Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Hübner

Odvození rovnic kuželoseček vzniklých na rotační ploše kuželové

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 38 (1909), No. 4, 512--516

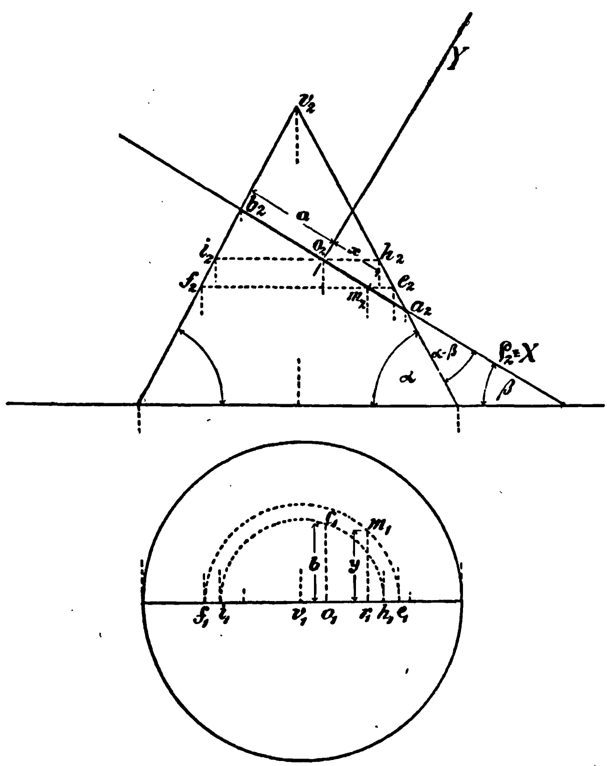
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121457

Odvození rovnic kuželoseček vzniklých na rotační ploše kuželové.

Podává **Václav Hübner**, professor na Král. Vinohradech.

I.

Kužel, jehož strany tvoří se základnou úhel α, protněme rovinou ϱ, která neprochází vrcholem a odchýlena jest od základny o úhel β. Budiž rovina ϱ kolmá k osovému řezu kužele || s průmětnou druhou, $\overline{a_2 b_2}$ průmět řezu na druhou průmětnu, o_2 druhý



Obr. 1.

průmět jeho středu. Abychom povahu tohoto průseku seznali, vztahujme jej k osám souřadným: průsečnice roviny ϱ s osovým řezem budiž X, $Y \perp X$ procházejícím středem o_2. V soustavě pravoúhelné takto určené má libovolný bod průseku $m\,(m_1,\ m_2)$ souřadnice

$$\overline{o_2 m_2} = x, \quad \overline{r_1 m_1} = y,$$

jejichž závislost jest stanoviti.

Jest však (obr. 1.)

$$\overline{r_1 m_1^2} = y^2 = \overline{f_1 r_1} \,.\, \overline{r_1 e_1} = \overline{f_2 m_2} \,.\, \overline{m_2 e_2}$$

a z trojúhelníků

$$b_2 m_2 f_2 \ , \ m_2 e_2 a_2$$

plyne

$$\overline{f_2 m_2} : \overline{b_2 m_2} = \sin[180 - (\alpha + \beta)] : \sin\alpha,$$
$$\overline{m_2 e_2} : \overline{m_2 a_2} = \sin(\alpha - \beta) : \sin(180 - \alpha).$$

Označíme-li

$$\overline{o_2 b_2} = \overline{o_2 a_2} = a,$$

jest

$$\overline{b_2 m_2} = a + x, \quad \overline{m_2 a_2} = a - x,$$

tudíž

$$\overline{f_2 m_2} = \frac{(a + x)\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha}, \quad \overline{m_2 e_2} = \frac{(a - x)\sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha},$$

pročež

$$y^2 = \frac{(a^2 - x^2)\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)}{\sin^2\alpha}. \tag{1}$$

Dále jest

$$\overline{o_1 c_1^2} = b^2 = \overline{i_1 o_1} \,.\, \overline{o_1 h_1} = \overline{i_2 o_2} \,.\, \overline{o_2 h_2}$$

a z trojúhelníků

$$b_2 i_2 o_2 \ , \ o_2 h_2 a_2$$

plyne

$$\overline{i_2 o_2} = \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha}, \quad \overline{o_2 h_2} = \frac{a \sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha};$$

proto jest

$$b^2 = \frac{a^2 \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)}{\sin^2\alpha}. \tag{2}$$

Rovnice (1) má pak tvar

$$y^2 = (a^2 - x^2)\,\frac{b^2}{a^2},$$

nebo

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

(středová rovnice ellipsy).

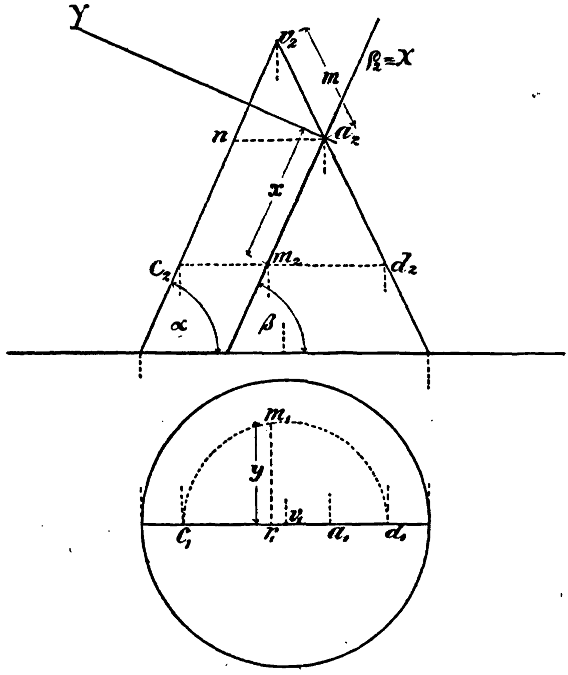
V tomto případě jest $\alpha > \beta$.

