Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Quido Vetter

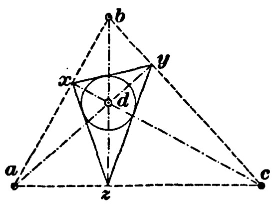
Kuželosečky dvojnásobně se dotýkající dvou kružnic

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 44 (1915), No. 4-5, 415--438

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121492

tedy $\sphericalangle zxc = \sphericalangle cxy$. Jsou tedy body a, b, c, d středy kružnic do trojúhelníka xyz vepsaných. Z toho patrno:

f) Hyperbola rovnoosá prochází středy a, b, c, d kružnic, do polárného trojúhelníka xyz vepsaných.



Obr. 5.

Jsou-li tudíž dány 4 tečny hyperboly rovnoosé, možno po sestrojení polárného trojúhelníka sestrojiti 4 body žádané křivky a provésti řešení větou Desargues-ovou.

I tuto větu možno vysloviti pro kuželosečky obecné a z odvozených vět další získati principem duality.

Kuželosečky dvojnásobně se dotýkající dvou kružnic.

(Důkazy vět, uveřejněných Steinerem v Crelleově Journalu sv. XLV. str. 189—211, Gesammelte Werke d. II. str. 445—468.)

Dr. Q. Vetter.

I.

§ 1. V pojednání „Über einige neue Bestimmungsarten der Curven zweiter Ordnung nebst daraus folgenden neuen Eigenschaften derselben Curven" uveřejnil Steiner bez důkazů řadu vět o kuželosečkách, které se dvojnásobně dotýkají dvou daných kružnic.

Z prací, jež důkazy těchto vět podávají, uvádím zvláště tři: Sporer, „Über Kreise, welche einen Kegelschnitt doppelt berühren" (Zeitschr. f. Math. u. Phys, sv. XLI. str. 210—220), Schüssler, Über Kreise, welche Kegelschnitte doppelt berühren"

(Archiv d. Math. u. Phys., ř. 3. sv. II. str. 1—42) a Fiedler „Über die Durchdringung gleichseitiger Rotationshyperboloide von parallelen Axen“ (Acta math. sv. V. str. 331—408). Sporer a Schüssler podávají důkazy na základě vět planimetrických, vycházejíce od každého druhu kuželosečky, elipsy, hyperboly a paraboly, zvláště. Sporer zabývá se výhradně, Schüssler většinou případy, kdy středy obou kružnic leží na téže ose kuželoseček. Fiedler vychází ve svém zajímavém pojednání z úvah prostorových, opíraje se o výsledky cyklografické. Dokazuje všecky věty Steinerovy o kuželosečkách, jež se dvojnásobně dotýkají dvou kružnic a jejichž jedna osa prochází oběma středy daných kružnic. Případ, kdy středy kružnic leží na různých osách, řeší jakožto projektivní zevšeobecnění případu prvého, aniž by jej do všech detailů prováděl. Poněvadž v prvé části užívá proniku dvou rotačních hyperboloidů, z nichž jeden se pohybuje, takže jsou hledané kuželosečky průměty určité soustavy řezů pevného hyperboloidu, musí se úvahy jeho stýkati s úvahami ve II. části tohoto článku, kde se vyskytují tytéž řezy, ovšem jinak definované.

Vůdčí myšlenkou tohoto článku byla snaha, založiti důkazy Steinerových vět na úvahách, které by nejen nečinily rozdílu mezi ellipsou, hyperbolou a parabolou, ale které by ve svém základě stejně postupovaly, nechť leží středy daných kružnic na téže ose hledaných kuželoseček nebo na různých osách.

Věty uvedeme dle J. Steiner’s Gesammelte Werke, díl II. str. 445—468. Označení provedeme ovšem poněkud jiné, aby vývody naše vzhledem na způsob odvození se nestaly nepřehlednými.

§ 2. Dané kružnice nechť leží v půdorysně a středy jejich na ose X. Jednou z daných kružnic, A, proložme rotační plochu druhého stupně α, jejíž střed leží ve středu a kružnice A. Druhou kružnicí B proložme rotační válec β, jehož osa jest na rovinu kružnic, půdorysnu, kolmá. Průsečná křivka ploch α a β jest křivka 4tého stupně, kterou lze proložiti 4 plochy kuželové β, γ, δ, ε. Vrcholy jejich leží ve vrcholech společného polárního čtyřstěnu ploch α a β, tedy v nekonečnu na kolmici k půdorysně — válec β, v nekonečnu na kolmici k X v půdorysně — válec γ a ve společných sdružených pólech d a e obou daných kružnic — kužely δ a ε. Tečné roviny válce γ a kuželů δ a ε protínají plochu α v kuželosečce Σ, jejíž půdorys Σ_1 se dvojnásobně dotýká kružnice A, obrysu to půdorysu plochy α a kružnice B, neboť Σ se dotýká ve dvou bodech průsečné křivky ploch α a β, které leží na dotykové povrchové přímce válce γ, po případě kuželů δ nebo ε.

Kuželosečky Σ jsou seskupeny ve tři skupiny dle toho, které z ploch γ, δ, ε příslušejí. Označíme je Σ^γ, Σ^δ, Σ^ε.

Steiner předpokládá, že kružnice A a B jsou jen reálné, rovněž i Σ_1. Věty však mají, ovšem s nutnými změnami, i platnost pro případ, že jedna nebo obě kružnice jsou imaginární.

Jsou-li obě kružnice reálné a leží-li mimo sebe, nebo A uvnitř B, volíme za α rotační jednoplochý hyperboloid, leží-li B uvnitř A, kouli; protínají-li se, lze voliti obě plochy. Je-li aspoň jedna z daných kružnic imaginární, bude α dvojplochým rotačním hyperboloidem. Použijeme hyperboloidů, jichž meridiány jsou rovnoosými hyperbolami.

Je-li rovina řezu reálná, jest Σ a Σ_1 buď reálnou kuželosečkou aneb imaginární elipsou. Je-li však rovina řezu imaginární, jest Σ_1 obecnou imaginární kuželosečkou (viz XIV. výr. zprávu reálky v Lipníku). K těmto řezům však nebudeme přihlížeti.

§ 3. Nejdříve nutno odvoditi některé vlastnosti plochy α a jejích řezů.

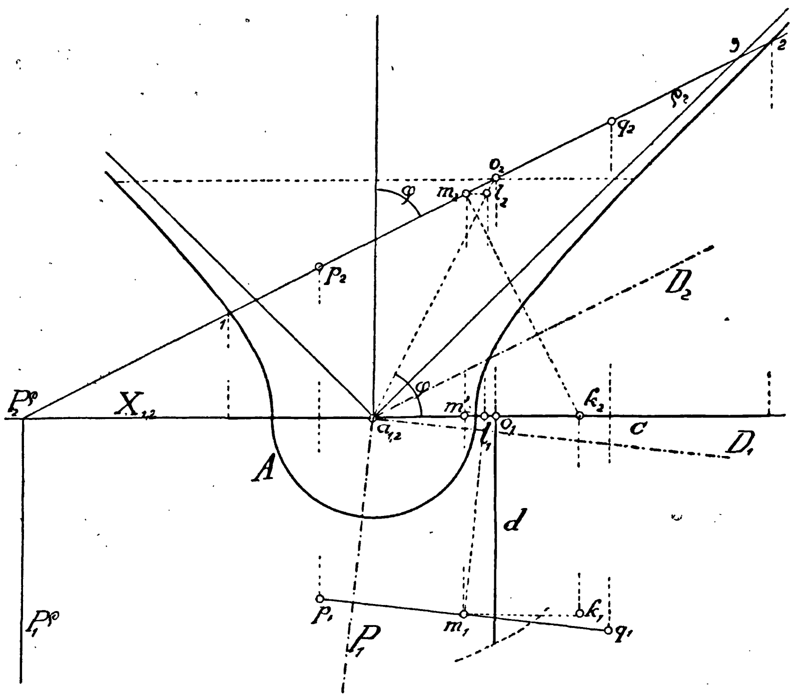
Vzdálenost reálného bodu p plochy α od půdorysny rovná se odmocnině z potence jeho půdorysu p_1 ke kružnici A s patřičným znamením.

