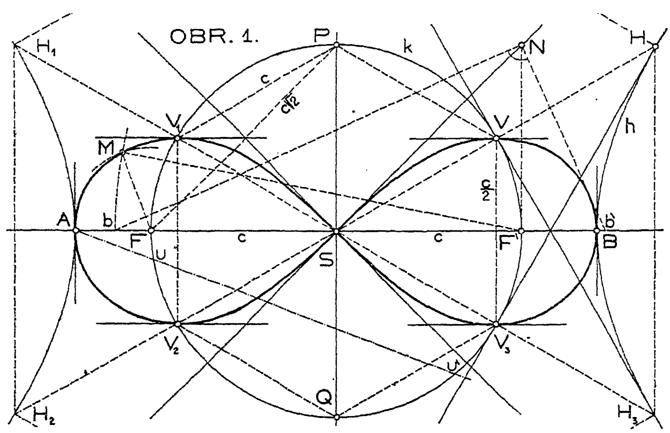
Lemniskata.

Prof. *Rudolf Marek.*

1. Definujeme-li lemniskatu jako křivku rovinnou, jejíž každý bod M má od dvou pevných bodů F, F' (ohnisek) součin vzdáleností rovný dvojmoci poloviční jejich vzdálenosti c, čili $\varrho_1 \cdot \varrho_2 = c^2$, můžeme, jak známo, jednotlivé body křivky sestrojovati z úměry $\varrho_1 : c = c : \varrho_2$, kde délku ϱ_1 volíme a ϱ_2 sestrojujeme třeba podle první věty Euklidovy, pomocí pravoúhlého trojúhelníka, v němž c jest výškou, a ϱ_1, ϱ_2 jsou příslušné úseky na přeponě.

Potom průsečíky kružnic opsaných z bodů F, F' poloměry ϱ_1, ϱ_2 jsou body lemniskaty, při čemž pro reálné body křivky smíme ϱ_1 voliti pouze v mezích od $c\sqrt{2} - c$ do $c\sqrt{2} + c$.



Poněvadž čtyři vrcholy křivky vzhledem k ose x mají souřadnice $(\pm \frac{1}{2}c\sqrt{3}, \pm \frac{1}{2}c)$, a dva její vrcholy vzhledem k ose y mají souřadnice $(\pm c\sqrt{2}, 0)$, — předpokládáme-li rovnici křivky ve tvaru $(x^2 + y^2)^2 = 2c^2 (x^2 - y^2)$ — můžeme sestrojení lemniskaty zaříditi takto:

Narýsujme kružnici k (obr. 1) o středu S a poloměru c a vepišme do ní pravidelný šestiúhelník, jehož dva protější vrcholy P, Q leží na ose y. Potom ostatní jeho čtyři vrcholy V, V_1, V_2, V_3 jsou vrcholy křivky vzhledem k ose x a dále průsečíky F, F' kružnice k s osou x jsou ohniska lemniskaty.

Vrcholy křivky vzhledem k ose y jsou A, B a obdržíme je, učiníme-li $\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{PF}$, což jest délka strany čtverce vepsaného do kružnice k.

Tak obdržíme rychle význačné body křivky (střed S jest jejím bodem uzlovým) a k sestrojení libovolného počtu dalších bodů křivky můžeme užíti zmíněného trojúhelníka pravoúhlého o výšce $\overline{F'N} = c$, v němž úsek $\overline{bF'}$ na přeponě volíme, kdežto druhý $\overline{F'b'}$ sestrojíme, nebo lze opět použíti kružnice k.

Vedeme-li k ní na př. bodem A sečnu, která ji protíná v bodech u, u', potom kružnice opsané z ohnisek F, F' poloměry $\overline{Au}$, $\overline{Au'}$ protínají se v bodě M, což jest bod křivky. Každá sečna poskytne celkem čtyři body křivky.

2. Lemniskata jest také úpatnicí rovnoosé hyperboly pro její střed. Vedeme-li středem rovnoosé hyperboly na její tečny kolmice, jest geom. místem jejich pat lemniskata, jejíž tečny v uzlovém bodě S jsou asymptotami dané hyperboly a také vrcholy na ose x obou křivek splývají. A konstanta $c = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, kde a jest délka poloosy hyperboly, čili excentricita c lemniskaty jest polovina excentricity e hyperboly.

