Otakar Borůvka

O korespondencích s charakteristickými křivkami o rovnici $dx^3 - dy^3 = 0$

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 57 (1928), No. 3-4, 183--185

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121392

O korespondencích s charakteristickými křivkami o rovnici $dx^3 - dy^3 = 0$.

Napsal *O. Borůvka.*

V úvahách o analytických korespondencích mezi dvěma projektivními rovinami vyskytl se mi typ korespondencí (závislých na pěti konstantách) vyznačujících se vlastností, že diferenciální *rovnici* jejich charakteristických křivek lze uvésti na tvar $dx^3 - dy^3 = 0$.[1]) Jest otázka, jaká jest obecnost nejobecnějších korespondencí mající tuto vlastnost.

V tomto článku ukáži, že nejobecnější korespondence toho druhu závisí na *jedné libovolné funkci dvou argumentů.* Pozoruhodný jest jejich zvláštní případ, kdy lze kubickou diferenciální *formu,* jež definuje charakteristické křivky, psáti ve tvaru $dx^3 - dy^3$. O takových korespondencích ukáži, že závisí obecně na *šesti libovolných funkcích jednoho argumentu.*

*

1. Korespondence o něž jde, mohou býti jenom prvního druhu. Lze je tedy definovati systémem Pfaffových rovnic[2])

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \omega_1 & \tau_2 &= \omega_2, \\ \tau_{11} - \tau_{00} &= \omega_{11} - \omega_{00}, & \tau_{22} - \tau_{00} &= \omega_{22} - \omega_{00}, \\ \tau_{12} &= \omega_{12} + \omega_1, & \tau_{21} &= \omega_{21} + \omega_2, \\ \omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} &= 0, & \tau_{00} + \tau_{11} + \tau_{22} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

a podmínkami položenými na charakteristické křivky. Rovnice charakteristických křivek korespondencí definovaných systémem (1) jest

$$\omega_1^3 - \omega_2^3 = 0,$$

a tedy, aby byla ekvivalentní s rovnicí

$$dx^3 - dy^3 = 0,$$

[1]) Viz mé pojednání „Sur les correspondances analytiques entre deux plans projectifs“ (Deuxiéme partie) (Spisy vyd. přírodovědeckou fakultou Masarykovy university, čís. 85) str. 19.

[2]) Pokud definice forem ω_{ik}, τ_{ik} se týče, viz cit. pojednání str. 7. Systém (1) definuje nejobecnější korespondence prvního druhu (srov. *první* část cit. pojednání str. 17; Spisy vyd. přír. fak. Masarykovy univ. čís. 72).

jest nutné a stačí, aby existovaly proměnné t, x, y takové, že platí identicky

$$t\omega_1 = dx, \quad t\omega_2 = dy. \tag{2}$$

Hledané korespondence jsou tedy definovány systémem Pfaffových rovnic (1) a (2).

Ukáži, že tento systém jest v involuci a jeho řešení závisí na jedné libovolné funkci dvou argumentů. Vskutku, pro každé dva lineární integrální elementy v involuci tohoto systému platí bilineární relace

$$\begin{aligned}
&[\omega_1(2\omega_{10} - \tau_{10} + \omega_{21} + \tfrac{1}{2}\omega_2)] + [\omega_2\,(\omega_{20} - \tau_{20} - \omega_{12} + \tfrac{1}{2}\omega_1)] = 0,\\
&[\omega_1\,(\omega_{10} - \tau_{10} - \omega_{21} + \tfrac{1}{2}\omega_2)] + [\omega_2(2\omega_{20} - \tau_{20} + \omega_{12} + \tfrac{1}{2}\omega_1)] = 0,\\
&[\omega_1(2\omega_{11} - \omega_{00} - \omega_{22} - \omega_{00})] - [\omega_2\,(\omega_{10} - \tau_{10} - \omega_{21} + \tfrac{1}{2}\omega_2)] = 0,\\
&[\omega_1\,(\omega_{20} - \tau_{20} - \omega_{12} + \tfrac{1}{2}\omega_1)] - [\omega_2(2\omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{00})] = 0,\\
&\left[\omega_1\left(\frac{dt}{t} - \omega_{11} - \omega_{00}\right)\right] - [\omega_2(\omega_{21} + \tfrac{1}{2}\omega_2)] = 0,\\
&[\omega_1(\omega_{12} + \tfrac{1}{2}\omega_1)] - \left[\omega_2\left(\frac{dt}{t} - \omega_{22} - \omega_{00}\right)\right] = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Z nich plyne bezprostředně, že systém charakteristický přidružený systému (1) a (2) jest dán tímto systémem a rovnicemi

$$\begin{gathered}
\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0,\\
\omega_{10} - \tau_{10} = 0, \quad \omega_{20} - \tau_{20} = 0,\\
\omega_{11} - \omega_{00} = 0, \quad \omega_{22} - \omega_{00} = 0,\\
\omega_{12} = 0, \quad dt = 0, \quad \omega_{21} = 0.
\end{gathered} \tag{4}$$

Tedy jest třída daného systému *19* a tedy počet proměnných (n), jež se v něm podstatně vyskytují *19*, z nichž *2* neodvislé. Původní systém obsahuje $(s =)$ *10* nezávislých rovnic a pro jeho charaktery s_1, s_2 platí, jak se zjistí snadným počtem,

$$s_1 = 6, \quad s_1 + s_2 = 7;$$

tedy jest

$$q\,(= n - s - 2) = 7$$

a tedy

$$2q - s_1 = 8.$$

Na druhé straně plyne z rovnic (3), že počet parametrů, na nichž závisí obecný integrální element E_2, pro nějž formy ω_1, ω_2 jsou nezávislé, jest rovněž *8*. Tedy jest uvažovaný systém v involuci a jeho řešení závisí na jedné libovolné funkci dvou argumentů.

Nejobecnější korespondence, jejichž charakteristické křivky lze vyjádřiti rovnicí $dx^3 - dy^3 = 0$, závisí na jedné libovolné funkci dvou argumentů.

2. Jako zvláštní případ uvažovaných korespondencí vytknu ty, jejichž kubickou diferenciální *formu*, jež definuje charakteristické křivky, lze uvésti na tvar $dx^3 - dy^3$. Takové korespondence

jsou definovány systémem rovnic (1) a (2) s podmínkou $t = 1$. Z tvaru bilineárních relací (3), v nichž se pak mimo ω_1, ω_2 vyskytuje šest nových forem Pfaffových dá se čekati, že uvažovaný systém jest v involuci a jeho řešení závisí na šesti libovolných funkcích jednoho argumentu. To lze ostatně snadno ukázati tak, že se (pro $t = 1$) relace (3) napíší ve tvaru

$$\begin{aligned}
&[(\omega_1 - \omega_2)(\overline{\omega_{10} - \tau_{10}} - \overline{\omega_{20} - \tau_{20}} + \overline{\omega_{11} - \omega_{22}})] = 0, \\
&[(\omega_1 - \varepsilon\omega_2)(\overline{\omega_{10} - \tau_{10}} - \varepsilon^2\overline{\omega_{20} - \tau_{20}} + \overline{\varepsilon\omega_{11} - \omega_{22}})] = 0, \quad \left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) \\
&[(\omega_1 - \varepsilon^2\omega_2)(\overline{\omega_{10} - \tau_{10}} - \overline{\varepsilon\omega_{20} - \tau_{20}} + \varepsilon^2\overline{\omega_{11} - \omega_{22}})] = 0, \\
&[(\omega_1 - \omega_2)(\overline{\omega_{10} - \tau_{10}} + \overline{\omega_{20} - \tau_{20}} - 3\overline{\omega_{11} + \omega_{22}} + \\
&\qquad + 2\overline{\omega_{12} + \tfrac{1}{2}\omega_1} + 2\overline{\omega_{21} + \tfrac{1}{2}\omega_2})] = 0, \qquad (5) \\
&[(\omega_1 - \varepsilon\omega_2)(\overline{\omega_{10} - \tau_{10}} + \varepsilon^2\overline{\omega_{20} - \tau_{20}} - 3\varepsilon\overline{\omega_{11} + \omega_{22}} + \\
&\qquad + 2\varepsilon^2\overline{\omega_{12} + \tfrac{1}{2}\omega_1} + 2\overline{\omega_{21} + \tfrac{1}{2}\omega_2})] = 0, \\
&[(\omega_1 - \varepsilon^2\omega_2)(\overline{\omega_{10} - \tau_{10}} + \varepsilon\overline{\omega_{20} - \tau_{20}} - 3\varepsilon^2\overline{\omega_{11} + \omega_{22}} + \\
&\qquad + 2\varepsilon\overline{\omega_{12} + \tfrac{1}{2}\omega_1} + 2\overline{\omega_{21} + \tfrac{1}{2}\omega_2})] = 0.
\end{aligned}$$

Nejobecnější korespondence, jejichž kubickou diferenciální formu, jež definuje charakteristické křivky, lze uvésti na tvar $dx^3 - dy^3$, závisí na šesti libovolných funkcích jednoho argumentu.

Mimo to plyne z relací (5), že existují tři systémy dvojných charakteristik uvažovaného Pfaffova systému, dané rovnicemi $\omega_1 - \omega_2 = 0$, $\omega_1 - \varepsilon\omega_2 = 0$, $\omega_1 - \varepsilon^2\omega_2 = 0$; *jsou to charakteristické křivky uvažovaných korespondencí.*

Sur les correspondances dont l'équation des courbes caractéristiques est reductible à la forme $dx^3 - dy^3 = 0$.

(Extrait de l'article précédent.)

Je démontre les deux théorèmes suivants:

1. *Il existe des correspondances analytiques entre deux plans projectifs dont l'équation des courbes caractéristiques est reductible à la forme $dx^3 - dy^3 = 0$ et les correspondances les plus générales, jouissant de cette propriété, dépendent d'une fonction arbitraire de deux arguments.*

2. *Il existe des correspondances analytiques entre deux plans projectifs dont la forme cubique différentielle qui définit les courbes caractéristiques est reductible à la forme $dx^3 - dy^3$. Elles dépendent, en général, de six fonctions arbitraires d'un argument.*

Quant à la méthode et la notation que j'applique dans cet article, je renvoie le lecteur à mon Mémoire „Sur les correspondances analytiques entre deux plans projectifs". (Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, No 85; Brno, 1927.)