Při kouli jest p_1 uvnitř A a $\overline{pp_1}$ rovno polovině nejkratší tětivy bodem p_1. Při jednoplochém hyperboloidu leží p_1 vně A a povrchová přímka svírá s půdorysnou úhel 45°, t. j. $\overline{pp_1}$ rovná se tečně z p_1 ke kružnici A. Při dvojplochém hyperboloidu dána potence bodu p_1 k imaginární kružnici A součinem vzdálenosti bodu p_1 od průsečíků průměru $\overline{p_1 a}$ s kružnicí A, t. j. výrazem

$$(\overline{p_1 a} + a)(\overline{p_1 a} - a) = \overline{p_1 a}^2 - a^2,$$

kde a jest imaginárním poloměrem kružnice A. Výraz ten, jak známo, rovná se čtverci vzdálenosti bodu p rovnoosé hyperboly od vedlejší osy, je-li délka vedlejší poloosy hyperboly $\sqrt{-a^2}$.

Věta ta platí i pro imaginární p, jak by bylo lze počtem se přesvědčiti.



Obr. 1.

§ 4. *Vedeme-li půlícím bodem m libovolné tětivy* $\overline{pq}$ *plochy* α *rovinu kolmou na tuto tětivu, tu půdorys hlavní přímky prvé osnovy bodem m vedené protíná X v bodě* l_1, *který má od středu* a_{12} *tutéž vzdálenost jako půdorysná stopa k hlavní přímky druhé osnovy bodem m od půdorysu* m_1.

Prodlužme (obr. 1.) $\overline{p_2 q_2}$, až protne obrys druhého průmětu plochy α v bodech *1, 2*. Spojnice půlícího bodu o_2 tětivy $\overline{12}$ a středu a_{12} jest průměr sdružený směru $\overline{12}$. Odchylka jeho od osy X doplňuje se s odchylkou směru $\overline{12}$ od X na 90°. Poněvadž pak $\overline{m_2 k_2}$ stojí kolmo na $\overline{p_2 q_2}$, jest

$$\sphericalangle\, m_2 k_2 a_{12} = \widehat{\overline{q_2 p_2} X} = \sphericalangle\, o_2 a_2 k_2.$$

Jest nutno ukázati, že l_2 leží na $\overline{a_{12} o_2}$. Středem o vedeme průměr D rovnoběžně s $\overline{pq}$, který jest sdružen diametrální rovině, určené body m, a a o, neboť o jest střed řezu $(1pq2)$, rovnoběžného s D. Pól půdorysně promítající roviny (DD_1) leží v nekonečnu na půdorysné stopě P sdružené polárné roviny (amo), jsou tedy P_1 a D_1 sdružené průměry kružnice A a stojí na sobě kolmo. Hlavní přímka roviny (amo) stojí také na D_1 i D kolmo, pročež stojí kolmo i na $\overline{pq}$, čili stopa l leží na $\overline{ao}$, nárysné stopě diametrální roviny. Pravoúhlé trojúhelníky $m'm_2k_2$ a $a_{12}l_2l_1$ jsou shodny, pročež

$$\overline{m'k_2} = \overline{m_1 k_1} = \overline{a_{12} l_1}.$$

§ 5. Přihlédneme k rovinnému řezu plochy α, který volíme kolmo na druhou průmětnu (obr. 1. a 2.). Úhel, který svírá rovina řezu s osou plochy α, budiž φ. Půdorys kuželosečky řezu jest kuželosečka, jejíž poloosa ležící v X budiž c a poloosa kolmá na X d. Vzdálenost ohniska, a to reálného nebo imaginárního, ležícího na ose kolmé k X, od středu budiž e.

Pro kouli (obr. 2.) jest:

$$d^2 = a^2 - \overline{a_1 o_1}^2 (1 + tg^2 \varphi)$$

$$\frac{c^2}{d^2} = sin^2 \varphi.$$

Pro hyperboloid jednoplochý (obr. 1.) jest

$$d^2 = a^2 - \overline{a_1 o_1}^2 (1 - tg^2 \varphi).$$

Poměr poloos řezu rovná se poměru poloos křivky, v níž rovina řezu protíná asymptotický kužel. Poněvadž pak $\overline{o_2 3} = \overline{a_{12} o_2}$ a vrcholový úhel kužele jest pravý, jest

$$\frac{c^2}{d^2} = \frac{\overline{a_1 o_2}^2 \, sin^2 \varphi}{\overline{o_1 o_2}^2 - \overline{a_1 o_1}^2} = \frac{sin^2 \varphi}{sin^2 \varphi - cos^2 \varphi}.$$

Pro hyperboloid dvojplochý, kde a jest číslo imaginární, stanovíme obdobně tytéž výsledky.

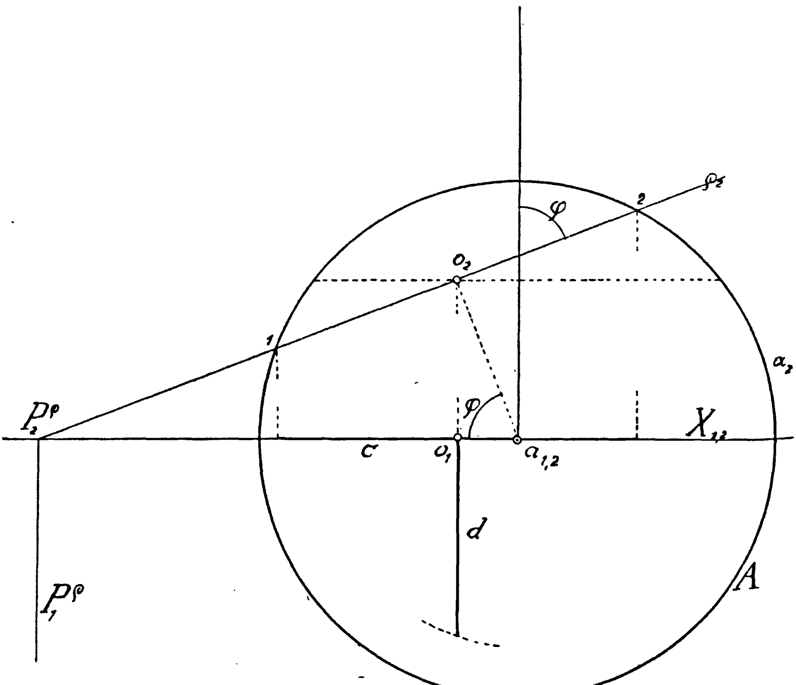
Shrneme-li tyto výsledky v jedno a vypočteme-li c a $e = \sqrt{d^2 - c^2}$, obdržíme vzorce

$$c^2 = a^2 \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \varphi \pm \cos^2 \varphi} \mp \overline{a_1 o_1}^2 \, tg^2 \varphi,$$

$$d^2 = a^2 \mp \overline{a_1 o_1}^2 \frac{\sin^2 \varphi \pm \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi},$$

$$e^2 = \pm a^2 \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi \pm \cos^2 \varphi} - \overline{a_1 o_1}^2,$$

kdež hořejší znamení platí pro kouli, dolejší pro hyperboloid.



Obr. 2.

§ 6. Vezměme v úvahu kružnice A a B, jejichž středy jsou a a b. Osu X položíme do spojnice $\overline{ab}$. Rovina řezu budiž ϱ. Kuželosečka Σ_1 dotýká se kružnice A ve dvou bodech, jež leží na stopě P_1^ϱ, kružnice B také ve dvou bodech, jež leží na dotykové tětivě Q_1, půdorysu to dotykové povrchové přímky Q příslušného kužele. Poněvadž vrcholy ploch γ, δ, ε jsou vrcholy c, d, e společného polárního trojúhelníka kružnic A a B, platí:

Dotykové tětivy procházejí příslušným vrcholem společného polárního trojúhelníka kružnic A a B.