Je-li $\beta = 0$, jest z rovnice (2) $b^2 = a^2$ a ellipsa přechází v kružnici; při $\alpha = \beta$, jest z rovnice (2) $a^2 = \frac{b^2 \sin^2 \alpha}{0} = \infty$, t. j. křivka má střed v nekonečnosti, a je-li $\alpha < \beta$, jest z rovnice (2) b^2 záporné a b tudíž imaginárné. Kterak se určí rozměry kuželoseček na rotační ploše kuželové, podal jsem v Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky, roč. XXVII. čís. 1.

II.

Je-li $\alpha = \beta$, jest (obr. 2.)

$$\overline{r_1 m_1}^2 = y^2 = \overline{c_1 r_1} \,.\, \overline{r_1 d_1} = \overline{c_2 m_2} \,.\, \overline{m_2 d_2}.$$



Obr. 2.

Z $\triangle$ rovnoramenného $a_2 m_2 d_2$ plyne

$$\frac{\overline{m_2 d_2}}{2} = \overline{a_2 m_2} \cos \alpha,$$

nebo

$$\overline{m_2d_2} = 2x \cos \alpha, \ (\overline{a_2m_2} = x)$$

a z $\triangle$ rovnoramenného na_2v_2

$$\frac{m_2c_2}{2} = \frac{\overline{na_2}}{2} = m \cos \alpha, \ (\overline{v_2a_2} = m);$$

proto jest

$$y^2 = 2m \cos \alpha \,.\, 2x \cos \alpha = 2px,$$

značí-li

$$p = 2m \cos^2 \alpha.$$

Průsek roviny s plochou kuželovou jest v tomto případě parabolický.

III.

Je-li $\alpha < \beta$, jest $x > a$; z rovnice (1) obdržíme

$$y^2 = \frac{(x^2 - a^2) \sin(\alpha + \beta) \sin(\beta - \alpha)}{\sin^2 \alpha}$$

a z rovnice (2)

$$b^2 = \frac{a^2 \sin(\alpha + \beta) \sin(\beta - \alpha)}{\sin^2 \alpha};$$

proto jest

$$y^2 = \frac{(x^2 - a^2)\, b^2}{a^2},$$

t. j.

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

(středová rovnice hyperboly).

Má-li býti $a = b$ (hyperbola rovnoosá), musí

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{\sin(\alpha + \beta) (\sin \beta - \alpha)}{\sin^2 \alpha} = 1$$

a

$$\sin \beta = \sin \alpha \,.\, \sqrt{2}.$$

(Časopis pro pěstování math. a fysiky roč. XXXIII. č. 2.)

Připomenutí.

Béřeme-li za základ rovnici vrcholovou kuželosečky

$$y^2 = 2\,\frac{b^2}{a}\,x - \frac{b^2}{a^2}\,x^2,$$

obdržíme v tomto případě

$$y^2 = 2\,\frac{m^2\cos^2\alpha\,\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}}{\dfrac{m\sin 2\alpha}{2\sin(\alpha-\beta)}}\,x - \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha}\,x^2,$$

kdež $m = \overline{v_2 b_2}$, $a = \dfrac{m\sin 2\alpha}{2\sin(\alpha-\beta)}$, $b = m\cos\alpha\sqrt{\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}}$, (obr. 1.).

Jest tedy

$$y^2 = 2mx\,\mathrm{cotg}\,\alpha\,\sin(\alpha+\beta) - x^2\,\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha};$$

z podmínek

$$1)\ \alpha > \beta,\quad 2)\ \alpha < \beta,\quad 3)\ \alpha = \beta,$$

poznáváme pak tvar křivky.

Srovnej s „Geometrií pro vyšší školy reálné“ — sepsal Al. Strnad, ředitel c. k. reálky v Kutné Hoře. — Díl III.

Mosaika.

Mnozí z Vás, mladí přátelé, četli asi jako já v denních listech o polární výpravě, kterou do jižního ledového moře podnikl poručík anglický Shackleton. Výprava taková do končin tak strašně pustých a nehostinných, jako jsou končiny polární, budí vždy zájem celého vzdělaného světa; a kdo se zdarem ji podnikne a provede, stává se hrdinou dne, a to plným právem. Velebí-li se chrabrost vojevůdce, který vedl válečnou výpravu proti nepříteli, zdaž není větší chrabrostí pustiti se v boj se živly, proti nimž síla lidská jest tak nepatrna, nelekati se útrap a strádání všeho druhu, a to vše ze zájmu vědeckého a z té touhy fascinující stanouti na místech, kam ještě žádný člověk před tím nevkročil? Shackleton zúčastnil se již v letech 1901—1903 podobné výpravy jako třetí důstojník na lodi Discovery, které velel Scott. Nejjižnější bod, jehož tato výprava dostihla, byl na 82°17′ jižní šířky. Tentokráte však podnikl výpravu samostatnou; vyplul se svou lodí Nimrod z Nového Seelandu koncem července 1907, aby ztrávil zimu — v našem smyslu — na jihu. V době naší zimy jest v krajinách jižního polárního moře „léto“, ovšem