Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Simandl

O určitém konoidu stupně pátého

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 2, 155--165

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121579

O určitém konoidu stupně pátého.

Dr. **Václav Simandl**, assistent české techniky v Brně.

Dvěma mimoběžkami lze proložiti ∞^2 hyperbolických paraboloidů. Vrcholy těchto paraboloidů vyplňují určitou plochu, kterou se v následujícím budeme zabývati.

O ploše té zmiňuje se poprvé Rasche ve své dissertaci: „Untersuchung der Flächen zweiten Grades, welche durch zwei windschiefe Geraden gehen“ (Paderborn 1882), avšak uvádí tam nesprávně stupeň plochy domnívaje se, že jest stupně třetího. Na tu nesprávnost ukázal pan Dr. Klobouček ve své práci „Methodické poznámky ku theorii komplexu A^2 “, uveřejněné v Akademii roku 1905, kde odvodil syntheticky některé vlastnosti této plochy a ukázal, že jest stupně pátého.

V následujícím budeme postupovati cestou hlavně analytickou a stanovíme si rovnici plochy.

I.

Vytkněme si libovolnou rovinu X kolmou ku společné řídící rovině R všech paraboloidů lineární kongruence. Rovina R jest patrně rovnoběžná s oběma danými rovnoběžkami. Rovinu X lze pak pokládati za tečnou vrcholovou rovinu jednoho z našich ∞^2 hyperbolických paraboloidů. Neboť dvěma svými mimoběžnými přímkami a tečnou rovinou vrcholovou jest sborcený paraboloid dokonale určen. Tečná rovina vrcholová musí však býti volena kolmo ku rovině rovnoběžné s oběma mimoběžkami.

Protínejtež rovinu X přímky řídicí, které si označíme a, b, v bodech A, B; přímku stanovenou těmito body označme si l. Buďte tečné roviny paraboloidu v bodech A, B označeny A, B, rovině X co tečné rovině vrcholové přísluší dotyčný bod X na přímce l, vrchol to našeho paraboloidu. V nekonečně vzdáleném bodu přímky l bodu $P\infty$ jest tečnou rovinou rovina asymptotická P přímkou l kolmo ku X proložená. Tento svazek tečných rovin jest projektivný s řadou bodů dotyčných

$$(\mathrm{ABXP}\ .\ .) \barwedge l(ABXP\infty\ .\ .)$$

Svazek $l(ABXP\ldots)$ protíná řídicí rovina R ve svazku paprskovém $L(a'b'x'p'\ldots)$. Rovinný tento svazek paprskový jest patrně též projektivný s řadou bodovou $l(ABXP\infty\ldots)$. Paprsek x' jest kolmý ku paprsku p', ježto kolmé roviny X a P proťaty jsou rovinou R, která jest kolmá ku jedné z nich, totiž X. Úhly pak, jež svírají paprsky a', b' s paprskem x', označme si α, β. Úhly tyto α, β jsou patrně též úhly, jež svírají přímky a, b s rovinou X. Uveďme nyní svazek paprskový L v perspektivní polohu s řadou l. Paprsek p' maje vytínati na řadě l úběžný její bod $P\infty$ bude patrně s touto řadou rovnoběžný, tedy paprsek x' kolmý ku l. Ze dvou pravoúhlých trojúhelníků AXL, BXL vyplývá pak vztah:

$$\overline{AX} : \overline{BX} = tg\,\alpha : tg\,\beta$$

Vztah tento nám ukazuje, kterak na libovolné příčce $\overline{AB}$ mimoběžek a, b, co vrcholové tečně jednoho z ∞^2 hyperbolických paraboloidů lineární kongruence, lze stanoviti vrchol tohoto paraboloidu. Tak lze sestrojiti na každé z ∞^2 příček obou mimoběžek jeden bod X a body ty pak vyplňují hledanou plochu.

Podobný vztah platí však též o bodech Plückerova konoidu, ze vztahu toho a předešlého odvodíme souvislost obou ploch.

