Zdeněk Pírko

Úpatnice a pseudoúpatnice. [Ia.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 3, R29--R33

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121512

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYSIKY

ROZHLEDY

Úpatnice a pseudoúpatnice.

Zdeněk Pírko.

1. Již staří matematikové používali v podstatě dvou metod, syntetické a kinematické, aby získali speciální rovinné křivky vyšších stupňů. V prvém případě křivka vzniká určitou konstrukcí z daných prvků jednodušších (z bodů, přímek, kružnic atd.); v případě druhém je určitým způsobem definován pohyb bodu (přímky atd.) a hledáme jeho geometrické místo (obálku). V pozdější době přistoupila třetí metoda, analytická, při níž buďto požadujeme, aby byly splněny určité vztahy mezi elementy křivky, nebo křivku podrobujeme určitým podmínkám. Jestliže pak tyto vztahy nebo podmínky formulujeme analyticky, dospíváme buďto k rovnici křivky přímo nebo k t. zv. rovnici diferenciální, z níž teprve rovnici křivky obdržíme zvláštním postupem.

Přirozeně, že mezi těmito metodami není žádné ostré hranice; naopak často můžeme snadno výsledky metody kinematické nebo analytické vyložiti metodou syntetickou a obráceně.

V tomto článku podáme *dvě* takové *geometrické konstrukce*, pomocí nichž lze získati *řadu nových křivek*. Především bude nám záležeti na rovnicích těchto křivek; použijeme tudíž metod geometrie analytické.

2. *Úpatnicí dané rovinné křivky* (křivky základní) *vzhledem k pevnému bodu* (pólu) *nazýváme geometrické místo pravoúhlých průmětů tohoto bodu do všech tečen této křivky.*

Zvolme *pól* v počátku pravoúhlé soustavy souřadné; rovnice křivky základní budiž pak

$$f(x, y) = 0.^{*)} \tag{1}$$

Rovnice tečny k této křivce v bodě (x, y) a kolmice na tečnu z pólu mají v souřadnicích ξ, η rovnice

$$(\xi - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \xi\frac{\partial f}{\partial y} - \eta\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

*) O funkci $f(x, y)$ předpokládáme, že je spojitá a má derivace spojité.

Z těchto rovnic vypočteme snadno

$$\xi = \frac{\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial x}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}, \quad \eta = \frac{\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial y}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}; \tag{2}$$

obdržíme tedy úpatnici křivky dané rovnicí (1) vzhledem k počátku jako pólu, jestliže eliminujeme x, y z rovnic (1), (2); výsledek je tvaru

$$F(\xi, \eta) = 0. \tag{3}$$

Poznámka. Obrázky vztahují se k následujícímu textu; křivky vytažené slabě (a označené Γ_0) značí vždy křivku základní, křivky vytažené silně (označené Γ_1) úpatnici této křivky základní vzhledem k počátku jako pólu, křivky vytažené čerchovaně (označené Γ_p) pseudoúpatnici této křivky základní vzhledem k oné soustavě, k níž je vztažena křivka základní.

3. Křivkou *Laméovou* indexu n nazývá se křivka s rovnicí (a, b, n dané veličiny)

$$f(x, y) \equiv \left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n - 1 = 0. \tag{4}$$

Z této rovnice určíme $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ a tyto vztahy dosadíme do rovnic (2); na úpravu čitatelů zlomků takto získaných použijeme rovnice (4), nalezneme tak

$$\xi = \frac{a^n b^{2n} x^{n-1}}{b^{2n} x^{2(n-1)} + a^{2n} y^{2(n-1)}}, \quad \eta = \frac{a^{2n} b^n y^{n-1}}{b^{2n} x^{2(n-1)} + a^{2n} y^{2(n-1)}}.$$

Dělením těchto rovnic máme

$$a^n y^{n-1} \xi = b^n x^{n-1} \eta;$$

kombinujeme-li tuto rovnici s rovnicí (4), obdržíme tyto výrazy pro x, y

$$x = \frac{a^{\frac{n}{n-1}} \xi^{\frac{1}{n-1}}}{\left[(a\xi)^{\frac{n}{n-1}} + (b\eta)^{\frac{n}{n-1}}\right]^{\frac{1}{n}}}, \quad y = \frac{b^{\frac{n}{n-1}} \eta^{\frac{1}{n-1}}}{\left[(a\xi)^{\frac{n}{n-1}} + (b\eta)^{\frac{n}{n-1}}\right]^{\frac{1}{n}}}.$$

Dosadíme-li tyto výrazy do některé z rovnic pro ξ nebo η, dostaneme po úpravě rovnici úpatnice Laméovy křivky (4) vzhledem k počátku jako pólu ve tvaru

$$F(\xi, \eta) \equiv (\xi^2 + \eta^2)^{\frac{n}{n-1}} - (a\xi)^{\frac{n}{n-1}} - (b\eta)^{\frac{n}{n-1}} = 0. \tag{5}$$

Mezi Laméovými křivkami je pro speciální hodnoty indexu n zahrnuta řada známých křivek a jejich úpatnice můžeme snadno určiti na základě rovnice (5). Všimněme si některých.

a) $n = \frac{1}{2}$; pro jednoduchost položme $a = b$ (obr. 1). Křivkou základní

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{a} = 0 \text{ čili } (x - y)^2 - 2a\,(x + y) + a^2 = 0 \qquad (6)$$

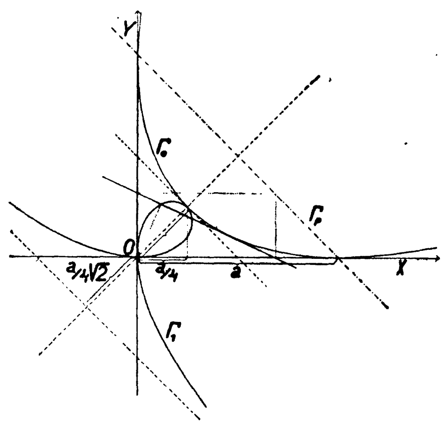
je kvadratická parabola s vrcholem $(\frac{1}{4}a, \frac{1}{4}a)$, s osou svírající s osou úseček úhel $\frac{1}{4}\pi$, s parametrem $2p = a\sqrt{2}$ a dotýkající se souřadných os v bodech $(a, 0)$, $(0, a)$.

Úpatnicí této paraboly je *přímá strofoida*, jejíž kartézská a polární rovnice (kterou obdržíme transformací $\xi = \varrho \cos \varphi$, $\eta = \varrho \sin \varphi$) mají tvar

$$(\xi^2 + \eta^2)\,(\xi + \eta) - a\xi\eta = 0,$$

$$\varrho = \tfrac{1}{2}a \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi + \cos \varphi}. \qquad (7)$$

Přímá strofoida jest tedy křivka stupně třetího; její obvyklý tvar obdržíme, otočíme-li osu úseček o úhel $-\frac{1}{4}\pi$, t. j. píšeme-li v druhé z rovnic (7) místo φ výraz $\frac{1}{4}\pi + \varphi$, tedy



Obr. 1.

$$\varrho = \tfrac{1}{4}a\sqrt{2}\, \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}. \qquad (7')$$

b) Pro $n = 1$ představuje rovnice (4) přímku s rovnicí

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0, \qquad (8)$$

pro tuto hodnotu indexu však ztrácí rovnice (5) význam; přímo nalezneme, že úpatnicí přímky (8) vzhledem k počátku jako pólu je *bod*

$$\left(\frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}\right), \qquad (9)$$

paťa kolmice z počátku spuštěné na přímku (8).

c) $n = \frac{2}{3}$; pro jednoduchost položme $a = b$ (obr. 2). Křivkou základní je astroida, křivka stupně šestého,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0 \text{ čili } (x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27a^2x^2y^2 = 0; \qquad (10)$$

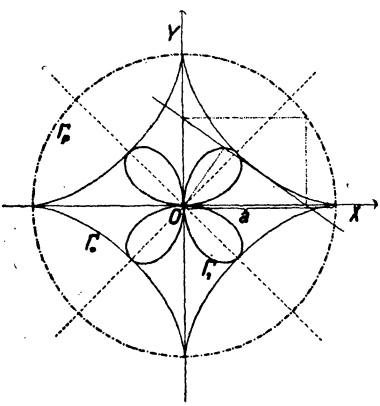
její úpatnicí vzhledem k počátku jako pólu je t. zv. *čtyrlístek*, křivka také stupně šestého,

$$(\xi^2 + \eta^2)^3 - a^2\xi^2\eta^2 = 0 \text{ čili } \varrho = \tfrac{1}{2}a \sin 2\varphi. \qquad (11)$$

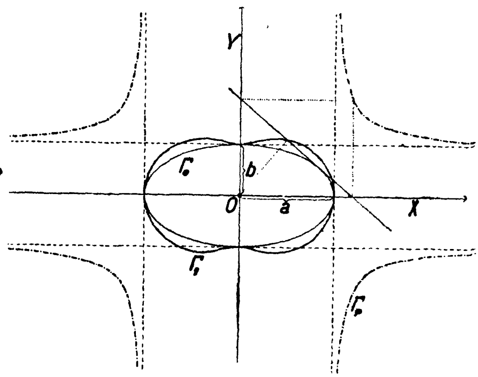
d) $n = 2$; v rovnici (4) můžeme položiti také místo b výraz ib (kde $i = \sqrt{-1}$), dostáváme tak elipsu resp. hyperbolu

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0; \qquad (12)$$

jejich úpatnice, které jsou stupně čtvrtého, mají rovnice



Obr. 2.



Obr. 3.

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 - a^2\xi^2 \mp b^2\eta^2 = 0 \text{ čili } \varrho^2 = a^2 \cos^2\varphi \pm b^2 \sin^2\varphi; \qquad (13)$$

je to *eliptická* (obr. 3) resp. *hyperbolická lemniskata Boothova*. Speciálně jako úpatnici rovnoosé hyperboly vzhledem k počátku jako pólu nalezneme *lemniskatu Bernoulliho*

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 - a^2(\xi^2 - \eta^2) = 0 \text{ čili } \varrho^2 = a^2 \cos 2\varphi. \qquad (13')$$

e) $n = -1$; pro jednoduchost položme $a = b$ (obr. 4). Křivkou základní je rovnoosá hyperbola

$$\frac{a}{x} + \frac{a}{y} - 1 = 0 \text{ čili } (x - a)(y - a) - a^2 = 0, \qquad (14)$$

mající střed v bodě (a, a), asymptoty rovnoběžné s osami souřadnými a jdoucí počátkem. Její úpatnice je stupně čtvrtého

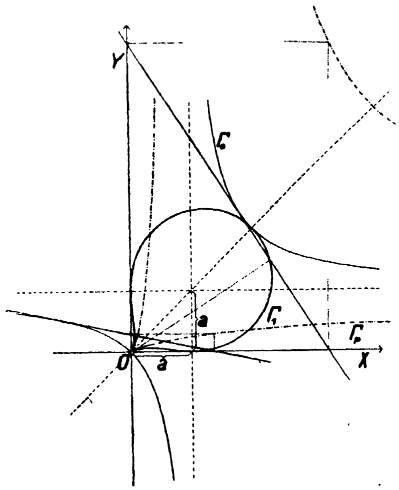
$$(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2a(\xi + \eta)(\xi^2 + \eta^2) + a^2(\xi - \eta)^2 = 0; \qquad (15)$$

nazývá se *křivkou Wieleitnerovou*.

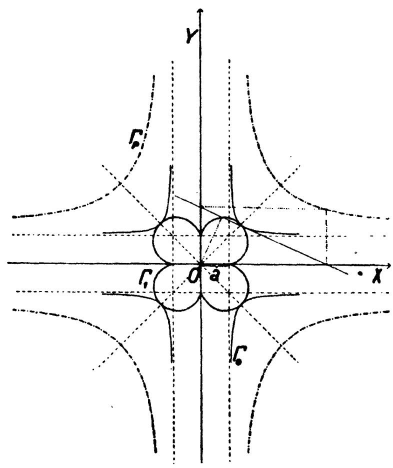
f) Nechť posléze $n = -2$; v rovnici (4) můžeme opět položiti místo b také výraz ib, dostáváme tak eliptickou resp. hyperbolickou stauroidu

$$x^2y^2 \mp b^2x^2 - a^2y^2 = 0. \tag{16}$$

Pro jednoduchost položme dále $a = b$, t. j. vyšetřujme případy „rovnoosé". Nalezneme tak obě úpatnice



Obr. 4.



Obr. 5.

$$(\xi^2 + \eta^2)(\xi^2 + \eta^2 - a^2)^3 - 27a^4\xi^2\eta^2 = 0, \tag{17'}$$

$$[(\xi^2 + \eta^2)^2 - a^2(\xi^2 - \eta^2)]^3 + 27a^4\xi^2\eta^2(\xi^2 + \eta^2)^2 = 0; \tag{17''}$$

rovnice (17′) představuje křivku stupně osmého (obr. 5), rovnice (17″) křivku stupně dvanáctého. (Pokračování.)

O dvojitém logaritmickém papíru.

V. Pleskot.

Pozměňme si pravoúhlou soustavu souřadnou v tom smyslu, že na osy souřadné vyneseme nikoli čísla, ale jejich dekadické logaritmy. To znamená, že při zvolené základní jednotce, zvané modul, vyneseme na osu úseček (ξ) od počátku O (viz obr. 1)*) číslo x podle rovnice

$$\xi = \alpha \log x \tag{a}$$

(α je modul) a ke konci té úsečky pak připíšeme číslo x, což tedy

*) V obrazcích je všude psáno Log x místo log x.