Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Filip Bock

Rozdělení teploty v omezeném kruhovém válci, je-li dáno časově proměnlivé rozdělení teploty na jeho povrchu

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 66 (1937), No. 2, 159--164

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121486`

Rozdělení teploty v omezeném kruhovém válci, je-li dáno časově proměnlivé rozdělení teploty na jeho povrchu.

Napsal **Filip Bock,** Brno.

(Došlo 20. října 1936.)

Budiž dán omezený kruhový válec o výšce $2h$ a poloměru a. Osový řez položíme tak do soustavy válcových souřadnic z, r, φ, jak ukazuje obr. 1. Tento kruhový válec je vnořen do časově proměnlivého tepelného pole, při čemž teplota na povrchu válce je periodickou funkcí času t; na souřadnicích nezávisí.

Příklad: volně stojící betonový sloup vystavený vlivům tepelných výkyvů. Tážeme se, jak vnikají tepelná kolísání do válce a jak probíhají.

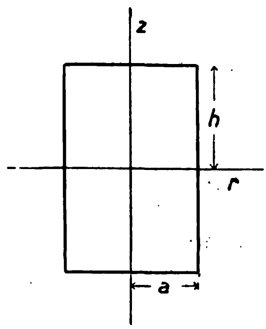
Diferenciální rovnice tepelného proudu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varkappa^2 \Delta u$$

uvnitř válce nabývá v případě osové souměrnosti tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varkappa^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \tag{1}$$

kdež u značí teplotu, t jest čas, r a z mají význam patrný z obr. 1. Na úhlu φ teplota u nezávisí. Rovnici (1) řešíme známým způsobem. Partikulární řešení pro u píšeme v komplexním tvaru



Obr. 1.

$$u = R(r)\, e^{i\nu t} \cos \lambda z \tag{2}$$

a smluvíme, že reálná část komplexní veličiny u, tedy $\Re\, u$, představuje teplotu. Pro souměrnost válce vůči rovině $z = 0$ bude patrně u sudou funkcí proměnné z; proto jsme zvolili pro závislost na z funkci $\cos z$. Zavedeme-li nyní integrál (2) do diferenciální rovnice (1), obdržíme pro R diferenciální rovnici

$$R'' + \frac{1}{r} R' - \left(\lambda^2 + \frac{i\nu}{\varkappa^2}\right) R = 0. \tag{3}$$

Integrál této rovnice jest

$$R = cJ_0\left[r\sqrt{-\left(\frac{i\nu}{\varkappa^2} + \lambda^2\right)}\right]; \tag{4}$$

$J_0(x)$ jest Besselova funkce argumentu x a indexu nula.[1]) Pro partikulární řešení plyne pak

$$u = e^{i\nu t} \, . \cos \lambda z \, . J_0\left[r\sqrt{-\left(\frac{i\nu}{\varkappa^2} + \lambda^2\right)}\right].$$

Ve vnějším prostoru jest teplota závislá na času a mění se s danou kruhovou frekvencí ν. Amplitudu tepelných změn, která je také známa, označíme A a předpokládáme, že se střední teplota rovná nule.[2]) Podmínky, které mají býti splněny na povrchu válce, pak znějí

$$u = Ae^{i\nu t} \quad \text{pro } r = a \tag{5}$$

a

$$u = Ae^{i\nu t} \quad \text{pro } z = \pm h. \tag{6}$$

Řešení provedeme takto[3]): Nejdříve stanovíme funkci u_1, která vyhovuje těmto krajovým podmínkám

$$u_1 = Ae^{i\nu t} \quad \text{pro } r = a \tag{7}$$

a

$$u_1 = 0 \quad \text{pro } z = \pm h, \tag{8}$$

pak určíme druhou funkci u_2, která hoví podmínkám

$$u_2 = 0 \quad \text{pro } r = a \tag{9}$$

a

$$u_2 = Ae^{i\nu t} \quad \text{pro } z = \pm h. \tag{10}$$

Potom jistě splňuje

$$u = u_1 + u_2$$

podmínky (5) a (6).

Podmínka (8) dává hodnoty pro λ, neboť z rovnice

$$u\Big|_{z=\pm h} = e^{i\nu t} \cos \lambda h \, . J_0\left[r\sqrt{-\left(\frac{i\nu}{\varkappa^2} + \lambda^2\right)}\right] = 0$$

---

[1]) Obecný integrál vlastně zní:

$$R = c\, J_0(x) + c_1\, Y_0(x),$$

$Y_0(x)$ jest Neumannova funkce. Pro $x = 0$ roste $Y_0(x)$ přes všechny meze, takže c_1 nutno zvoliti rovno nule, abychom zamezili vzrůstu funkce R a tím též teploty u na nekonečně velkou hodnotu.