§ 7. *Jest lhostejno, kterou z daných kružnic proložíme rotační plochu α.*

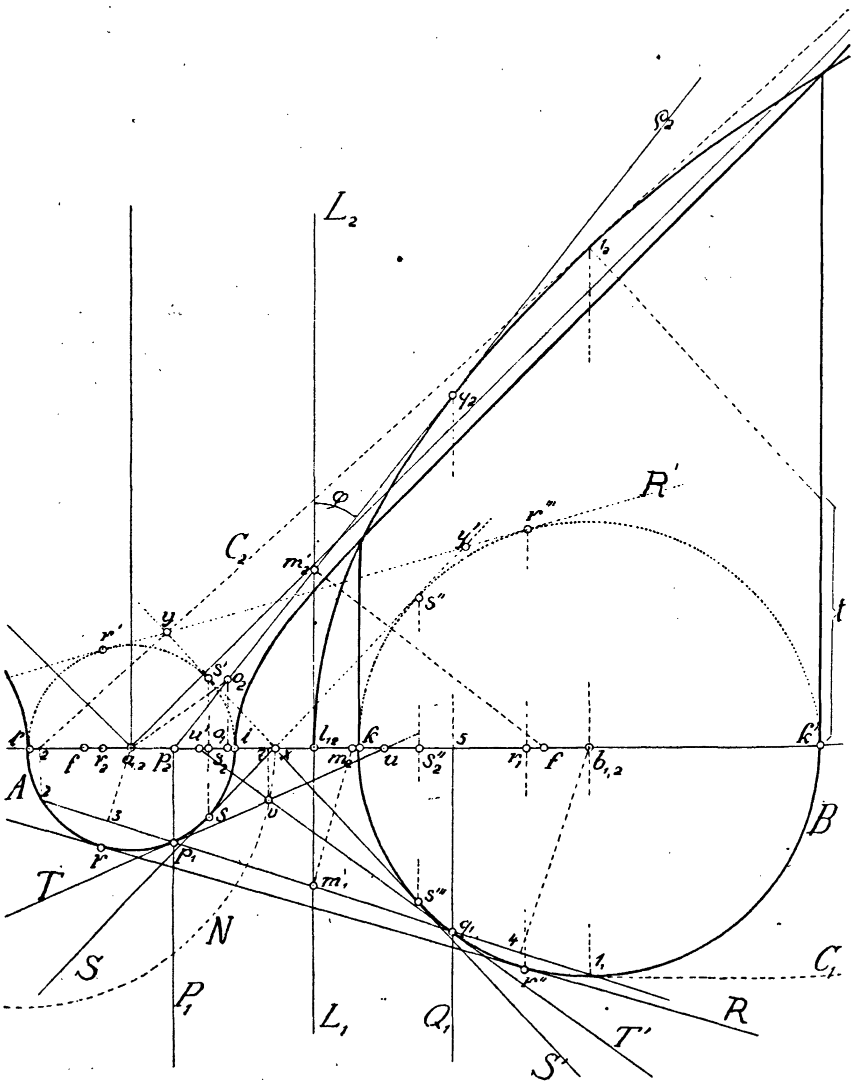
Proložme α kružnicí A, sestrojme na př. kužel δ o vrcholu d a kuželosečku Σ ležící v ϱ. Dotykové tětivy s A — P_1^ϱ — a s B — Q_1 — procházejí bodem d. Nyní změňme konstrukci a proložme kružnicí B rotační plochu α'. Bod d se nemění a v něm leží vrchol kužele δ'. Dotyková tětiva kuželosečky Σ_1 s kružnicí B prochází bodem d, lze ji tudíž považovati za stopu roviny ϱ', ve které leží kuželosečka Σ', promítající se do Σ_1. Poněvadž pak Σ_1 dvojnásobně se dotýká kružnice A, musí se ϱ' dotýkati jednoho ze tří zde se vyskytujících kuželů a to kužele δ'. Dojdeme tudíž k téže kuželosečce Σ_1, nechť proložíme rotační plochu kružnicí A nebo B.

II.

§ 8. Steiner probírá nejdříve vlastnosti kuželoseček, jichž osa leží ve spojnici $\overline{ab}$. Jsou to řezy příslušné kuželi γ, který jest, jak jsme ukázali, válcem.

Válec γ jest parabolický a nárys jeho jest parabola, mající osu v X, vrchol v průsečíku osy X s chordálou kružnic A a B, poloparametr její rovná se vzdálenosti středů a a b.

Prvou část této věty dokázal prof. Jarolímek ve stati: „O průmětě průseku dvou točných ploch II. řádu na společnou rovinu hlavní.“ (Čas. math. a fys. XI, 187.) Poloparametr této paraboly stanovíme subnormálou bodu 1 (obr. 3.), jehož prvý průmět 1_1 leží na kolmici v b k X vztyčené. Tečna C v bodě tom k průsečné křivce 4. stupně vedená promítá se do tečny C_1 kružnice A rovnoběžné s X a do tečny C_2 paraboly γ_2. Tečna C jest však také tečnou křivky, v níž promítající rovina (CC_1) plochu α protíná v bodě 1. Při kouli jest druhý průmět této



Obr. 3.

křivky kružnice o středu v a_{12}, musí tedy normála bodu 1 procházeti středem a_{12}. Při hyperboloidu jest druhý průmět této křivky rovnoosá hyperbola. Poloměr $\overline{a_{12}1}$ jest sdružen směru C_2.

pročež úhel

$$\sphericalangle\ 1_2 a_{12} b_{12} = 90^0 - \sphericalangle\ 1_2 2 b_{12} = \sphericalangle\ 1_2 t b,$$

čili

$$\overline{a_{12} b_{12}} = \overline{b_{12} t},$$

kdež t jest průsečík osy X s normálou v bodě 1_2. Jest tedy subnormála a tudíž i poloparametr paraboly γ_2 roven vzdálenosti středů $\overline{a_{12} b_{12}}$.

Válec γ jest vždy reálný.

§ 9. *Dotykové tětivy kuželosečky Σ_1^γ s kružnicemi A a B jsou rovnoběžny a stejně vzdáleny od chordály L_1.* [Steiner, l. c. 454].

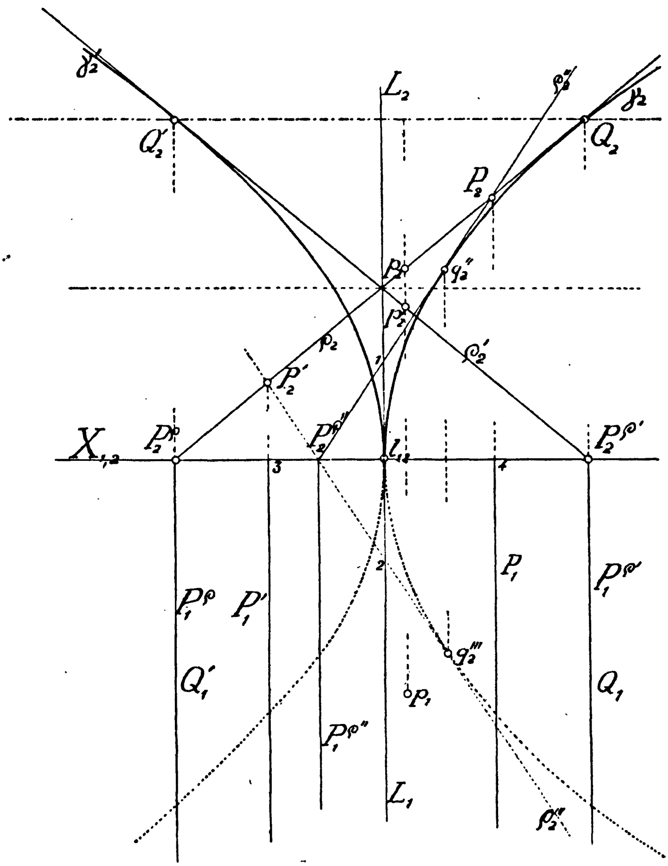
Poněvadž válec γ stojí kolmo na nárysně, jest P_1^ϱ, stopa jeho tečné roviny ϱ, kolmé na X. Dotyková přímka jest také na ν kolma a tedy i Q_1 kolma na X, pročež obě tyto dotykové tětivy jsou rovnoběžny s L_1 (obr. 3.). Poněvadž pak ϱ_2 jest tečnou paraboly γ_2 a q_2 bod dotyčný, jsou přímky Q_1 i P_1^ϱ stejně vzdáleny od L_1.

Větu tu mohli bychom i vysloviti tak, že dotykové tětivy harmonicky dělí chordálu L_1 a přímku v nekonečnu.

§ 10. *Druhé odmocniny α, β potencí kteréhokoli bodu kuželosečky Σ_1^γ vzhledem ke kružnicím A a B mají stálý součet nebo rozdíl l. Zpravidla rozpadá se Σ_1^γ na čtyři oblouky; pro dva jest $l = \alpha + \beta$, pro jeden $l = \alpha - \beta$, pro jeden $l = \beta - \alpha$.* [Steiner, l. c. 447.]

Budiž p bod kuželosečky Σ^γ (obr. 4.), ležící v tečné rovině ϱ. Proložíme rotační plochu α' kružnicí B. Válec γ' má parabolický nárys souměrný s γ_2 dle L_2, neboť obě paraboly mají osy v X, vrchol v l a poloparametr rovný délce $\overline{a_{12} b_{12}}$. p_1 jest průmětem bodu p', ležícího v ϱ'. Poněvadž (dle § 3.) vzdálenost bodu p od půdorysny dána jest odmocninou z potence bodu p_1 k A a vzdálenost bodu p' odmocninou z potence bodu p_1 k B, při čemž ovšem nutno vzíti potenci s patřičným znamením, lze délku l vyjádřiti součtem nebo rozdílem vzdálenosti bodů p_2 a p'_2 od osy X. Ze souměrnosti přímek ϱ_2 a ϱ'_2 dle L_2 plyne, že ϱ_2 a ϱ'_2 jsou také souměrny dle rovnoběžky s X jich průsečíkem vedené a že tedy součet resp. rozdíl vzdáleností bodů

p_2 a p'_2 od osy X se rovná úsecce $\overline{Q_2 P_2^{\varrho'}}$, t. j. vzdálenosti přímky, podél níž se ϱ dotýká válce γ, od půdorysny. Pro body kuželosečky Σ_1^{γ} mezi dotykovými tětivami P_1^{ϱ} a Q_1 jest $l = \alpha + \beta$,



Obr. 4.

pro body za tětivou Q_1 jest $l = \alpha - \beta$, pro body za P_1^{ϱ} jest $l = \beta - \alpha$.

§ 11. *Dotyčné body kuželosečky Σ_1^{γ} a kružnic A a B leží na kružnici opsané kol půlícího bodu m_2 délky $\overline{a_{12} b_{12}}$; spojnice dotyčného bodu na A s dotyčným bodem na B jest půlena* *chordálou* L_1 *v bodě, který jest patou kolmice z* m_2 *na spojnici tu; úseky, které na spojnici té vytínají kružnice* A *a* B, *jsou stejné.* [Steiner, l. c. 454, 455.]

Jeden z průsečíků (obr. 3.) P_1^ϱ a A budiž p_1 a jeden z průsečíků Q_1 a B budiž q_1, půlící bod tětivy $\overline{pq}$ budiž m'. Poněvadž ϱ_2 a tedy i $\overline{p_2 q_2}$ se dotýká γ_2, leží m'_2 na L_2 a m'_1 na L_1. Kolmice v bodě m'_2 na $\overline{p_2 q_2}$ prochází ohniskem f paraboly γ_2. Kolmice v bodě m'_1 na $\overline{p_1 q_1}$ vztyčená protíná X (dle § 4.) v bodě, jehož vzdálenost od a_{12} se rovná délce $\overline{lf} = \frac{\overline{a_{12} b_{12}}}{2}$, prochází tedy půlícím bodem m_{12} úsečky $\overline{a_{12} b_{12}}$. m_{12} jest středem kružnice, na které leží body p_1 a q_1.

Kolmice z a_{12} a b_{12} na $\overline{p_1 q_1}$ spuštěné protínají spojnici tu v bodech 3 a 4. Z úměry

$$\overline{a_{12} m_{12}} : \overline{m_{12} b_{22}} = \overline{3 m'_1} : \overline{m'_1 4}$$

plyne rovnost úseků $\overline{3 m'_1}$ a $\overline{m'_1 4}$ a tedy i rovnost

$$\overline{3 p_1} = \overline{q_1 4},$$

totiž polovičních tětiv kružnicemi A a B na spojnici $\overline{p_1 q_1}$ vyťatých.

Z toho, že paty kolmic z m_{12} na $\overline{p_1 q_1}$ spuštěné leží na L_1, plyne důsledek:

Spojnice $\overline{p_1 q_1}$ *obalují parabolu* Π, *jejíž ohnisko jest* m_{12} *a vrchol* l_{12}. [Steiner, l. c. 455.]

§ 12. *Osm dotyčných bodů dvou kuželoseček* Σ_1^γ *leží na kuželosečce* $\varDelta$. [Steiner, l. c. 454.]

Nechť leží kuželosečky Σ^γ a $\Sigma^{\gamma'}$ v rovinách ϱ a ϱ' (obr. 3.), dva z dotyčných bodů na A buďtež p_1 a p'_1, na B q_1 a q'_1. Body p, q, q' proložme válec ζ druhého stupně, kolmý na nárysně a souměrný dle půdorysny. Nárys ζ_2 tvoří s γ_2 svazek, jehož základní body jsou q_2, q'_2 a body s těmito body souměrně dle X ležící. Svazek ten vytíná na X involuci, jejíž střed jest l_{12} a jejíž dvojice jest 5, 6. Do involuce té patří i dvojice s 5, 6 dle l_{12} souměrná, tedy p_2, p'_2, čili válec ζ prochází bodem p'.

Průsečná křivka ploch α a ζ, na níž leží body p, q, p', q', jest 4. stupně, leží však na válci 2. stupně kolmém na půdorysně, neboť tato a bod v nekonečnu na kolmici k ní jsou společným polem a polární rovinou ploch α a ζ. Půdorys tohoto válce jest kuželosečka $\varDelta$, na které leží body p_1, q_1, p_1', q'_1.

§ 13. *Průsečíky dvou kuželoseček* Σ_1^γ a $\Sigma_1^{\gamma''}$ *leží na kružnici opsané kol bodu* m_{12}, *půlícího* $\overline{a_{12}b_{12}}$. [Steiner, l. c. 454.] Důkaz lze provésti zcela obdobně jako důkaz věty § 11. Třeba jen dokázati větu:

Spojnice průsečíků dvou kuželoseček Σ_1^γ *a* $\Sigma_1^{\gamma''}$ *jsou kolmy k ose* X *a stejně vzdáleny od chordály* L_1.

Kuželosečka Σ^γ leží v rovině ϱ (obr. 4.) a $\Sigma^{\gamma''}$ v ϱ''. Průsečnice rovin ϱ a ϱ'' — P — jest kolma k nárysně, stojí tedy i přímka P_1, na které leží dva z těchto průsečíků, kolmo k X. Kuželosečku $\Sigma_1^{\gamma''}$ lze však považovati i za půdorys kuželosečky $\Sigma^{\gamma'''}$, jež leží v rovině ϱ''', souměrné s ϱ'' dle půdorysny. Ostatní dva průsečíky křivek Σ_1^γ a $\Sigma_1^{\gamma''}$ lze považovati za průměty průsečíků kuželoseček Σ^γ a $\Sigma^{\gamma'''}$, jež leží na průsečnici P' rovin ϱ a ϱ'''. I P_1' stojí na X kolmo. L_2, ϱ_2, ϱ_2'' a ϱ_2''' jsou tečny paraboly γ_2. Řady, jež tečny vytínají na ϱ_2'' a ϱ_2''', jsou podobné, pročež

$$\overline{P_2 1} : \overline{1 P_2^{\varrho''}} = \overline{P_2' 2} : \overline{2 q_2'''},$$

kde q_2''' jest dotyčný bod tečny ϱ_2'''. Ze souměrnosti tečen ϱ_2'' a ϱ_2''' a z rovnosti úseků $\overline{P_2^{\varrho''} q}$ a $\overline{2 q_2'''}$ plyne rovnost