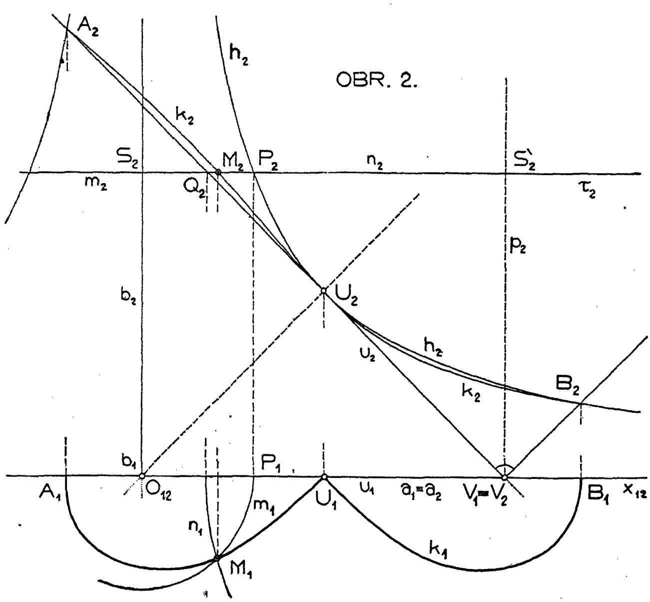
Dána-li hlavní osa $\overline{AB}$ rovnoosé hyperboly h (obr. 1), narýsujme kružnici o středu S a jdoucí ohnisky hyperboly. Vepíšeme-li do této kružnice opět pravid. šestiúhelník, jehož dva protilehlé vrcholy jsou na ose y (vedlejší ose hyperboly), pak ostatní čtyři jeho vrcholy H, H_1, H_2, H_3 leží na dané hyperbole a tečny její v těchto bodech jsou kratšími úhlopříčkami šestiúhelníka, na nichž delší úhlopříčky $\overline{HH_2}$, $\overline{H_1H_3}$ vytínají vrcholy lemniskaty V, V_1, V_2, V_3. Důkaz je snadný. Je-li totiž rovnice dané hyperboly $x^2 - y^2 = 2c^2$, (neboť $a = \overline{SB} = c\sqrt{2}$), pak z rovnostr. trojúhelníka HSH_3 plynou souřadnice bodu H $(c\sqrt{3}, c)$, které rovnici hyperboly vyhovují. Jest tedy H bodem hyperboly. Kratší úhlopříčka $\overline{HV_3}$ šestiúhelníka musí býti tečnou v bodě H, poněvadž půlí úhel jeho průvodičů (půlí jeho oblouk). Patrno též, že $\overline{SV} = \overline{VH}$, a že tečny hyperboly v bodech H jsou tečnami kružnice k v bodech V.

3. Předpokládejme v druhé průmětně hyperbolu rovnoosou, jejíž jedna asymptota a leží v ose x_{12} (obr. 2) a druhá b jest kolmá k ose, střed hyperboly h jest O_{12}. (V obraze narýsována pouze jedna větev hyperboly h).

Otáčí-li se tato hyperbola kolem své asymptoty b, otáčí se asymptota a v průmětně π a hyperbola vytvoří rotační plochu. Necháme-li otáčeti vrcholovou tečnu u této hyperboly kolem přímky p, jdoucí její prvou stopou V kolmo k prvé průmětně, vznikne rotační plocha kuželová o středu V. Obě tyto plochy rotační, jejichž osy jsou tedy spolu rovnoběžné a leží v 2. průmětně, sekou se v křivce prostorové k a lze ukázati, že prvým jejím průmětem jest lemniskata.

Abychom obdrželi bod M křivky proniku k, volme rovinu $\tau \parallel \pi$, která seče plochu rotační v kružnici m o poloměru ϱ_1 a plochu kuželovou v kružnici n o poloměru ϱ_2. Průsečík obou kružnic jest M.

Prvými průměty všech kružnic m jsou kružnice soustředné o středu O_{12}, kdežto středem prvých průmětů všech kružnic n jest V_{12}.



Pro libovolný bod P_2 hyperboly h platí

$$\overline{P_2S_2} \,.\, \overline{P_2P_1} = \overline{O_{12}U_1}^2 \text{ (známá vlastnost hyperboly),}$$

a poněvadž $\overline{P_2S_2} = \varrho_1$, $\overline{P_2P_1} = \overline{S'_2V_2} = \overline{S'_2Q_2} = \varrho_2$, a je-li $\overline{O_{12}U_1} = c$, máme vztah

$$\varrho_1 \cdot \varrho_2 = c^2,$$

což jest výtvarný zákon lemniskaty. Tím jest dokázáno, že prvým průmětem křivky proniku uvažovaných ploch rotačních jest lemniskata. (Viz Machovec, Zobrazování tečen a středů křivosti křivek, str. 23).

