Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Pleskot

Vznik kuželoseček svazky kruhovými a některé věty z toho plynoucí

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 44 (1915), No. 4-5, 457--463

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121496

Vznik kuželoseček svazky kruhovými a některé věty z toho plynoucí.

Dr. **Ant. Pleskot**, professor v Plzni.

Podnět ku článku tomuto dán mi byl článkem Dr. Tech. Jos. Kuhna, uveřejněným v ročníku 1914 časopisu „Zeitschrift für das Realschulwesen“. V článku tom uvádí vznik hyperboly rovnoosé svazky kruhovými. Ukážeme, že vznik hyperboly rovnoosé svazky kruhovými jest jen zvláštním případem obecného vzniku kuželoseček svazky kruhovými.

Budiž dána přímka, již volme za osu X; dále nechť jsou dány body A a B, k nimž sestrojme body souměrné dle osy X, jež označme A_1, B_1. Body A a A_1 proložme libovolnou kružnici K_1, jejíž střed na ose budiž S_1; kružnici K_1 přiřaďme kružnici K_2, která prochází body B a B_1 a jejíž střed S_2 jest od S_1 vzdálen o danou délku d; při tom d značiti může délku kladnou neb i zápornou.

Tu platí věta: Průsečíky kružnic K_1 a K_2 při stálém d vytvořují kuželosečku, jejíž osou jest osa X.

Je-li (obr. 1.) průsečík úsečky AA_1 s osou X A_2, průsečík BB_1 s touže osou B_2, a volíme-li střed O úsečky A_2B_2 za počátek souřadnic, pak možno souřadnice bodu A označiti $(-a, b_1)$, bodu B (a, b_2); je-li dále úsečka středu S_1, p_1, úsečka středu S_2, p_2, takže

$$p_2 - p_1 = d,$$

pak rovnice kruhu K_1 zní:

$$(x - p_1)^2 + y^2 = (p_1 + a)^2 + b_1^2,$$

kruhu

$$K_2 : (x - p_2)^2 + y^2 = (p_2 - a)^2 + b_2^2.$$

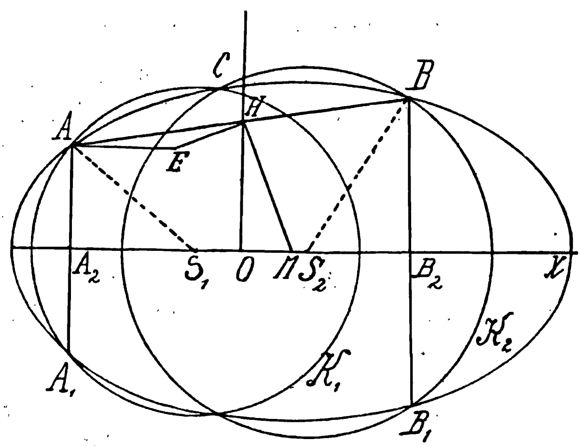
Z rovnic těchto plyne

$$p_1 = \frac{x^2 + y^2 - a^2 - b_1^2}{2(x + a)},$$

$$p_2 = \frac{x^2 + y^2 - a^2 - b_2^2}{2(x - a)},$$

a ježto $p_2 - p_1 = d$, jest hledaným geometrickým místem průsečíků kružnic křivka

$$\frac{x^2 + y^2 - (a^2 + b_2^2)}{2(x - a)} - \frac{x^2 + y^2 - (a^2 + b_1^2)}{2(x + a)} = d.$$



Obr. 1.

Odstraněním jmenovatele přechází ve tvar

$$\begin{aligned} & x^2(a - d) + ay^2 + \frac{x}{2}(b_1^2 - b_2^2) - \\ & \frac{a}{2}(2a^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2ad) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Jest tedy geometrickým místem kuželosečka, jejíž osou jest osa X.

Je-li

$$d > a,$$

jest kuželosečka hyperbolou, je-li

$$d < a,$$

jest ellipsou, a pro

$$d = a,$$

parabolou; jest ovšem možno, že ve zvláštních případech kuželosečka degeneruje v soustavu přímek.

Kuželosečka (1) prochází základními body A, A_1, B, B_1, jakž snadno se přesvědčíme, dosadíme-li souřadnice těchto bodů do rovnice křivky; to ostatně plyne z vět obecných, týkajících se vzniku křivek svazky.

Tohoto vzniku kuželoseček možno použíti ku konstrukci kuželosečky středové dané osou a třemi body A, B, C, dále ku konstrukci paraboly dané osou a dvěma body A, B. V případě prvém stanovíme symmetrály úseček AC a BC; prvá protne osu X v bodě S_1, druhá v bodě S_2; délka S_1S_2 jest tím dána a možno dále řadu příslušných kruhů K_1 a K_2 rýsovati a tím i kuželosečku.