$$\overline{1 P_2^{\varrho''}} = \overline{2 q_2'''}$$

a tudíž i

$$\overline{P_2' 2} = \overline{1 P_2}.$$

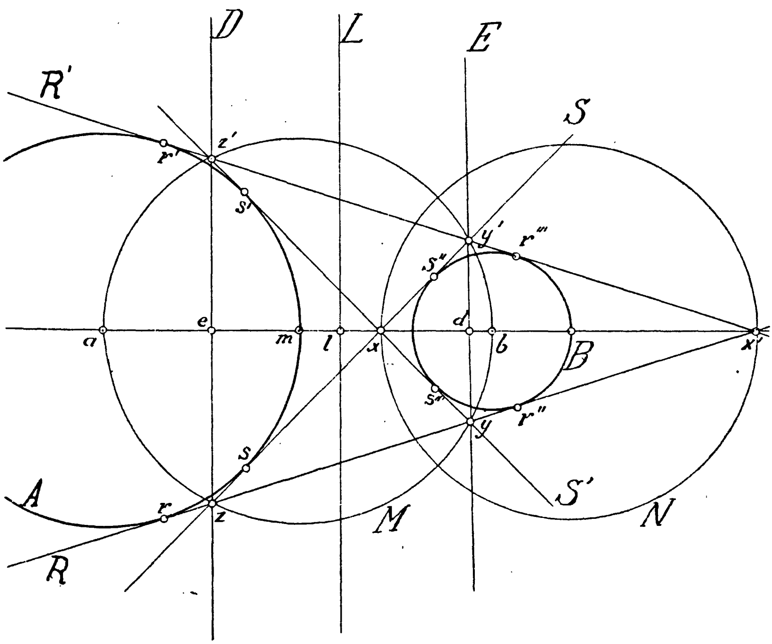
Poněvadž pak ϱ_2'' a ϱ_2''' svírají s X týž úhel, jest i

$$\overline{3 l_{12}} = \overline{l_{12} 4}.$$

§ 14. Také společné tečny lze považovati za dva zvláštní případy kuželoseček Σ_1^γ, totiž R a R', S a S' (obr. 5.). Body dotyčné buďtež r, r'', r', r''', s, s'', s', s'''. Z vět dokázaných plynou pro tečny tyto důsledky:

Body r, r', r'', r''' leží na kružnici opsané kol m, podobně i body s, s', s'', s'''; chordála L půlí úseky tečen mezi body dotyčnými (§ 11.). [Steiner, l. c. 450.]

Průsečíky tečen y, y', z, z' leží na kružnici M (§ 13.), *která má za průměr $\overline{ab}$.* [Steiner, l. c. 450.]



Obr. 5.

Vzdálenosti přímek $D \equiv \overline{zz'}$ a $E \equiv \overline{yy'}$ od chordály L jsou stejné (§ 13.). [Steiner, l. c. 450.]

Z toho plynou rovnosti [Steiner, l. c. 450.]:

$$\overline{rz} = \overline{yr''} = \overline{r'z'} = \overline{y'r'''} = \overline{zs} = \overline{s''y'} = \overline{ys''} = \overline{s'z'}$$

$$\overline{rr''} = \overline{r'r'''} = \overline{yz'} = \overline{y'z}; \quad \overline{ss''} = \overline{s's'''} = \overline{yz} = \overline{y'z'}.$$

Společné tečny tvoří v každé kuželosečce Σ_1^r čtyři stejně dlouhé tětivy, rovné délce l, jež jsou chordálou půleny (§ 9. a § 13.). [Steiner, l. c. 455.]

Společné tečny dotýkají se také paraboly Π (§ 11.). [Steiner, l. c. 455.]

§ 15. *Geometrické místo ohnisek kuželoseček Σ_1^γ jest kružnice podobnosti N daných kružnic a osa X; na této jsou ohniska každé kuželosečky Σ_1^γ harmonicky dělena body podobnosti.* [Steiner, l. c. 455.]

Dle výrazů § 5., je-li g ohnisko kuželosečky Σ_1^γ, ležící na ose kolmé k X, jest jeho vzdálenost od středu a_{12} dána výrazem

$$\overline{a_{12}g} = \sqrt{\overline{a_{12}o_1}^2 + e^2} = a\sqrt{\pm\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi \pm \cos^2\varphi}}.$$

Poněvadž pak poloparametr paraboly γ_2 jest vždy $\overline{a_{12}b_{12}}$, nechť proložíme rotační plochu α tou či onou kružnicí, a poněvadž dotykové tětivy jsou stejně vzdáleny od chordály L_1, jest φ pro tutéž kuželosečku Σ_1^γ v obou případech stejné. Proto lze výstřednost stanoviti i rovnicí

$$e^2 = \pm b\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi \pm \cos^2\varphi} - \overline{b_{12}o_1}^2,$$

čili

$$\overline{b_{12}g} = b\sqrt{\pm\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi \pm \cos^2\varphi}}.$$

Tudíž jest

$$\overline{a_{12}g} : \overline{b_{12}g} = a : b,$$

t. j. g leží na N.

Poněvadž N patří do svazku kružnic procházejících ohnisky kuželosečky Σ_1^γ na ose kolmé k X, nechť jsou reálné nebo imaginární, musí průsečíky kružnice N s X, tedy body podobnosti, harmonicky děliti ohniska kuželosečky Σ_1^γ na X.

Z toho plyne důsledek:

Pravoúhelník ze vzdáleností ohnisek na X každé kuželosečky Σ_1^γ od středu kružnice N jest roven čtverci poloměru této kružnice. [Steiner, l. c. 453.]

Dále jest:

$$d^2 : e^2 = \frac{a^2\cos^2\varphi \mp \overline{a_{12}o_1}^2(\sin^2\varphi \pm \cos^2\varphi)}{\cos^2\varphi} :$$

$$\pm\frac{a^2\cos^2\varphi \mp \overline{a_{12}o_1}^2(\sin^2\varphi \pm \cos^2\varphi)}{\sin^2\varphi \pm \cos^2\varphi},$$

čili

$$d^2 : e^2 = 1 : \frac{\pm \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi \pm \cos^2 \varphi};$$

jest tudíž správna úměra

$$d^2 : e^2 = a^2 : \overline{a_{12}g}^2 = b^2 : \overline{b_{12}g}^2$$

aneb, rozeznáváme-li jako Steiner [l. c. 453.] případy, kdy jest hlavní osa kolma na X a kdy leží v X, platí:

Je-li hlavní osa kuželosečky Σ_1^γ kolma na X, jest průměr této poloosy k výstřednosti dán podílem

$$a : \overline{a_{12}g} = b : \overline{b_1 g},$$

leží-li v X, rovná se poměr čtverce vedlejší poloosy ke čtverci výstřednosti podílu

$$a^2 : \overline{a_{12}g'} \,.\, \overline{a_{12}g''} = b^2 : \overline{b_{12}g'} \,.\, \overline{b_{12}g''},$$

kde g' a g'' jsou ohniska ležící na X.

Poněvadž délka l (§ 9.) jest dána potencí bodu q_1, v němž se Σ_1^γ dotýká B, k A a tato se rovná (§ 3.) vzdálenosti q od prvé průmětny, čili vzdálenosti q_2 od osy X, jest

$$l : \overline{a_{12}b_{12}} = \overline{a_{12}b_{12}} \,.\, tg\, \varphi : \overline{a_{12}b_{12}} = tg\, \varphi.$$

Dle § 5. jest

$$\frac{d^2}{c^2} = 1 \pm cotg^2 \varphi,$$

čili

$$l : \overline{a_{12}b_{12}} = c : e\sqrt{\pm 1}.\text{*)}$$

§ 16. *Dotykové tečny T a T' mají obdobné vlastnosti jako body p_1 a q_1.* [Steiner, l. c. 455.]

Důkaz lze provésti (obr. 3.) pomocí polárního systému, který body kružnice A převádí do tečen kružnice B a naopak. Systém stanovíme tak, že imaginárním kruhovým bodům v nekonečnu přiřadíme dvě společné tečny S a S' kružnic A a B souměrné dle osy X. Protínají-li se dané kružnice v bodech reálných, přiřadíme kruhovým bodům tečny imaginární, jsou-li však všecky čtyři tečny reálné, pak bude řídící křivkou polár-

*) Výraz, jejž Steiner [l. c. 453] uvádí, není, jak v dodatku ke II. dílu Sebr. spisů ukázáno, správný.

ního systému obecná imaginární kuželosečka (viz XIV. výr. zpráva reálky v Lipníku). Systém bude určen, dána-li ještě dvojice sdružených pólů, za něž volíme bod i a průsečík k kružnice B s osou X tak, aby se všecky dvojice i a k, i' a k', x — průsečík tečen S a S' — a úběžný bod osy X současně oddělovaly aneb neoddělovaly a mohly tedy tvořiti dvojice bodové involuce na ose X. Kružnici A odpovídá v polárním systému kružnice dotýkající se tečen S a S' a procházející bodem k tak, že její druhý průsečík s X, k', tvoří s i' dvojici zmíněné involuce, totiž kružnice B. Kuželosečce dvojnásobně se dotýkající kružnic A a B, která tedy v každém dotyčném bodě, na př. p_1, má dva splývající body s A společné, odpovídá polárně kuželosečka, která má s B dvakrát po dvou společných splývajících tečnách, tedy která se B dvojnásobně dotýká, čímž analogie dokázána.

Z příslušných vět uvádí Steiner jen dvě:

Průsečík v tečen T a T' leží na kružnici podobnosti N. [Steiner, l. c. 455.]

Průsečíky u, u' tečen T a T' s osou X dělí harmonicky body podobnosti x a x'. [Steiner, l. c. 455.]

V polárním systému odpovídají spojnice průsečíků kružnic A a B, totiž přímka v nekonečnu a chordála L_1 průsečíkům jich společných tečen, bodům x a x'. Parabole Π (§ 11.), jež se dotýká společných tečen, odpovídá kuželosečka, procházející body x a x', průsečíky daných kružnic s chordálou L_1 a imaginárními kruhovými body v nekonečnu. Jest to tedy kružnice podobnosti N. Tečnám paraboly Π, spojnicím $\overline{p_1 q_1}$, přísluší polárně průsečíky v, ležící na N. Dotykové tětivy P_1^q a Q_1, které harmonicky dělí L_1 a přímku v nekonečnu, jsou přiřaděny bodům u a u', harmonicky dělícím x a x'.

§ 17. Kuželosečky Σ_1^q lze děliti dle reality a imaginarity, dle tvaru — hyperboly, paraboly, ellipsy — a dle reality dotyku s A a B. Rozdělení to pro reálné kuželosečky probírá Steiner [l. c. 457.—461.]. Odvození jednotlivých skupin křivek na základě ploch α a β jest jednoduché. Rovněž i důkazy vět o maximálním a minimálním l pro určité případy. [Steiner, l. c. 458, 459.]

Středy všech kuželoseček Σ_1^γ tvoří řadu bodovou na ose X.

§ 18. Jsou-li dány v rovině tři kružnice A, B, B', jichž středy leží na X, tu proložíme jednou z nich, na př. A, rotační plochu α, ostatními, B a B', válce β a β'. Průsečné křivky leží na dvou parabolických válcích γ a γ'. Má-li se kuželosečka Σ_1^γ všech tří kružnic dvojnásobně dotýkati, musí se rovina ϱ dotýkati obou válců. Jsou-li vzdálenosti středů

$$\overline{ab} = s, \quad \overline{ab'} = s', \quad \overline{bb} = s'',$$

tu lze úhel φ stanoviti pomocí vzdáleností bodů l a l', v nichž chordály kružnic A, B a A, B' protínají X. I jest:

$$\overline{ll'} = \frac{s'^2 + a^2 - b'^2}{2s'} - \frac{s^2 + a^2 - b^2}{2s}.$$

Poněvadž l, l' jsou vrcholy parabol γ_2 a γ'_2, jichž poloparametry jsou dány délkami s a s', platí, že

$$\overline{ll'} = \overline{p_2 l'} - \overline{p_2 l} = \tfrac{1}{2}(s' \, tg^2 \varphi - s \, tg^2 \varphi) = \tfrac{1}{2} s'' \, tg^2 \varphi.$$

Srovnáme-li oba výrazy pro $\overline{ll'}$ a dosadíme-li s'' za $s' - s$, obdržíme

$$tg^2 \varphi = \frac{ss's'' - a^2 s'' + b^2 s' - b'^2 s}{ss's''}.$$

Poněvadž konstanta l vzhledem ke kružnicím A a B jest dána vzdáleností dotykové přímky Q válce γ_2 od půdorysny (§ 9.), čili dotyčného bodu q_2 paraboly γ_2 od osy X, jest

$$l = s \, tg \, \varphi.$$

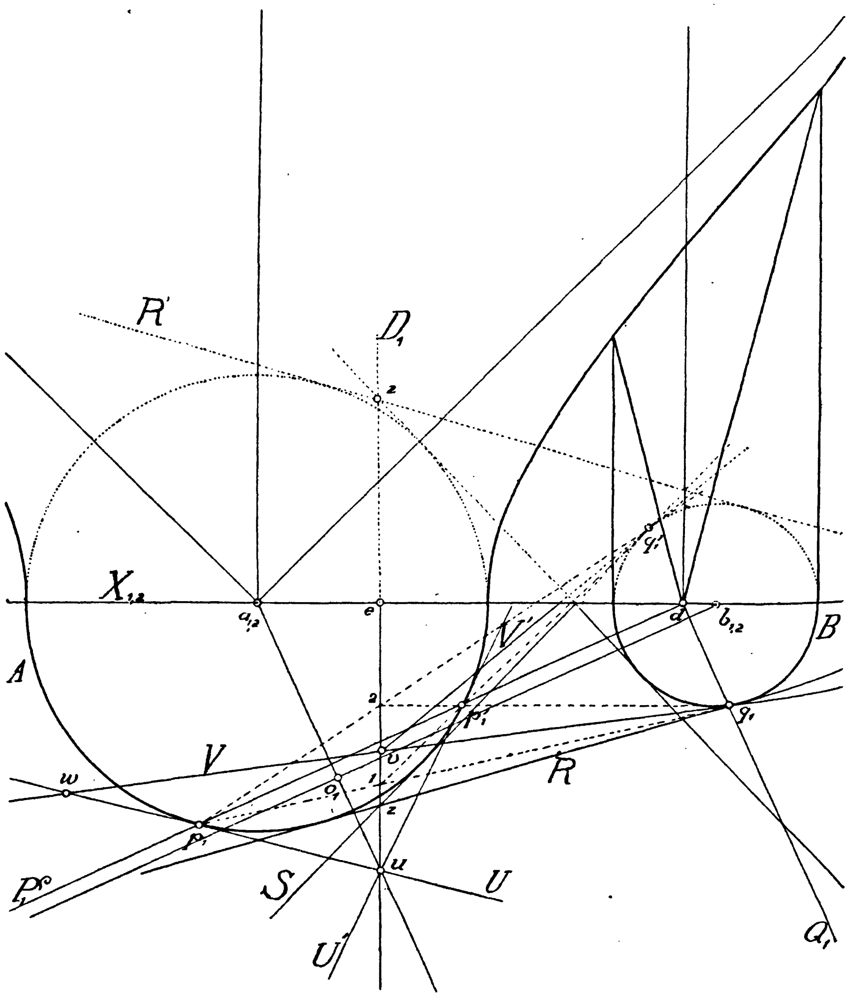
Dosadíme-li z této rovnice za $tg \, \varphi$ do rovnice předešlé a upravíme, obdržíme

$$l^2 = \frac{s}{s's''}(ss's'' - a^2 s'' + b^2 s' - b^2 s).*)$$

*) Nesprávný výraz Steinerův [l. c. 461.] opraven jest v poznámce [ibid. 740.] rovněž nesprávně. Správný výraz uvádí Fiedler [l. c. 403.].

III.

§ 19. Nemají-li dvojnásobně se dotýkající kuželosečky osu v ose X, pak jsou vytvořeny průměty řezů dotýkajících se ku-



Obr. 6.

želů δ a ε (obr. 6.). Také tvoří vždy dvě, dle X nesouměrné tečny, degenerované kuželosečky systému.

Kužely δ a ε jsou rotační a jejich osy jsou kolmy na půdorysně.

Plochy α a β procházejí v půdorysně ležícími imaginárními kruhovými body v nekonečnu. Body těmi procházejí tedy také kužely δ a ε, pročež jejich kruhové řezy jsou rovnoběžny s půdorysnou. Poněvadž α i β a tedy i jejich průsečné křivky jsou dle půdorysny souměrny, jsou i kužely δ a ε dle π souměrny, pročež jejich osy musí býti na π kolmé a kužely jsou rotační.