Výsledek tento lze potvrditi také cestou analytickou. Je-li $\overline{O_{12}U_1} = c$, jest rovnice hyperboly h

$$x_0 \,.\, z_0 = c^2. \tag{1}$$

Libovolný její bod $P_2(x_0, 0, z_0)$ vytvoří při otáčení kružnici, jejíž rovnice bude

$$x^2 + y^2 = x_0^2 \quad \text{při } z = z_0. \tag{2}$$

Vyloučením x_0 a z_0 z rovnic (1) a (2) obdržíme

$$z\sqrt{x^2 + y^2} = c^2, \tag{3}$$

což jest rovnice rotační plochy.

Vrcholová tečna u hyperboly h má rovnici

$$\frac{x'}{2c} + \frac{z'}{2c} = 1 \tag{4}$$

a libovolný její bod $Q_2(x', 0, z')$ vytvoří otáčením kolem p kružnici, jejíž rovnice jest

$$(x - 2c)^2 + y^2 = (2c - x')^2, \text{ při } z = z'. \tag{5}$$

Vyloučením x', y' z rovnic (4) a (5) plyne

$$(x - 2c)^2 + y^2 = z^2, \tag{6}$$

což jest rovnice plochy kuželové o středu V_{12}.

Z rovnic (3) a (6) vyloučením z dostaneme vztah pouze mezi x a y

$$(x - 2c)^2 + y^2 = \frac{c^4}{x^2 + y^2}, \tag{7}$$

čili rovnici prvého průmětu prostorové křivky proniku, tedy rovnici lemniskaty, kde však počátek souřadnic jest v jednom ohnisku křivky. Abychom obdrželi obvyklý tvar rovnice křivky, přeložíme počátek souřadnic do jejího středu tím, že v rovnici (7) píšeme $x + c$ místo x a upravíme. Výsledkem bude

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2),$$

známý tvar rovnice lemniskaty.

4. Lemniskata může vzniknouti i jako průsek anuloidu, jehož kružnice hrdelní má týž poloměr jako kružnice tvořicí, s rovinou rovnoběžnou s osou plochy a dotýkající se anuloidu v jednom bodě kružnice hrdelní.

Předpokládejme v prostoru tři osy k sobě kolmé x, y, z, (obr. 3, v šikmé projekci) a v rovině xz kružnici k' o středu $S(m, 0, n)$ a poloměru r. Její rovnice jest potom

$$(x' - m)^2 + (z' - n)^2 = r^2. \tag{1}$$

Otáčí-li se kružnice k' kolem osy z, vytvoří anuloid čili plochu okruhovou a osa z jest její osou. Libovolný její bod $M'(x', 0, z')$ opíše při otáčení kružnici k, jejíž rovnice bude

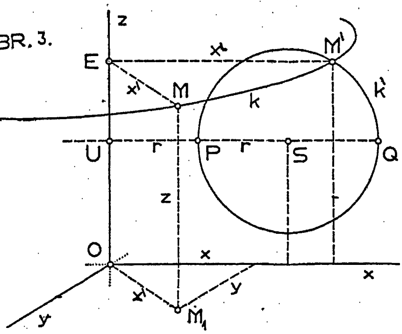
$$x^2 + y^2 = x'^2, \text{ při } z = z'. \tag{2}$$

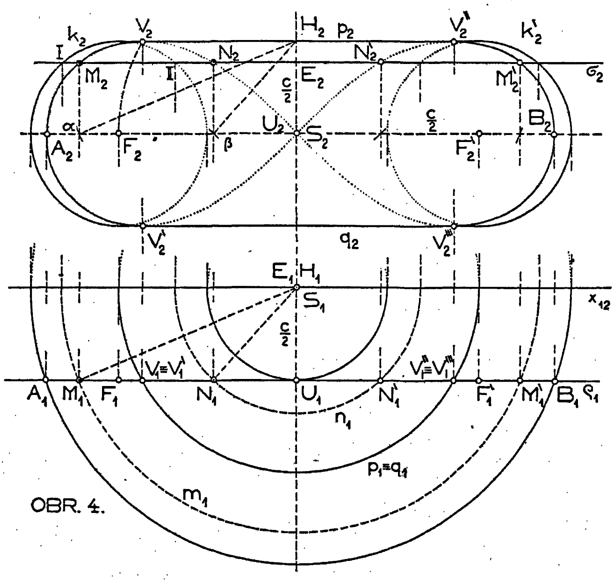
Eliminací x' a z' z rovnic (1) a (2) plyne rovnice anuloidu

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - m)^2 + (z - n)^2 = r^2. \qquad (3)$$

Aby rovinným řezem plochy mohla býti lemniskata, položíme v této rovnici $m = 2r$ (podle podmínky vyslovené na poč. tohoto

OBR. 3.





OBR. 4.

odstavce) a současně pro větší jednoduchost přeložíme střed anuloidu do počátku souřadnic zavedením $n = 0$. Pak obdržíme

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - 2r)^2 + z^2 = r^2. \qquad (4)$$

Je-li rovina průsečná, dotýkající se plochy v bodě kružnice hrdelní, určena rovnicí

$$y = r, \qquad (5)$$

čili rovnoběžná s rovinou xz, pak z rovnice (4) plyne rovnice průsečné křivky ve tvaru

$$(x^2 + z^2)^2 = 8r^2 (x^2 - z^2) \text{ při } y = r. \qquad (6)$$

Rovnice (6) znamená také rovnici průmětu křivky průsečné na rovinu xz, jenž je ovšem s křivkou v prostoru shodný. Patrno, že to jest skutečně rovnice lemniskaty, kde $c = 2r$.

Abychom sestrojili jednotlivé body křivky průsečné, veďme zase rovinu $\sigma \parallel \pi$ (obr. 4), která seče anuloid ve dvou soustř. povrchových kružnicích m, n a rovinu průsečnou ϱ v přímce p ($p_1 \equiv \varrho_1$). Průsečíky M, M', N, N' kružnic m, n, s př. p jsou již hledané body lemniskaty. Průsečíky kružnice nejvyšší p a nejnižší q na anuloidu s rovinou ϱ poskytují vrcholy V, V', V'', V''' lemniskaty, průsečíky rovníku s rovinou ϱ dávají vrcholy A, B a v dotyčném bodě kružnice hrdelní s rovinou průsečnou jest střed křivky U. Podle odst. 1. jest $\overline{U_2V_2} = \overline{U_2F_2} = c = \overline{U_2F'_2}$, čímž určena ohniska F, F' průsečné lemniskaty a její excentricita.

Poněvadž $\overline{H_2S_2} = \overline{S_1U_1} = \frac{1}{2}c$, jest $\triangle\, \alpha S_2H_2 \cong \triangle\, M_1U_1S_1$ a také $\triangle\, \beta S_2H_2 \cong \triangle\, N_1U_1S_1$ a dostáváme následující planimetrickou konstrukci jednotlivých bodů lemniskaty:

Jsou-li F_2, F'_2 ohniska a S_2 střed lemniskaty (obr. 4), kde $\overline{S_2F_2} = \overline{S_2F'_2} = c$, učiňme $\overline{H_2S_2} \perp \overline{F_2F'_2}$, $\overline{H_2S_2} = \frac{1}{2}c$, dále opišme poloměrem $\frac{1}{2}c$ kružnici k_2 o středu F_2 a veďme libovolnou přímku $\sigma_2 \parallel \overline{F_2F'_2}$, která seče k_2 v bodech I, II. Pak učiňme $\overline{\alpha H_2} = \overline{IE_2}$, $\overline{\alpha M_2} \perp \overline{F_2F'_2}$ a bod M jest bod lemniskaty. Podobně $\overline{\beta H_2} = \overline{IIE_2}$, $\overline{\beta N_2} \perp F_2F'_2$ dává další její vod N_2. Přeneseme-li $\overline{E_2S_2}$ za S_2 na druhou stranu, lze rázem obdržeti 8 bodů křivky. Pro vrcholy V body I a II splynou a jejich spojnice jest dvojnásobnou tečnou lemniskaty.

Plocha hyperbolické výseče.

Dr. *Marian Haas.*

V analytické geometrii některých vzorců, týkajících se elipsy, dá se použíti i pro hyperbolu, když položíme místo čtverce vedlejší poloosy b^2 hodnotu negativní $- b^2$, což v podstatě značí, že u hyperboly tato poloosa jest imaginární.

Je zajímavé, že lze tohoto způsobu použíti i k odvození vzorce pro plochu hyperbolické výseče, ačkoli se tu poloosa b vyskytuje v prvním stupni, takže musíme klásti bi.