V případě druhém, je-li rýsovati parabolu danou osou a dvěma body A a B, sestrojíme body A_2, B_2, paty to kolmic s bodu A a B na osu spuštěných, a pak $d = \frac{A_2B_2}{2}$.

Hledejme nyní střed křivky!

Dle rovnice (1) jest úsečka ξ středu M kuželosečky dána rovnicí

$$\xi = \frac{b_2^2 - b_1^2}{4(a-d)},$$

kterou lze takto narýsovati:

Veďme bodem A rovnoběžku s osou a nanesme na ni délku

$$AE = d;$$

spojíme-li bod E se středem H úsečky AB, pak kolmice v bodě H kolmo ku EH vedená protne osu X v bodě M, který jest středem kuželosečky (1).

Jsou totiž souřadnice bodu $E\,(-a+d,\ b_1)$ bodu $H\left(0,\ \frac{b_1+b_2}{2}\right)$; rovnice přímky HM pak zní

$$y - \frac{b_1+b_2}{2} = -\frac{-a+d}{b_1 - \frac{b_1+b_2}{2}}x,$$

a průsečík s osou X má tedy úsečku

$$x = \frac{b_2^2 - b_1^2}{4(a-d)};$$

jak bylo dokázati. Je-li střed, osa kuželosečky polohou svou dána, jakož i dva body její, pak známým způsobem lze délky os určiti.

Tím řešena i úloha z polohy osy kuželosečky a tří bodů A, B, C cestou elementární, rozhodnouti o druhu kuželosečky, narýsovati střed a délky os.

Splyne-li bod C s bodem A neb B, pak dostáváme řešení úlohy:

Sestrojiti kuželosečku danou osou, dvěma body a tečnou v jednom z bodů daných

V případě, že $a = d$, lze parametr a tedy i vrchol příslušné paraboly snadno narýsovati.

Rovnice (1) nabývá nyní tvaru

$$ay^2 + \frac{x}{2}(b_1^2 - b_2^2) - \frac{a}{2}(b_1^2 + b_2^2) = 0,$$

čili

$$y^2 = \frac{b_2^2 - b_1^2}{2a}\left(x - \frac{b_1^2 + b_2^2}{b_1^2 - b_2^2}\,a\right).$$

Označíme-li p parametr této paraboly, tu

$$2p = \frac{b_2^2 - b_1^2}{2a},$$

$$p = \frac{b_2^2 - b_1^2}{4a}.$$

Délku p lze konstruovati stejně, jako jsme hledali nahoře střed kuželosečky. Protíná-li spojnice AB kolmici ve středu O úsečky A_2B_2 vztyčenou v bodě H, pak kolmice v bodě H na AB vztyčená protne osu X v bodě N, a tu

$$ON = \frac{b_2^2 - b_1^2}{4a} = p.$$

Známe-li parametr p, lze snadno vrchol paraboly narýsovati. Současně dospíváme ku větě: Symmetrála spojnice kterýchkoli dvou bodů A a B na parabole protne osu paraboly v bodě, jehož vzdálenost od středu pravoúhlých průmětů bodů A a B na osu jest konstantní, rovnající se parametru p.

Známá věta, že subnormála paraboly jest konstantní, jest zvláštním případem této obecné věty, neboť jsou-li body A a B nekonečně blízko u sebe, přechází spojnice jich v tečnu a symmetrála v normálu.

Poněvadž v rovnici (1) vyskytují se veličiny b_1 a b_2 jen ve čtverci, možno místo b_1 a b_2 psáti ib_1 a ib_2 a koefficienty rovnice zůstávají reálné; i druh kuželosečky touto záměnou se nemění. Kružnice K_1 a K_2 jdoucí nyní imaginárními konjugovanými body $(-a, \pm ib_1)$ a $(a, \pm ib_2)$ rýsujme dle známého způsobu tak, že nejprve nad průměry AA_1, BB_1 sestrojíme pomocné kružnice k_1 a k_2 a pak kružnice K_1 a K_2, které svůj střed na ose X mají, kružnici k_1, resp. k_2 pravoúhle protínají, při čemž střed kruhu K_2 od středu kruhu K_1 vzdálen jest o konstantní délku d, vytvořují svými průsečíky kuželosečku, jejíž rovnice z rovnice (1) plyne, nahradíme-li b_1^2, b_2^2 veličinami $-b_1^2$, $-b_2^2$.

Zvláštní případ jednoduchý nastane, položíme-li v rovnici (1)

$$b_1 = b_2 = b;$$

pak obdržíme křivku

$$x^2 (a - d) + ay^2 = a (a^2 + b^2 - ad),$$

kteráž značí kuželosečku, jejíž střed jest ve středu úsečky A_2B_2. Je-li $a > d$, značí ellipsu, je-li $d > a$, hyperbolu; platí-li v druhém případě ještě podmínka

$$d < a + \frac{b^2}{a},$$

pak imaginární osa této hyperboly shoduje se s osou X, je-li však $d > a + \frac{b^2}{a}$, pak ztotožňuje se s osou X osa reálná hyperboly. Je-li konečně $d = a + \frac{b^2}{a}$, pak rozpadá se kuželosečka ve dvojici přímek.