§ 20. Věty, týkající se kuželoseček Σ_1^δ, platí s patřičnými změnami i pro kuželosečky Σ_1^ε, stačí tedy provésti důkazy jen pro jednu soustavu.

Dotykové tětivy kuželosečky Σ_1^δ s kružnicemi A a B stojí na sobě kolmo, procházejíce společným sdruženým pólem d. [Steiner, l. c. 464.]

Do dotykových tětiv promítají se půdorysná stopa P_1^ϱ roviny ϱ a povrchová přímka Q, podél které se ϱ kužele δ dotýká. Poněvadž osa kužele stojí na π kolmo, jest Q přímkou sklonu roviny ϱ a její průmět Q_1 svírá s P_1^ϱ pravý úhel, jehož vrchol jest d.

§ 21. *Z os každé křivky Σ_1^δ prochází jedna středem a_{12}, druhá středem b_{12}, geometrické místo středů kuželoseček Σ_1^δ jest kružnice opsaná nad průměrem $\overline{a_{12}b_{12}}$.* [Steiner, l. c. 464.]

Plocha α jest rotační, proto jest její rovinný řez souměrný dle meridiánu kolmého na rovinu řezu. Poněvadž pak meridián ten jest na π kolmý, jest i průmět Σ_1^δ dle průmětu tohoto meridiánu souměrný a osa kuželosečky Σ_1^δ prochází středem a_{12}. Osa ta jest kolma na stopě P_1^ϱ a rovnoběžna s dotykovou tětivou Q_1. Druhá osa kolmo půlí tětivu Q_1 a prochází tedy středem b_{12}.

§ 22. *Kuželosečky Σ_1^δ jsou si podobny* (t. j. involuce jich sdružených průměrů jest u všech stejná) *a poměr jejich os dán úměrami*

$$c_\delta^2 : d_\delta^2 = \overline{db_{12}} : \overline{da_{12}}$$
$$c_\delta \cdot c_\varepsilon : d_\delta \cdot d_\varepsilon = b : a,$$

kdež osy c_δ, c_ε procházejí bodem a_{12}. [Steiner, l. c. 464, 740.]

Poněvadž kužel δ jest rotační, mají všechny jeho tečné roviny tutéž odchylku od π. Kdybychom je tedy otočili kol osy plochy α tak, aby stály kolmo na nárysně ν, byly by rovnoběžny a protínaly by plochu α v kuželosečkách, procházejících týmiž body v nekonečnu.

Ze vzorců § 5. plyne po patřičném zkrácení

$$c_\delta^2 : d_\delta^2 = sin^2\,\varphi : (sin^2\,\varphi \pm cos^2\,\varphi).$$

Volíme-li rovinu ϱ kolmo na ν, leží střed kuželosečky Σ_1^δ v b_{12}. Dle obr. 1. a 2. jest

$$\overline{o_1 P_2^\varrho} = \overline{a_{12} o_1}\,.\,tg^2\,\varphi, \quad \overline{a_{12} P_2^\varrho} = \overline{a_{12} o_1}\,(tg^2\,\varphi \pm 1).$$

Poněvadž v našem případě P_2^ϱ leží v d, jest

$$\overline{b_{12} d} : \overline{a_{12} d} = sin^2\,\varphi : (sin^2\,\varphi \pm cos^2\,\varphi),$$

čímž prvá úměra dokázána. Obdobně platí

$$c_\varepsilon^2 : d_\varepsilon^2 = \overline{b_{12} e} : \overline{a_{12} e}.$$

Znásobíme-li obě úměry, tu následkem vztahů

$$\overline{a_{12} d}\,.\,\overline{a_{12} e} = a^2, \quad \overline{b_{12} d}\,.\,\overline{b_{12} e} = b^2$$

platí

$$c_\delta c_\varepsilon : d_\delta d_\varepsilon = b : a.$$

Z vět §§ 21. a 22. a z věty o stejných obvodových úhlech kružnice plyne důsledek:

Jsou-li kuželosečky Σ_1^δ hyperboly, procházejí jejich asymptoty průsečíky tečen z a z'. [Steiner, l. c. 466.]

§ 23. *Geometrické místo ohnisek kuželoseček Σ_1^δ jsou dvě kružnice, soustředné s A a B o poloměrech a_δ, b_δ, jež se buď pravoúhelně aneb diametrálně protínají. Prochází-li hlavní osa křivky Σ_1^δ bodem b_{12}, leží její ohniska f, f' na kružnici o středu a_{12} i jest obdélník ze vzdáleností ohnisek od b_{12} roven čtverci poloměru b_δ.* [Steiner, l. c. 465.]

Poněvadž jest dle § 5.

$$c^2 = a^2 \frac{sin^2\,\varphi}{sin^2\,\varphi \pm cos^2\,\varphi} \pm \overline{a_{12} o_1}^2\, tg^2\,\varphi,$$

$$d^2 = a^2 \mp \overline{a_{12} o_1}^2\, \frac{sin^2\,\varphi \pm cos^2\,\varphi}{cos^2\,\varphi},$$

při čemž c jest délka poloosy procházející a_{12}, jest

$$\overline{a_{12}f}^2 = \overline{a_{12}o_1}^2 + d^2 - c^2 = \pm a^2 \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi \pm \cos^2\varphi} = a_\delta^2.$$

tedy hodnota pro všechny Σ_1^δ stejná. Pro ohniska f'' a f''', ležící na ose procházející bodem a_{12}, jest

$$\overline{b_{12}f''}^2 = s^2 - \overline{a_{12}o_1}^2 + c^2 - d^2 = s^2 \mp a^2 \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi \pm \cos^2\varphi} = b_\delta^2.$$

Dále platí:

$$\overline{b_{12}f}.\overline{b_{12}f'} = \overline{b_{12}o_1}^2 - \overline{o_1 f}^2 = s^2 - \overline{a_{12}o_1}^2 - d^2 + c^2 = \overline{b_{12}f''}^2 = b_\delta^2.$$

Součet nebo rozdíl čtverců a_δ^2 a b_δ^2 jest roven s^2, dle čehož se řídí způsob protínání obou ohniskových kružnic.

§ 24. *Dotýká-li se Σ_1^δ kružnic A a B v bodech p_1, p'_1, q_1, q'_1, jsou spojnice $\overline{p_1q_1}$, $\overline{p_1q_1'}$, $\overline{p_1'q_1}$, $\overline{p_1'q_1'}$ tečnami určité kuželosečky $\varDelta$, jež má ohnisko v d, dotýká se společných tečen R, R', S, S' a jejíž druhé ohnisko dělí s d harmonicky středy* a_{12} a b_{12}. [Steiner, l. c. 465.]

K tomu lze připojiti:

Řídící přímka kuželosečky Σ_1^δ vzhledem k ohnisku d stojí v c na X kolmo.

Poněvadž polárná rovina bodu d vzhledem k α protíná osu X kolmo v bodě e a rovina řezu Σ^δ prochází bodem d, promítá se polára D bodu d vzhledem k Σ do přímky D_1 (obr. 6.), která jest tudíž také polárou bodu d vzhledem k průmětu Σ_1^δ. Body p_1, p_1', q_1, q_1', ležíce na Σ_1^δ, tvoří čtyřroh, jehož diagonálním rohem jest d, pročež jest D_1 jeho diagonální stranou, jež prochází druhými diagonálními rohy 1 a 2. D_1 a d jsou však také diagonální stranou a diagonálním rohem čtyrstranu $\overline{p_1q_1}$, $\overline{p_1q_1'}$, $\overline{p_1'q_1}$, $\overline{p_1'q_1'}$ a tvoří společnou poláru a pól všech kuželoseček řady, jež se stran tohoto čtyřstranu dotýkají. Tečny z d k této řadě vedené tvoří involuci, jejíž dvojné paprsky P_1^ϱ, Q_1 stojí na sobě kolmo. Lze tudíž za dvojice této involuce považovati i spojnice bodu d s imaginárními kruhovými body v nekonečnu, pročež jedna z kuželoseček řady, $\varDelta$, má v d ohnisko a v D_1 příslušnou přímku řídící. Řada kuželoseček, k níž $\varDelta$ náleží, stanoví v o_1 involuci tečen, jejíž dvojice jsou také $\overline{p_1o_1}$, $\overline{p_1'o_1}$ a

$\overline{q_1 o_1}$, $\overline{q_1' o_1}$. Osy kuželosečky, půlíce úhly $\sphericalangle p_1 o_1 p_1$ a $\sphericalangle q_1 o_1 q_1'$, dělí obě tyto dvojice harmonicky, pročež jsou dvojnými paprsky této involuce. Dělíce také tečny z o_1 k Δ vedené harmonicky, jsou kolmými sdruženými polárami kuželosečky Δ a jejich průsečíky a_{12} a b_{12} s její osou X dělí harmonicky d a druhé ohnisko kuželosečky té. Poněvadž pak pro jakékoliv Σ_1^δ jsou ohniska a řídící přímky kuželosečky Δ tytéž, obalují kuželosečku Δ všecky spojnice dotyčných bodů a tedy i společné tečny kružnic A i B.

