Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Eduard Čech

O funkcích x^s, e^x, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 57 (1928), No. 3-4, 208--216

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121391`

O funkcích x^s, e^x, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$.

Eduard Čech.

1. Pro $\alpha > 0$ nechť $\sqrt{\alpha}$ znamená kladné číslo, jehož dvojmoc rovná se α. Definujme rekurentně: $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_{n+1} = \sqrt{\alpha_n}$. Pak jest $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 1$. Důkaz. Pro určitost rechť $\alpha > 1$, takže $\alpha_n > 1$. Avšak

$$\alpha_{n+1} - 1 = \sqrt{\alpha_n} - 1 = \frac{\alpha_n - 1}{\sqrt{\alpha_n} + 1} = \frac{\alpha_n - 1}{\alpha_{n+1} + 1} < \frac{\alpha_n - 1}{2},$$

z čehož indukcí $0 < \alpha_n - 1 \leqq \frac{\alpha - 1}{2^n}$, tedy vskutku $\alpha_n \to 1$.

2. Buď $\mathfrak{R}$ množství všech reálních čísel. Buď $\mathfrak{A}$ množství čísel tvaru $\frac{\nu}{2^n}$; buď $\mathfrak{A}^0$ množství kladných čísel z $\mathfrak{A}$. Množství $\mathfrak{A}$ je husté v $\mathfrak{R}$.

3. Buď $\alpha^{\frac{\nu}{2^n}} = \alpha_n^\nu$. Tím jest (při $\alpha > 0$) funkce α^x jednoznačně definována v $\mathfrak{A}$. Zřejmě jest to monotonní funkce, jejíž hodnoty jsou vesměs kladné a jež v $\mathfrak{A}$ splňuje funkční rovnice

$$\alpha^{x+y} = \alpha^x \,.\, \alpha^y; \quad \alpha^x \,.\, \beta^x = (\alpha\beta)^x; \quad (\alpha^x)^y = \alpha^{xy}. \tag{1}$$

4.[1]) Buď $a_0 = 0$; pro $1 \leqq \nu \leqq k$ buď $a_{\nu+1} - 2a_\nu + a_{\nu-1} > 0$. Pak jest $\frac{a_{k+1}}{k+1} > \frac{a_k}{k}$. Důkaz indukcí.

5.[2]) Buď $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$. Kladu-li ve **4.** $a_\nu = \alpha^{\frac{\nu}{2^n}} - 1$, jest

$$a_{\nu+1} - 2a_\nu + a_{\nu-1} = \alpha^{\frac{\nu-1}{2^n}} \left(\alpha^{\frac{1}{2^n}} - 1\right)^2 > 0,$$

takže pro k celé kladné

$$\frac{\alpha^{\frac{k+1}{2^n}} - 1}{k+1} > \frac{\alpha^{\frac{k}{2^n}} - 1}{k}.$$

---

[1]) V. Bromwich: An introduction to the theory of infinite series, kap. I, př. 19.
[2]) L. c., př. 20.

Tedy funkce $\frac{a^x-1}{x}$ $(a>0,\ a\neq 1)$ stoupá v $\mathfrak{A}^0$. Ježto

$$\frac{a^x-1}{xa^x}=-\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^x-1}{x},$$

funkce $\frac{a^x-1}{xa^x}$ klesá v $\mathfrak{A}^0$.

6. Podle **1.** jest $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{2^n}}=1$. Podle (1) je $a^{-x}=1:a^x$; mimo to a^x je monotonní v $\mathfrak{A}$. Odtud snadno plyne, že $\lim\limits_{x\to 0} a^x=1$, kde při tvoření limity x jest omezeno na $\mathfrak{A}$. Odtud a z (1_1) vychází, že a^x je spojitá v $\mathfrak{A}$.

7. Ze **6.** plyne, že lze definici funkce a^x rozšířiti z $\mathfrak{A}$ na $\mathfrak{R}$ jedním a jen jedním způsobem tak, že a^x je spojitá v $\mathfrak{R}$. Ze spojitosti vychází, že a^x nabývá v $\mathfrak{R}$ pouze kladných hodnot, že funkční rovnice (1) platí v $\mathfrak{R}$, konečně (v **5.**), že pro $x>0$ funkce $\frac{a^x-1}{x}$ stoupá a funkce $\frac{a^x-1}{xa^x}$ klesá (není-li $a=1$).

8.[3]) Buď s reální číslo. Funkce x^s je podle **7.** definována pro $x>0$. