Václav Šimerka

Součty celých v lomené arithmetické posloupnosti. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 5 (1876), No. 1, 39--47

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121557

Součty celých v lomené arithmetické posloupnosti.

Sepsal

V. Šimerka.

1.

Legendre znamená ve svém díle „Essai sur la théorie des nombres“ největší celé číslo obsažené ve zlomku $\frac{k}{n}$ výrazem $E\frac{k}{n}\left(\text{entier}\,\frac{k}{n}\right)$, tak že na př. jest $E\frac{17}{5}=3$, $E\frac{7}{9}=0$; nám pak nic nevadí, proč bychom jej v tom nenásledovali. Je-li tedy t zbytek při pravidelném dělení $k:n$, bude dle toho

$$E\frac{k}{n}=\frac{k}{n}-\frac{t}{n}. \tag{1}$$

Při tom nám platí dílem proto, bychom dvojsmyslu ušli, dílem i z té příčiny, že toho další věty vyžadují, zbytek t vždy za kladný, tak že na př. $E\frac{-11}{7}=-2$ při $t=3$.

Proto je-li v $E\frac{k+\frac{t}{u}}{n}$ číslo k, ovšem že pak i n celé, $\frac{t}{u}$ pravý kladný zlomek, totiž $0<t<u$, bude

$$E\frac{k+\frac{t}{u}}{n}=E\frac{k}{n}; \tag{2}$$

neboť $k+\frac{t}{u}<k+1$, a celé postačí tu z $k:n$ určovati.

Naopak nesmí u $E\frac{k-\frac{t}{u}}{n}$ v témž případě $\frac{t}{u}$ býti vynecháno; jelikož následkem

$$E\frac{k-\frac{t}{u}}{n}=E\frac{k-1+\frac{u-t}{u}}{n}$$

celé z $(k-1):n$ určovati třeba.

2.

Mají-li a, n ve výraze $E\frac{ar+b}{n}$ největší společnou míru u, je-li tedy $a = a'u$, $n = n'u$, bude

$$E\frac{ar+b}{n} = E\frac{a'ru+b}{n'u} = E\frac{a'r+\frac{b}{u}}{n'} = E\frac{a'r+E\frac{b}{u}}{n'};$$

neboť může dle článku předešlého pravý kladný zlomek v $\frac{b}{u}$ vynechán a místo $\frac{b}{u}$ kratčeji $E\frac{b}{u}$ býti vzato.

Takť při $u = 3$ jest

$$E\frac{12r+5}{15} = E\frac{4r+\frac{5}{3}}{5} = E\frac{4r+1}{5};$$

čili při $u = 4$,

$$E\frac{8r-5}{12} = E\frac{2r-\frac{5}{4}}{3} = E\frac{2r-2}{3}.$$

Následkem toho lze $E\frac{ar+b}{n}$ vždy upraviti tak, že a, n jsou čísla nesoudělná.

3.

Jak známo, jest řadový aggregát

$$\sum_{1,\,\omega}^{r} A_r = A_1 + A_2 + A_3 + \dots A_\omega;$$

proto bude i

$$\sum_{1,\,\omega}^{r} E\frac{ar+b}{n} = E\frac{a+b}{n} + E\frac{2a+b}{n} + E\frac{3a+b}{n} + \dots E\frac{a\omega+b}{n}$$

což udává součet celých v lomené aritm. posloupnosti. Je-li zde

$$E\frac{a}{n} = \alpha, \quad E\frac{b}{n} = \beta,$$

tak že dle (1) v rovnicích

$$\frac{a}{n} = \alpha + \frac{a'}{n'}, \quad \frac{b}{n} = \beta + \frac{b'}{n}, \quad \frac{a'}{n}, \quad \frac{b'}{n}$$

pravé kladné zlomky jsou, obdržíme

$$a = \alpha n + a', \quad b = \beta n + b';$$

protož bude

$$\sum_{1,\omega}^{r} E\frac{ar+b}{n} = \sum_{1,\omega}^{r} E\frac{\alpha n r + a'r + \beta n + b'}{n} =$$

$$= \sum_{1,\omega}^{r} E\left(\alpha r + \beta + \frac{a'r + b'}{n}\right).$$

Při $\alpha r + \beta$ může býti E vynecháno, poněvadž bez toho celými jsou; protož jest

$$\sum_{1,\omega}^{r} E\frac{ar+b}{n} = \sum_{1,\omega}^{r} (\alpha r + \beta) + \sum_{1,\omega}^{r} E\frac{a'r+b'}{n}.$$