§ 25. *Spojnice dotyčných bodů $\overline{p_1 q_1}$ atd. vytínají z kružnic tětivy, jichž poměr jest konstantní* [Steiner, l. c. 465] — *a to roven* $\dfrac{\overline{a_{12} d}}{\overline{b_{12} d}}$.

Důkaz provedeme pro kouli a jednoplochý hyperboloid. Pro dvojplochý hyperboloid bylo by nutno provésti ve výrazech vhodné změny. Označíme (obr. 7.) úhly δ, $\varkappa$, π, λ a délky d, d', p, q, x. Poněvadž $\overline{q_1 q}$ jest dáno odmocninou z potence bodu q_1 ke kružnici A, jest

$$\overline{q q_1} = \sqrt{\pm (a^2 - x^2)} = q \, cotg \, \varphi,$$

kdež $+$ platí pro kouli a $-$ pro hyperboloid a úhel φ definován uvedeným způsobem. Dále jest

$$d' = \frac{d \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi \pm \sin^2 \varphi}.$$

Body 3, 4, m_1'' jsou průměty bodů a_{12}, b_{12}, d na spojnici $\overline{p_1 q_1}$. Jest pak poměr

$$k = \frac{\overline{m_1'' p_1}}{\overline{m_1'' q_1'}} = \frac{p \sin \varkappa}{\pm b \cos \varkappa \mp 2d \dfrac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi \pm \sin^2 \varphi} \sin (\delta \pm \varkappa)}.$$

Poněvadž

$$tg \, \varkappa = \frac{p}{2},$$

jest po dosazení

$$k = \frac{p^2 (\cos^2 \varphi \pm \sin^2 \varphi)}{q^2 (\sin^2 \varphi \pm \cos^2 \varphi) \pm 2dq \sin^2 \varphi \sin \delta - 2dp \sin^2 \varphi \cos \delta}.$$

Z trojúhelníka $a_{12} d p_1$ obdržíme

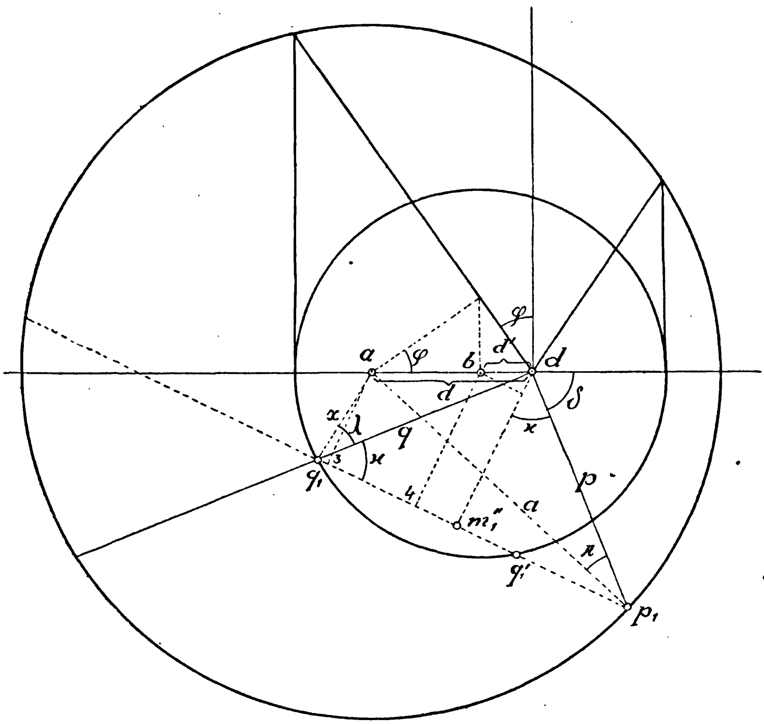
$$p = - d \cos \delta + \sqrt{a^2 - d^2 \sin^2 \varphi},$$

z trojúhelníka $a_{12}dq_1$ a vztahu pro x

$$q = \frac{\pm 1}{\sin\varphi}\left(\sqrt{a^2 \sin^2\varphi \mp q^2 \cos^2\varphi - d^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi} + d \sin\varphi \sin\delta\right).$$

Po úpravě jest

$$q^2 (\sin^2\varphi \pm \cos^2\varphi) \mp 2dq \sin^2\varphi \sin\delta = a^2 \sin^2\varphi - d^2 \sin^2\varphi.$$



Obr. 7.

Dosadíme-li tuto hodnotu a výraz pro p do rovnice pro k, obdržíme rovnici

$$k = \frac{\cos^2\varphi \pm \sin^2\varphi}{\sin^2\varphi} = \frac{d}{d'},$$

nezávislou na volbě úhlu δ'. Protože pak, jak zřejmo, také poměr

$$\frac{\overline{m_1''3}}{\overline{m_1''4}} = \frac{d}{d'},$$

jest také poměr tětiv

$$k = \frac{2 \cdot \overline{3p_1}}{2 \cdot \overline{4q_1'}} = \frac{d}{d'}.$$

§ 26. *Jsou-li U, U' a V, V' tečny dotykové kuželosečky Σ_1^δ s kružnicemi A a B, leží jejich průsečíky $u \equiv (U, U')$, $v \equiv (V, V')$ na poláře D, tvoříce involuci — a to o dvojných bodech v průsečících z, z' společných tečen s D. — Geometrické místo ostatních průsečíků w těchto tečen jest kružnice Δ', která protíná D v bodech z, z' a má s A a B tutéž chordálu L_1, takže její střed také leží na X.* [Steiner, l. c. 465.]

K důkazu použijeme téhož polárního systému jako v § 16., jímž se body kružnice A převádějí do tečen kružnice B a naopak. Společný pól d převádí se, jak zřejmo, do poláry D. Kolmé dotykové tětivy P_1^ϱ a Q_1 převádějí se do průsečíků tečen u a v. Poněvadž P_1^ϱ a Q_1 harmonicky dělí diagonální strany čtyrrohu základních bodů kruhového svazku A, B protínajíce se v jeho diagonálním rohu d, dělí u a v harmonicky diagonální rohy z a z' ve čtyřstranu základních přímek svazku kuželoseček A a B, ležíce na jeho diagonální straně D.

Průsečíky w jsou ve vytčeném polárním systému přiřaděny spojnicím $\overline{p_1q_1}$, $\overline{p_1q_1'}$, $\overline{p_1'q_1}$ a $\overline{p_1'q_1'}$, jež obalují kuželosečku Δ, která se dotýká společných tečen R, S, R' a S'. Proto leží i body w na kuželosečce přiřaděné Δ', která prochází společnými body kružnic A a B, jest tedy kružnicí, mající s A a B společnou chordálu L_1. Poněvadž pak, jak z § 24. patrno, se Δ dotýká spojnic pólu d s imaginárními kruhovými body v nekonečnu, prochází Δ' také průsečíky z a z' společných tečen s polárou D.

§ 27. Křivka 4. stupně, jíž se zabývá Steiner [l. c. 462 a 463], a její specialisace vymyká se z naší úvahy; právě tak i věta II., kterou uvádí v úvodu svého pojednání [l. c. 448 a 449].