Nejjednodušší však případ vzniku kuželoseček svazky kruhovými jest ten, kdy

$$b_1 = b_2 = 0;$$

pak svazky tyto značí svazky vzájemně se dotýkající.

Rovnice (1) přejde v rovnici

$$x^2 (a - d) + ay^2 = (a - d) a^2.$$

Narýsujeme-li tedy řadu kružnic K_1 dotýkajících se v bodě A a řadu kružnic K_2 dotýkajících se v bodě B a je-li střed S_2 každé druhé od středu S_1 každé prvé na přímce AB vzdálen o délku d, pak geometrickým místem průsečíků kružnic K_1 a K_2 jest středová kuželosečka, jejíž střed jest střed úsečky AB.

Označíme-li poloosy této kuželosečky a_1, b_1, pak

$$\begin{aligned} a_1 &= a, \\ b_1 &= \sqrt{a(a-d)}. \end{aligned} \qquad (\alpha)$$

Je-li naopak kuželosečka dána svými osami $2a_1$ a $2b_1$, možno výsledku předešlého použíti k její konstrukci.

Nechť jsou A a B vrcholy reálné osy kuželosečky a C a D vrcholy reálné osy druhé, značí-li tato ellipsu a vrcholy imaginárné osy, značí-li tato hyperbolu.

Na přímku AC v bodě C vztyčme kolmici, která protne osu AB v bodě H; i jest pak v případě, že křivka značí hyperbolu

$$d = AH,$$

v případě, že značí ellipsu

$$d = HB.$$

Rýsujeme-li tedy kruhy K_1 jdoucí bodem A a mající své středy S_1 na ose AB a kruhy K_2 mající své středy S_2 na téže ose a jdoucí bodem B tak, aby středy ty vzdáleny byly od sebe o délku AH resp. HB, pak v případě prvém průsečíky kruhů příslušných vytvoří hyperbolu o ose reálné AB a imaginárné CD, v druhém případě ellipsu o reálných osách AB a CD. To plyne z rovnic (α).

Naopak z úvahy, kterou jsme provedli, plyne tato obecná věta o kuželosečkách:

Vyvolíme-li kterékoli dva pevné body A a B na kuželosečce a je-li C libovolným bodem kuželosečky, pak protínají symmetrály úseček AC a BC kteroukoli osu kuželosečky v bodech S_1 a S_2 a tu odlehlost $S_1 S_2$ jest veličina stálá.

V ročníku XLI. str. 229 podal p. vládní rada Jeřábek jistou větu o kuželosečkách, již jsem pak zobecnil. Věta zde uvedená jest jiným zobecněním věty p. Jeřábkem uvedené, neboť splynou-li body A a B s vrcholy kuželosečky, pak dospějeme ihned ku větě p. Jeřábkem vyslovené.

Příspěvek k analytické geometrii kuželoseček.

Dr. Karel Čupr.

(Dokončení.)

Když $\partial < 0$, jsou to přímky reálné, když $\partial > 0$, jsou to přímky imaginárné, v obou případech s průsečíkem reálným v konečnu. Když $\partial = 0$, jsou to přímky rovnoběžné nebo splývající; o jich realitě rozhodneme takto:

Stanovme rovnice přímek, v něž se kuželosečka rozpadá. Jest pak

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} =$$
$$(\sqrt{a_{11}} \,.\, x + \sqrt{a_{22}} \,.\, y + q_1)(\sqrt{a_{11}} \,.\, x + \sqrt{a_{22}} \,.\, y + q_2);$$

odsud plyne

$$q_1 + q_2 = \frac{2a_{13}}{\sqrt{a_{11}}} = \frac{2a_{23}}{\sqrt{a_{22}}},$$
$$q_1 q_2 = a_{33}.$$

Z rovnic těchto lze stanovit q_1, q_2. Vzdálenosti bodu (0, 0) od těchto dvou přímek jsou

$$\frac{q_1}{\sqrt{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega}}, \quad \frac{q_2}{\sqrt{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega}}.$$

O vzdálenosti těchto dvou rovnoběžných přímek platí

$$d^2 = \frac{(q_1 - q_2)^2}{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega} = \frac{(q_1 + q_2)^2 - 4q_1q_2}{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega}$$
$$= \frac{4(a_{23}^2 - a_{22}a_{33})}{(a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega)\,a_{22}} = \frac{4(a_{13}^2 - a_{11}a_{33})}{(a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega)\,a_{11}}. \quad (9^{**})$$