Při tom objeví se však

$$\sum_{1,\omega}^{r} \beta = \beta + \beta + \beta + \ldots (\omega\text{-krát}) = \beta\omega = \omega E\frac{b}{n},$$

jakož i

$$\sum_{1,\omega}^{r} \alpha r = \alpha \sum_{1,\omega}^{r} r = \alpha(1+2+3\ldots\omega) = \alpha(\omega+1)\frac{\omega}{2} =$$

$$= \binom{\omega+1}{2}\alpha = \binom{\omega+1}{2} E\frac{a}{n}.$$

Takto nalezneme

$$\sum_{1,\omega}^{r} E\frac{ar+b}{n} = \sum_{1,\omega}^{r} \frac{a'r+b'}{n} = \binom{\omega+1}{2} E\frac{a}{n} + \omega E\frac{b}{n}; \qquad (3)$$

čímž výraz $\sum\limits_{1,\omega}^{r} E\frac{ar+b}{n}$ tak upraviti lze, že se a, b kladnými a menšími než n stávají. U $\sum\limits_{1,7}^{r} E\frac{5r-2}{3}$ jest na př.

$$E\frac{5}{3} = 1, \quad E\frac{-2}{3} = -1, \quad a' = 2, \quad b' = 1,$$

pak

$$\sum_{1,7}^{r} E\frac{2r+1}{3} = 19 \quad \text{tedy} \quad \sum_{1,7}^{r} E\frac{5r-2}{3} = 19 + 28 - 7 = 40.$$

4.

Členy aritm. posloupnosti $a+b$, $2a+b$, $3a+b$, ..., $an+b$ mohou, pakli a, n potažná prvočísla jsou, číslem n děleny za zbytky dáti pouze čísla 0, 1, 2, ... $n-1$.

Dejme totiž tomu, že by zde dvakrát tentýž zbytek a sice při r, $r' \lesseqgtr n$ přišel, a protož i $ar'+b \equiv ar+b$ při míře čili modulu n bylo, obdržíme $ar' \equiv ar$, $(mr.\ n)$, jelikož pak a s n společného dělitele nemají $r' \equiv r$ t. j. vlastně $r' = r$, takže se r' od r neliší. Posloupnost uvedená má n členů, ty dají při dělení n zbytků, jež kladná a menší čísla než n jsou, a od sebe se liší, protož pouze $0, 1, 2, \ldots (n-1)$ býti mohou.

5.

Následkem předešlého článku nalezneme $\sum\limits_{1,n}^{r} E\frac{ar+b}{n}$ t. j. součet celých v

$$\frac{a+b}{n},\ \frac{2a+b}{n},\ \frac{3a+b}{n},\ldots \frac{an+b}{n}$$

obsažených, když od součtu členů této posloupnosti odejmeme součet pravých zlomků $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots \frac{n-1}{n}$.

Součet členů této posloupnosti jest jak známo

$$= \frac{n}{2}\left(\frac{a+b}{n}+\frac{an+b}{n}\right) = \tfrac{1}{2}(an+a+2b),$$

a součet zlomků $\frac{n-1}{2}$. Upravíme-li rozdíl ten, bude

$$\sum_{1,n}^{r} E\frac{ar+b}{n} = b - n + \tfrac{1}{2}(a+1)(n+1), \qquad (4)$$

což vždy celé číslo jest; poněvadž a, n spolu sudy býti nemohou. Ku př.

$$\sum_{1,11}^{r} E\frac{4r+5}{11} = 5 - 11 + 30 = 24.$$

6.

Mnoho-li obnáší $\sum\limits_{1,nv}^{r} E\frac{ar+b}{n}$, kde a, n nesoudělná čísla jsou?

Pro snadnější přehled určeme nejprvé hodnotu

$$A_\varphi = \sum_{(\varphi-1)n+1,\varphi n}^{r} \Sigma\, \frac{ar+b}{n};$$

t. j. rozdělme si daný aggregat ve

$$\sum_{1,n}^{r} E\frac{ar+b}{n} + \sum_{n+1,\,2n}^{r} E\frac{ar+b}{n} + \sum_{2n+1,\,3n}^{r} E\frac{ar+b}{n} \ldots A_\varphi \ldots A_v,$$

hledejme pak nejprvé výraz pro A_φ co obecný člen této řady.

Aggregat z podoby $\sum_{g,h}^{r} B_r$ nemění se, zmenšíme-li meze g, h o kterékoli celé číslo, jestliže spolu ukazovatele r o totéž číslo zvětšíme; poněvadž

$$\sum_{g,h}^{r} B_r = \sum_{g-\alpha,\,h-\alpha}^{r} B_{(r+\alpha)} = B_g + B_{(g+1)} + B_{(g+2)} \ldots B_h$$

jest.

Vezmeme-li tedy svrchu při A_φ, $\alpha = (\varphi - 1)\,n$, bude

$$A_\varphi = \sum_{1,n}^{r} E\frac{a(r+\varphi n - n) + b}{n} = \sum_{1,n}^{r}\left(E\frac{ar+b}{n} + a\varphi - a\right)$$

$$= \sum_{1,n}^{r} E\frac{ar+b}{n} + \sum_{1,n}^{r} (a\varphi - a).$$

Poněvadž zde φ od r nezávisí, obdržíme

$$\sum_{1,n}^{r} (a\varphi - a) = an\,\varphi - an$$

t. j. řada ona má n položek, z nichž každá $a\varphi - a$ jest.

To k rovnici (4) přičteno dává

$$A_\varphi = b - (a+1)\,n + \tfrac{1}{2}(a+1)(n+1) + an\,\varphi,$$

a vyjme-li se zde u prostředních položek $a+1$ co společný činitel, bude

$$A_\varphi = b - \tfrac{1}{2}(a+1)(n-1) + an\,\varphi.$$

Z předešlého však patrno, že

$$\sum_{1,nv}^{r} E\frac{ar+b}{n} = \sum_{1,v}^{\varphi} A_\varphi,$$

tedy i

$$= \sum_{1,v}^{\varphi} b - \sum_{1,v}^{\varphi} \tfrac{1}{2}(a+1)(n-1) + \sum_{1,v}^{\varphi} an\,\varphi.$$

Poněvadž pak

$$\sum_{1,v}^{\varphi} b = 60, \quad \sum_{1,v}^{\varphi} \tfrac{1}{2}(a+1)(n-1) = \frac{v}{2}(a+1)(n-1),$$

$$\sum_{1,v}^{\varphi} an\,\varphi = an \sum_{1,v}^{\varphi} \varphi = an\,(1+2+3\ldots v) = \frac{v\,(v+1)}{2}\,an,$$

bude hledaný součet

$$= bv - \frac{v}{2}(a+1)(n-1) + \tfrac{1}{2}v(v+1)an$$

čili

$$\sum_{1,nv}^{r} E\frac{ar+b}{n} = \frac{v}{2}\left[2b - (a+1)(n-1) + (v+1)an\right]. \quad (5)$$

Tak jest

$$\sum_{1,44}^{r} E\frac{2r+5}{11} = 180.$$

Při tom nemusí býti vždy a, b kladné neb $< n$. Na př.

$$\sum_{1,9}^{r} E\frac{-r+1}{3} = -15;$$

$$\sum_{1,10}^{r} E\frac{6r+8}{5} = 78.$$

7.