Uvažujme zase tytéž přímky a, b, jich příčku l, jež je protíná v bodech A, B a mějtež úhly α, β zase týž význam jako v předešlém. Budiž o osou těchto mimoběžek. Definujme nyní Plückerův konoid známým způsobem jako geometrické místo přímek, které kolmo protínají osu o a kteroukoli příčku l mimoběžek a, b. Protínejž společná normála přímek o a l příčku l v bodě Y. O bodech Y platí pak relace, jíž snadno lze dokázati:

$$\overline{AY} : \overline{BY} = cotg\,\alpha : cotg\,\beta.$$

Z relace této a z relace předešlé vyplývá věta:

Protneme-li dvě mimoběžky a, b ∞^2 rovinami kolmými ku rovině s oběma rovnoběžné a označíme-li průsečíky s jednou z těchto rovin A, B a úhly jich s touže rovinou α, β, tu na přímce $\overline{AB}$

body X vyhovující relaci

$$\overline{AX} : \overline{BX} = tg\, \alpha : tg\, \beta$$

vyplňují plochu vrcholů všech hyperbolických paraboloidů lineární kongruence o řídicích přímkách a, b.

body Y vyhovující relaci

$$\overline{AY} : \overline{BY} = cotg\, \alpha : cotg\, \beta$$

vyplňují Plückerův konoid příslušný lineární kongruenci o řídicích přímkách a, b.

Mysleme si naši plochu příslušnou mimoběžkám a, b a příslušný jim zároveň konoid Plückerův. Na téže příčce, protínající mimoběžky v bodech A, B, leží bod X naší plochy a bod Y konoidu Plückerova. Z obou úměr stanovících body X, Y:

$$\overline{AX} : \overline{BX} = tg\, \alpha : tg\, \beta$$
$$\overline{AY} : \overline{BY} = tg\, \beta : tg\, \alpha$$

vyplývá:

$$\overline{AX} : \overline{BX} = \overline{BY} : \overline{AY}$$

z toho:

$$(\overline{AX} - \overline{BX}) : \overline{AX} = (\overline{BY} - \overline{AY}) : \overline{AY}$$

a ježto:

$$\overline{AX} - \overline{BX} = \overline{AY} - \overline{BY} = \overline{AB},$$

máme:

$$\overline{AX} + \overline{BY} = 0.$$

Z posledního vztahu vidíme, kterak lze konstruovati body naší plochy, když jest sestrojen příslušný konoid Plückerův. Totiž konoid Plückerův příslušný téže lineární kongruenci co naše plocha.

Máme tedy souvislost následující:

Vytkněme si libovolnou příčku l dvěma body A, B mimoběžek a, b. Ta nám protne Plückerův konoid příslušný mimoběžkám a, b v bodě Y. Příslušný bod X naší plochy nalezneme, naneseme-li délku $\overline{BY}$ od bodu A směrem protivným směru $\overline{BY}$ na přímce l.

Není nesnadno nahlédnouti z této souvislosti, že plocha naše jest přímkovou, a zároveň též můžeme udati způsob, jak sestrojí se přímky této plochy.

Vytkněme si na Plückerově konoidu příslušném lineární kongruenci o řídicích přímkách a b libovolnou přímku y. Této přímce odpovídá určitá přímka x plochy vrcholů hyperbolických paraboloidů této lineární kongruence. Přímku tu sestrojíme způsobem následujícím: Vytkneme si libovolnou příčku l přímek a, b, y; ta protínejž tyto v bodech A, B, Y; sestrojme nyní na l bod X dle vztahu:

$$\overline{AX} + \overline{BY} = 0$$

a přímka bodem X kolmo ku ose o vedená jest hledaná přímka x naší plochy.

II.

Přistupme k odvození rovnice plochy vrcholů zborcených paraboloidů procházejících dvěma danými mimoběžkami a vyvoďme z rovnice té některé důsledky. Použijeme obyčejného systému souřadnicového.

Buďte

$$y = a; \qquad z = tg\, \alpha \,.\, x$$
$$y = -a; \qquad z = -tg\, \alpha : x$$

rovnice řídicích přímek.