[2]) Vhodnou volbou nulového bodu dá se toho vždy dosáhnouti.

[3]) Na možnost rozkladu $u = u_1 + u_2$ upozornil mne p. prof. Weyrich.

vyplývá $\cos \lambda h = 0$ a tedy

$$\lambda = (n + \tfrac{1}{2}) \frac{\pi}{h}.$$

Pro u_1 se tak obdrží

$$u_1 = e^{i\nu t} \sum_{n=0}^{\infty} a_m \cos (n + \tfrac{1}{2}) \frac{z}{h} \pi \,.\, J_0 \left[r \sqrt{-\left(\frac{i\nu}{\varkappa^2} + (n + \tfrac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{h^2} \right)} \right].$$

Veličiny a_n jsou prozatím libovolné konstanty; určíme je z podmínky (7), jež nabývá tvaru

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos (n + \tfrac{1}{2}) \frac{z}{h} \pi \,.\, J_0 \left[a \sqrt{-\left(\frac{i\nu}{\varkappa^2} + (n + \tfrac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{h^2} \right)} \right]. \quad (11)$$

Konstanty a_n dostaneme známou metodou; obě strany rovnice (11) násobíme

$$\cos (n + \tfrac{1}{2}) \frac{z}{h} \pi \, dz$$

a integrujeme dle z v mezích od $- h$ do h. Počet dává

$$a_n = \frac{2(-1)^n A}{(n + \tfrac{1}{2}) \pi J_0 \left[a \sqrt{-\left(\frac{i\nu}{\varkappa^2} + (n + \tfrac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{h^2} \right)} \right]}.$$

Tím konečně vznikne pro u_1 výraz:

$$u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n A e^{i\nu t} \,.\, \cos (n + \tfrac{1}{2}) \frac{z}{h} \pi \,.\, J_0 \left[r \sqrt{-\left(\frac{i\nu}{\varkappa^2} + (n + \tfrac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{h^2} \right)} \right]}{(n + \tfrac{1}{2}) \pi J_0 \left[a \sqrt{-\left(\frac{i\nu}{\varkappa^2} + (n + \tfrac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{h^2} \right)} \right]}. \quad (12)$$

Řešení pro u_2 nalezneme podobným způsobem. Podmínka (9) dává

$$J_0 \left[a \sqrt{-\left(\frac{i\nu}{\varkappa^2} + \lambda^2 \right)} \right] = 0.$$

Jsou-li j_m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ kořeny rovnice[4]) $J_0(x) = 0$, je

$$a \sqrt{-\left(\frac{i\nu}{\varkappa^2} + \lambda^2 \right)} = j_m$$

a z toho

$$\lambda = \sqrt{-\left(\frac{j_m^2}{a^2} + \frac{i\nu}{\varkappa^2} \right)}.$$

---

[4]) **Kořeny této rovnice jsou tabelovány. Srv. Jahnke-Emde, Funktionentafeln, Lipsko 1928, str. 122.**

Lze tedy u_2 dáti tvar

$$u_2 = \sum_{m=0}^{\infty} b_m e^{i\nu t} \cos z \sqrt{-\left(\frac{j_m^2}{a^2} + \frac{i\nu}{\varkappa^2}\right)} \, . \, J_0\left(j_m \frac{r}{a}\right).$$

Zbývá ještě poslední krajní podmínka (10)

$$u_2\Big|_{z=\pm h} = Ae^{i\nu t},$$

z ní plyne

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} b_m \cos h \sqrt{-\left(\frac{j_m^2}{a^2} + \frac{i\nu}{\varkappa^2}\right)} \, . \, J_0\left(j_m \frac{r}{a}\right).$$

Konstanty b_m dostaneme, násobíme-li předešlou rovnici

$$rJ_0\left(j_m \frac{r}{a}\right)$$

a integrujeme-li podle r v mezích od 0 do a.

Integrace dává nejprve

$$A \frac{a}{j_m} \left| rJ_1\left(\frac{j_m}{a} r\right)\right|_0^a = b_m \cos h \sqrt{-\left(\frac{j_m^2}{a^2} + \frac{i\nu}{\varkappa^2}\right)} \left[J_0^2(j_m) + J_1^2(j_m)\right] \frac{a^2}{2}$$

a se zřetelem k

$$J_0(j)_m = 0$$

zjednoduší se výraz a pro b_m plyne

$$b_m = \frac{2A}{j_m J_1(j_m) \cos h \sqrt{-\left(\frac{j_m^2}{a^2} + \frac{i\nu}{\varkappa^2}\right)}},$$

takže konečně u_2 nabývá tvaru

$$u_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2Ae^{i\nu t} J_0\left(j_m \frac{r}{a}\right) \cos z \sqrt{-\left(\frac{j_m^2}{a^2} + \frac{i\nu}{\varkappa^2}\right)}}{j_m J_1(j_m) \cos h \sqrt{-\left(\frac{j_m^2}{a^2} + \frac{i\nu}{\varkappa^2}\right)}}. \tag{13}$$

Hledané rozdělení teploty skládá se aditivně z těchto částečných řešení u_1 a u_2, takže

$$u = u_1 + u_2, \tag{14}$$

čímž řešení dané úlohy jest úplně určeno.