Není-li ω číslem n dělitelné, třeba za nv vzíti nejblíže menší násobné z n, a k množství rovnice (5) nalezenému přičísti ještě $\sum\limits_{nv+1,\omega}^{r} E\frac{ar+b}{n}$ t. j. součet celých v $\frac{ar+b}{n}$ při $r = nv+1, nv+2, \ldots \omega$. Zmenšíme-li v aggregatu tom meze o nv zvětšivše o tolik r, obdržíme napotom

$$\sum_{nv+1,\omega}^{r} E\frac{ar+b}{n} = \sum_{1,\omega-nv}^{r} E\frac{a(r+nv)+b}{n} = \sum_{1,\omega-nv}^{r}\left(av + E\frac{ar+b}{n}\right)$$

$$= av(\omega - nv) + \sum_{1,\omega-nv}^{r} E\frac{ar+b}{n};$$

čímž se počet kratším stává. Tak dává na př.

$$H = \sum_{92,97}^{r} E\frac{5r-1}{13}$$

při $a = 5$, $n = 13$, $v = 7$, $\omega = 97$

$$H = 35 \times 6 + \sum_{1,6}^{n} E\frac{5r-1}{13} = 210 + 5.$$

Byloliby však $\omega - nv > \frac{1}{2}n$, jest s výhodou v o jednici zvětšiti, tak že $nv - \omega < \frac{1}{2}n$, a od součtu $\sum\limits_{1,nv}^{r} E\frac{ar+b}{n}$ odejmouti

$$\sum_{\omega+1, nv}^{r} E\frac{ar+b}{n} = \sum_{1, nv-\omega}^{r} E\frac{a(r+\omega)+b}{n} = \sum_{1, nv-\omega}^{r} E\frac{ar+a\omega+b}{n},$$

kdež s výhodou sumovné rovnice (3) použíti lze.

Bylo-liby na př. hledati $\sum\limits_{1, 100}^{r} E\frac{4r-1}{15}$, nalezneme

$\sum\limits_{1, 105}^{r} E\frac{4r-1}{15}$ při $a=4$, $b=-1$, $n=15$, $v=7$ dle (5) $=1918$.

Napotom dává

$$\sum_{101, 105}^{r} E\frac{4r-1}{15} = \sum_{1, 5}^{r} E\frac{4r+399}{15} = \sum_{1, 5}^{r} E\frac{4r+9}{15} + 130 = 134;$$

a hledané množství obnáší 1784.

8.

Mají-li v rovnicích $x = mr - nz$, $y = -m'r + n'z$ býti neznámé x, y, z, r vesměs celá čísla a > 0, protož i $mr > nz$, $n'z > m'r$ čili

$$\frac{mr}{n} > z > \frac{m'r}{n'} \text{ t. j. } \frac{m}{n} > \frac{z}{r} > \frac{m'}{n'}, \qquad (6)$$

vyžaduje úkol ten, aby $\frac{m}{n} > \frac{m'}{n'}$ bylo; pak ale jest $\frac{z}{r}$ nesčíslného množství hodnot schopno, jež udávají zlomky mezi $\frac{m}{n}$ a $\frac{m'}{n'}$ ležící, jimž při libovolných kladných hodnotách φ, ψ podobu $\frac{m\varphi + m'\psi}{n\varphi + n'\psi}$ dáti lze. Chceme-li tedy zde o počtu řešení mluviti, musíme hořejší neznámé náležitě obmeziti. Nejkratší způsob takového obmezování jest ustanoviti, že na př. r jistou hodnotu ω nepřesahuje, t. j. že pouze $r = 1, 2, 3, \ldots \omega$ vzíti se má. Pak obdržíme při téže hodnotě r dle první z nerov. (6), $E\frac{mr-1}{n} - E\frac{m'r}{n}$ hodnot pro z, jež hořejším podmínkám zadost činí. Zde třeba $E\frac{mr-1}{n}$ bráti, ne pak $E\frac{mr}{n}$, aby se, když r násobné z n jest, nestalo $\frac{mr}{n} = z$. Tak jest na př. u

$$x = 2r - 3z,\ y = -3r + 5z,\ \frac{2r}{3} > z > \frac{3r}{5},$$

to dává při

$$r = 41,\ \frac{82}{3} = 27\tfrac{1}{3} > z > \frac{123}{5} = 24\tfrac{3}{5},$$

a z má tři hodnoty totiž 25, 26, 27; jest pak

$$E\frac{81}{3} - E\frac{123}{5} = 27 - 24.$$

$$\text{U}\quad r = 40,\ \frac{80}{3} = 26\tfrac{2}{3} > z > \frac{120}{5} = 24,$$