Tečná rovina vrcholová X libovolného paraboloidu těmito přímkami procházejícího bude pak míti rovnici:

$$z = b + x \,.\, tg\, \beta$$

Tato rovina protíná nám naše řídicí přímky v bodech $A\,(x_1 y_1 z_1)$ a $B\,(x_2 y_2 z_2)$.

Vypočtěme si souřadnice těchto bodů:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b}{tg\,\alpha - tg\,\beta}, \quad y_1 = a, \quad & z_1 &= \frac{b\, tg\, a}{tg\,\alpha - tg\,\beta} \\ x_2 &= \frac{b}{-tg\,\alpha - tg\,\beta}, \quad y_2 = -a, \quad & z_2 &= \frac{b\, tg\,\alpha}{tg\,\alpha + tg\,\beta}. \end{aligned} \tag{1}$$

Úhly, které svírají řídicí přímky s rovinou X, budou patrně $(\beta - \alpha)$ a $(\alpha + \beta)$. Máme pak pro body Y konoidu Plückerova a pro body X našeho konoidu vztahy:

$$\frac{\overline{AY}}{\overline{BY}} = \frac{tg\,(\alpha + \beta)}{tg\,(\beta - \alpha)}$$
$$\frac{\overline{AX}}{\overline{BX}} = \frac{tg\,(\beta - \alpha)}{tg\,(\beta + \alpha)},$$

jak jsme nahoře dokázali.

Místo těchto dvou rovnic můžeme psáti:

$$\frac{x_1 - x}{x_2 - x} = \frac{y_1 - y}{y_2 - y} = \frac{z_1 - z}{z_2 - z} = \frac{tg(\beta + \alpha)}{tg(\beta - \alpha)} \tag{2}$$

$$\frac{x_1 - x}{x_2 - x} = \frac{y_1 - y}{y_2 - y} = \frac{z_1 - z}{z_2 - z} = \frac{tg(\beta - \alpha)}{tg(\beta + \alpha)} \tag{3}$$

Dosadíme-li do těchto rovnic za souřadnice bodů A a B jejich vypočtené hodnoty dle (1), tu první tři rovnice vyjadřují nám konoid Plückerův a rovnice ve druhé řádce plochu vrcholů paraboloidů.

Abychom dostali obyčejné neparametrické rovnice těchto ploch, jest třeba z každých těchto tří rovnic vyloučiti proměnné parametry b, β.

To provedeme, ačkoliv se nám jedná především o rovnici plochy druhé, k vůli úplnosti též u konoidu Plückerova.

Z rovnic (1) a (2) vychází:

$$x = -\frac{b\, tg\, \beta}{1 + tg^2 \beta}$$

$$y = -\frac{tg\, \beta (1 + tg^2 \alpha)}{tg\, \alpha (1 + tg^2 \beta)}$$

$$z = \frac{b}{1 + tg^2 \beta}.$$

Z první a třetí z těchto rovnic vychází:

$$tg\, \beta = -\frac{x}{z},$$

dosadíce tuto hodnotu za $tg\, \beta$ do rovnice druhé, dostaneme:

$$y(x^2 + z^2) - a \frac{1 + tg^2 \alpha}{tg\, \alpha} x \,.\, z = 0$$

co rovnici konoidu Plückerova.

Rovnici tu možno též psáti ve tvaru:

$$y(x^2 + z^2) - \frac{2a}{sin\, 2\alpha} x \,.\, z = 0.$$

Vraťme se nyní opět k naší ploše. Z rovnic (1) a (3) vychází:

$$x = b \, . \, tg\,\alpha \, \frac{tg^2\,\alpha + 2 + tg^2\,\beta}{(tg^2\,\beta - tg^2\,\alpha)\,(1 + tg^2\,\alpha)} \tag{4}$$

$$y = a \, \frac{tg\,\beta\,(1 + tg^2\,\alpha)}{tg\,\alpha\,(1 + tg^2\,\beta)} \tag{5}$$

$$z = b \, . \, \frac{tg\,\alpha}{tg\,\beta} \, . \, \frac{tg^2\,\alpha + 2\,tg^2\,\alpha\,tg^2\,\beta + tg^2\,\beta}{(tg^2\,\beta - tg^2\,\alpha)\,(1 + tg^2\,\alpha)} \, . \tag{6}$$

Z rovnic (4) a (6) dostáváme:

$$\frac{x}{z} = \frac{tg^2\,\alpha + 2 + tg^2\,\beta}{tg^2\,\alpha + 2tg^2\,\alpha\,tg^2\,\beta + tg^2\,\beta} \, . \, tg\,\beta \tag{6}$$

upravme dále tento výraz:

$$\frac{x}{z} = \frac{\dfrac{tg\,\beta\,(1 + tg^2\,\alpha)}{tg\,\alpha\,(1 + tg^2\,\beta)} + \dfrac{tg\,\beta}{tg\,\alpha}}{tg\,\alpha + tg\,\beta \, . \, \dfrac{tg\,\beta\,(1 + tg^2\,\alpha)}{tg\,\alpha\,(1 + tg^2\,\beta)}},$$

do poslední rovnice položme dle rovnice (5)

$$\frac{y}{a} = \frac{tg\,\beta\,(1 + tg^2\,\alpha)}{tg\,\alpha\,(1 + tg^2\,\beta)}$$

i dostáváme potom:

$$\frac{x}{z} = \frac{\dfrac{y}{a} + \dfrac{tg\,\beta}{tg\,\alpha}}{tg\,\alpha + tg\,\beta \, . \, \dfrac{y}{a}}$$

čili:

$$\frac{x}{z} = \frac{y\,tg\,\alpha + a\,tg\,\beta}{a \, . \, tg^2\,\alpha + y\,tg\,\alpha \, . \, tg\,\beta} \, .$$

Z poslední rovnice vypočteme:

$$tg\,\beta = \frac{yz\,tg\,\alpha - ax\,tg^2\,\alpha}{xy\,tg\,\alpha - az},$$

dosadíce tuto hodnotu $tg\,\beta$ do rovnice (5), totiž do rovnice:

$$y = a \, . \, \frac{tg\,\beta\,(1 + tg^2\,\alpha)}{tg\,\alpha\,(1 + tg^2\,\beta)},$$

dostáváme již rovnici našeho konoidu.

Rovnici tu upravíce, pišme ve tvaru:

$$y^3(x^2+z^2)-3xy^2za\,\frac{1+tg^2\alpha}{tg\,\alpha}+yz^2a^2\left(\frac{2}{tg^2\alpha}+1\right)$$
$$+\,yx^2\,a^2(2\,tg^2\alpha+1)-xza^3\,\frac{1+tg^2\alpha}{tg\,\alpha}=0.$$

III.

Přistupme nyní k studiu našeho konoidu na základě rovnice právě nalezené.

Hledejme průseky s rovinami rovnoběžnými s rovinou řídicí. Roviny ty mají obecně rovnici:

$$y=const,$$

což když dosadíme do rovnice našeho konoidu, dostaneme homogenní rovnici quadratickou v proměnných x, z. I vidíme, že roviny rovnoběžné s rovinou řídicí protínají naši plochu v párech přímek protínajících se na ose z. Vidíme, že plocha jest konoid přímý a osa Z jeho osou. Hledajíce průsek s rovinou $y=0$, dostáváme z rovnice naší plochy jednak

$$y=0,$$

jednak

$$z=0.$$

I vidíme, že při zavedení našeho systému souřadného jsou osy x a z povrchovými přímkami naší plochy.

Uvažujme nyní průsek našeho konoidu s rovinou jdoucí řídicí přímkou.

Svazek rovin jdoucí přímkou:

$$y=a,\quad z=tg\,\alpha\,.\,x$$

má rovnici:

$$z-tg\,\alpha\,.\,x-\lambda(y-a)=0,$$

kde λ jest proměnný parametr. Z toho:

$$y=\frac{z-x\,tg\,\alpha+\lambda\,a}{\lambda},$$

dosadíme-li tuto hodnotu za y do rovnice našeho konoidu, dostaneme po úpravě:

$$(z - x \,.\, tg\, \alpha)^2\, V = 0,$$

kde V jest jistý polynom třetího stupně v proměnných x a z. Rovnice ta nám ukazuje, že každý průsek vedený řídicí přímkou rozpadá se v tuto přímku co dvojnou a jistou křivku stupně třetího.

Podobně bychom to dokázali o druhé přímce řídicí.

Tím jsme verifikovali analyticky, co lze ze souvislosti s konoidem Plückerovým jednoduše geometricky nahlédnouti, že řídicí přímky jsou dvojnými přímkami naší plochy.

Hledejme nyní průseky rovin proložených osou konoidu. Svazek těch rovin má rovnici:

$$z = \mu x,$$

kde μ jest proměnný parametr.

Dosadíce $z = \mu x$ do rovnice naší plochy, dostaneme:

$$x^2 (a_3\, y^3 + a_2\, y^2 + a_1\, y + a_0) = 0,$$

kde a_k jsou jisté funkce α a $tg\, \alpha$. Vidíme, že průseky naše rozpadají se v osu plochy co dvojnou přímku a ve tři rovnoběžné přímky kolmé k této ose. Z toho vidno ihned, že plocha obsahuje nekonečně vzdálenou přímku roviny kolmé ku ose z a že tato přímka jest trojnou přímkou plochy.

Ve svazcích rovin vedených řídicími přímkami našeho konoidu jsou význačné roviny jdoucí zároveň osou konoidu. Roviny ty mají patrně rovnice:

$$z = x \,.\, tg\, \alpha$$
$$z = - x \,.\, tg\, \alpha.$$

Vyšetřeme průsek s první rovinou. Dosaďme $z = x\, tg\, \alpha$ do rovnice naší plochy. Dostaneme pak po úpravě:

$$x^2 (y - a)^3 (1 + tg^2\, \alpha) = 0.$$

Z toho vidíme, že roviny proložené osou konoidu a jednou přímkou dvojnou (řídicí) protínají konoid ještě v přímce, která splývá s onou přímkou dvojnou.

Všimněme si nyní přímek torsálních. U konoidu Plückerova, daného rovnicí:

$$y(x^2 + z^2) - a \cdot \frac{1 + tg^2 \alpha}{tg \alpha} x z = 0$$

obdržíme torsální přímky tohoto konoidu v průsecích jeho s rovinami

$$y = \pm a \frac{1 + tg^2 \alpha}{2tg \alpha},$$

jež jsou rovinami kuspidálními.

Přímky ty pak jsou v těchto rovinách stanoveny rovnicemi:

$$(x \pm z)^2 = 0.$$

Z geometrické souvislosti konoidu našeho a Plückerova vysvítá, že oba konoidy Plückerův i náš mají společné kuspidální roviny. Zbývá nám nyní nalézti směrnice přímek torsálních u našeho konoidu. Vyšetřujme tudíž průsek naší plochy s rovinami kuspidálními, jež mají rovnice:

$$y = \pm a \cdot \frac{1 + tg^2 \alpha}{2\, tg \alpha}.$$

Dosaďme tuto hodnotu za y do rovnice našeho konoidu, i dostaneme po jednoduché úpravě, když jsme byli celou rovnici krátili výrazem

$$a^3 \cdot \frac{1 + tg^2 \alpha}{2\, tg \alpha},$$

rovnice našich přímek torsálních:

$$[x(1 + 3\, tg^2 \alpha) \mp z(3 + tg^2 \alpha)]^2 = 0$$

$$y = \pm a \frac{1 + tg^2 \alpha}{2 \cdot tg \alpha}.$$

Jsou tudíž směrnice přímek torsálních:

$$\frac{z}{x} = \pm \frac{3 + tg^2 \alpha}{1 + 3\, tg^2 \alpha}.$$

Průsek našeho konoidu s rovinou nekonečně vzdálenou rozpadá se jednak v trojnou přímku, kterou vytíná rovina řídicí konoidu, jednak v nullovou kružnici, jejíž střed vytíná osa našeho konoidu. To lze snadno ze zhomogenisované rovnice našeho konoidu seznati. Průsek našeho konoidu a příslušného konoidu Plückerova jest patrně křivka prostorová stupně patnáctého. Ukážeme nyní, že křivka ta rozpadá se vesměs v přímky.