Pro numerické počítání bude výhodnější, napíšeme-li výrazy (12) a (13) v trochu pozměněném tvaru, který nám zároveň objasní fysikální smysl nalezeného řešení. Dále zavedeme nová označení. Vypočteme reálné části veličin u_1 a u_2, o které konečně jde, asi takto.

Označíme (12)

$$\left|\left\{\frac{i\nu}{\varkappa^2} + (n+\tfrac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{h^2}\right\}\right| = p_n$$

a

$$\frac{\nu}{\varkappa^2 (n+\frac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{h^2}} = \operatorname{tg} \varphi_n,$$

potom jest

$$\sqrt{-p_n e^{i\varphi_n}} = \sqrt{p_n} \,.\, e^{i\left(\frac{\varphi_n}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}. \tag{15}$$

Dosadíme do výrazu

$$J_0\left(r\sqrt{\frac{i\nu}{\varkappa^2} + (n+\tfrac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{h^2}}\right)$$

hodnotu (15) a obdržíme

$$J_0\left[r\sqrt{p_n} \exp i\left(\frac{\varphi_n}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right] = M_n e^{i\psi_n}$$

a podobně

$$J_0\left[h\sqrt{p_n} \exp i\left(\frac{\varphi_n}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \overline{M}_n e^{i\overline{\psi}_n}.$$

Číselné hodnoty těchto funkcí lze přehlédnouti z tabulky,[5]) při čemž veličina ψ jest funkcí proměnné r. Reálná část $\Re u_1$ dá se tudíž vyjádřiti výrazem

$$\Re u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\,(-1)^n A \cos (n+\frac{1}{2}) \frac{z}{h} \pi M_n}{(n+\frac{1}{2})\,\pi \overline{M}_n} \cos(\nu t + \psi_n - \overline{\psi}_n)$$

a představuje, jak se dalo očekávati, vlnu, která směrem poloměru postupuje a ve směru osy z nabývá charakteru stojaté vlny.

Abychom vypočetli reálnou část $\Re u_2$, zavedeme nejprve tato označení:

$$\cos z\sqrt{-\left(\frac{j_m^2}{a^2} + \frac{i\nu}{\varkappa^2}\right)} = c_m e^{i\gamma_m}$$

a

$$\cos h\sqrt{-\left(\frac{j_m^2}{a^2} + \frac{i\nu}{\varkappa^2}\right)} = \bar{c}_m e^{i\bar{\gamma}_m}.$$

[5]) K. Hayasi, Fünfstellige Funktionentafeln, Berlín 1930, str. 145.

Veličina γ závisí na proměnné z. Tak dospíváme k vzorci

$$u_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2AJ_0\left(j_m \frac{r}{a}\right) c_m}{j_m J_1(j_m) \bar{c}_m} e^{i(\nu t + \gamma_m - \bar{\gamma}_m)}.$$

Reálná část $\Re u_2$ představuje opakem k $\Re u_1$ vlnu, která ve směru poloměru má charakter stojaté vlny a která směrem osy postupuje. Úhrnné řešení

$$\Re u_1 + \Re u_2$$

jest výslednice obou vlnových skupin.

Z právě řečeného jeví se také fysikální smysl zprvu čistě formálního rozkladu řešení v u_1 a u_2. Řešení u_1 znázorňuje tepelné vlny, které pronikají pláštěm, zatím co u_2 představuje tu část tepelného rozdělení, která odpovídá teplotě pronikající základnami válce.

Ke konci vyslovuji dík panu A. Erdelyimu za všechny jeho vzácné rady.

V Brně v srpnu 1936.

*

The distribution of temperature in a limited circular cylinder the surface temperature of which is a harmonic function of the time.

(Abstract of the preceding article.)

The distribution of temperature is sought in a limited circular cylinder surrounded by a temperature field, changing periodically with the time. The solution is composed additively from two partial solutions. The one partial solution concerns the heat penetrating through the convex surface of the cylinder (function u_1 given by the equation 12), the other partial solution considers the heat penetrating through both planes limiting the cylinder (function u_2 given by the equation 13).