má z dvě hodnoty 25, 26 a

$$E\frac{79}{3} - E\frac{120}{5} = 26 - 24.$$

Při $r = 42$ jdou dle $28 > z > \frac{126}{5} = 25\tfrac{1}{5}$ pro z hodnoty 26, 27 a

$$E\frac{83}{3} - E\frac{126}{5} = 27 - 25.$$

U $r = 45$ jest $30 > z > 27$; $z = 28$, 29 a

$$E\frac{89}{3} - E\frac{135}{5} = 2.$$

První okolnost svědčí případům, kde r není ani číslem n ani číslem n' dělitelné; druhá, kde r pojde při n', ne však při n; třetí, kde se to naopak stává; a čtvrtá konečně, kde n i n' jsou dělitelé čísla r.

Ptáme-li se napotom na součet všech řešení od $r = 1$ až do $r = \omega$ včetně, netřeba než rozdíl $E\frac{mr-1}{n} - E\frac{m'r}{n}$ v těchto mezích sumovati, a hledané množství bude

$$S = \sum_{1,\omega}^{r} E\frac{mr-1}{n} - \sum_{1,\omega}^{r} \Sigma\frac{m'r}{n'}. \tag{7}$$

Je-li v tomto případě, jakž se častěji stává, $E\frac{m}{n} = E\frac{m'}{n'}$, bude v obou aggregatech dle (3) součet takových celých $= \binom{\omega+1}{2} E\frac{m}{n}$, protož může býti pominut.

Tak obdržíme z hořejších příkladů při $r = 20$

$$S = \sum_{1,20}^{r} E\frac{2r-1}{3} - \sum_{1,20}^{r} E\frac{3r}{5};$$

tu pak jest

$$\sum_{1,18}^{r} E\frac{2r-1}{3} = 102, \quad E\frac{37}{3} = 12, \quad E\frac{39}{3} = 13,$$

pak

$$\sum_{1,20}^{r} E\frac{3r}{5} = 118, \text{ tedy } S = 9,$$

jsou pak to řešení

$$\begin{aligned} r &= 8,\ 11,\ 13,\ 14,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 10. \\ z &= 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 11,\ 12,\ 13. \\ x &= 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 1. \\ y &= 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 4,\ 2,\ 3,\ 5. \end{aligned}$$

(Dokončení.)

Věstník literární.

V poslední době byla naše literatura mathematicko-fysikální rozmnožena několika školními knihami, o nichž se tuto blíže chceme zmíniti.

Především tu sluší jmenovati objemnou knihu s názvem

Dra Frant. ryt. Močníka

Arithmetika i algebra

pro vyšší třídy škol středních.

Dle 14. vydání přeložil a dodatky spisovatelovými opatřil

F. A. Hora.

Nehledíce k vnitřní ceně mathematických spisů p. Močníkových vůbec o níž nepanuje stejné mínění, a majíce zřetel k nynějšímu plánu vyučovacímu, jehož zřízení, co se tkne mathematiky, taktéž není ode všech za nejvhodnější uznáno, můžeme tento překlad obecné arithmetiky a algebry — pan spisovatel tu nedělí tak přesně jako na př. Baltzer — považovati za skutečné obohacení naší školní literatury, ač právě v tomto oboru spisy *Fleišerovy, Smolíkovy* a *Jandečkovy* velmi slušně vyhovují potřebám školním. Při tom budiž ještě zvláště poznamenáno, že p. spisovatel v posledních vydáních připojil mnohé odstavce, které činí knihu sice objemnější, nikoliv však důkladnější. Co na př. uvádí o kovergenci a divergenci řad, jest nanejvýš chatrné a nepatří ani do středních škol, ba druhé z tří tam uvedených pravidel jest nesprávné, jakž na př. i řada

$$1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1.3}{2.4.5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} + \ldots = \frac{\pi}{2}$$

dokazuje, jsouc konvergentní, ač podlé pravidla 2. pag. 207. by měla býti divergentní. Totéž platí o řešení vyšších rovnic číselných, o nichž podán