Přímky ty jsou:

1. dvě kolmé přímky obou ploch, které se nalézají v rovině $y = 0$.

2 přímky.

2. přímky konoidů, nalézající se v rovinách $z = x \,.\, tg\, \alpha$; $z = - x\, tg\, \alpha$. Roviny ty nám protínají náš konoid vždy ve třech splývajících přímkách, jak jsme dříve ukázali.

6 přímek.

3. osa obou konoidů, která jest přímkou dvojnou.

2 přímky.

4. trojná přímka v nekonečnu.

3 přímky.

5. nullová kružnice v nekonečnu.

2 imag. přímky.

Na Plückerově konoidu v naší poloze souřadné lze si vytknouti ∞^1 párů přímek, jež od středu tohoto konoidu až na označení jsou stejně vzdáleny a jež svírají s rovinou $(x\, y)$ úhly stejné, avšak smyslu protivného. Buďtež tyto vzdálenosti b, $-b$ a úhly β, $-\beta$, a mějmež na mysli náš konoid, tu jest:

$$b\, \frac{1 + tg^2\, \beta}{tg\, \beta} = a\, \frac{1 + tg^2\, \alpha}{tg\, \alpha}.$$

Ku každému takovému páru přímek na konoidu Plückerově přísluší určitý náš konoid. Ku každému konoidu Plückerovu přísluší tudíž svazek ∞^1 našich konoidů stupně pátého. Existuje ∞^7 konoidů Plückerových, avšak ∞^8 našich konoidů stupně pátého.

V každém svazku našich konoidů, stanoveném konoidem Plückerovým, jest význačným konoid stanovený torsálními přímkami konoidu Plückerova. Ježto torsální přímky konoidu Plükkerova jsou kolmými, bude v rovnici našeho konoidu

$$tg\, \alpha = 1.$$

Dosadíce to do rovnice našeho konoidu dostaneme rovnici tohoto specielního našeho konoidu po jednoduché úpravě ve tvaru:

$$y(y^2 + 3a^2)(x^2 + z^2) - 2a\,xz(a^2 + 3y^2) + 0.$$

Konoid tento nazveme *orthogonálným*, ježto jest stanoven dvěma kolmými mimoběžkami. Konoidů takových existuje ∞^7.

Nalezneme-li rovnice torsálních přímek tohoto konoidu dle vzorců nahoře uvedených, tu dostáváme:

$$y = \pm a \quad \frac{z}{x} = \pm 1.$$

I vidíme, že torsální a dvojné přímky konoidu orthogonálního splývají.

Další konoid význačný ve svazku našich konoidů jest konoid degenerovaný příslušný páru našich přímek splývajících. Rovnici jeho dostaneme, když položíme do obecné rovnice konoidu našeho

$$a = 0.$$

I máme

$$y^3(x^2 + z^2) = 0.$$

Tu vidíme, že náš konoid degenerovaný skládá se z trojnásobné roviny řídicí a nullového válce rotačního, opsaného ose konoidu Plückerova.

Poznámky o geodetických čarách na rotačních plochách.

Napsal **Bohuslav Hostinský**

1. Daná křivka o jisté maximální pořadnici R nechť se otáčí kolem osy úseček. Na rotační ploše takto vytvořené odpovídá oné maximální pořadnici kruh, který nazveme ekvator a který jest patrně geodetickou čárou plochy. Každá jiná geodetická čára g, ekvator protínající, jest určena 1. bodem průsečným A; 2. úhlem α, který v A svírá s ekvatorem. Průběh křivky g (pokud α nepřekročí jistou mez) jest známý: g se vzdaluje od A, protínajíc meridiany plochy v stále větších úhlech, až se