimentálních uspořádání a mathematických předpokladů k výsledkům naprosto nesouhlasným. Lamont[4]) prvý ukázal, že poloha supponovaných pólů nezávisí jenom od geometrických poměrů magnetu a rozdělení magnetismu, nýbrž i od polohy bodu, v němž působení magnetu se má vyšetřiti. Póly magnetu a tím i jeho redukovanou délku

---

[1]) Lambert, Hist. de l'acad. de Berlin 1766, pg. 22.

[2]) Kupffer, Ann. de Chim. et de Phys. 36, pg. 50.

[3]) Dalla Bella, Mem. da Acad. de Lisboa. T. 1.

[4]) Lamont, Handb. d. Magnetismus. Leipzig 1867, pg. 295.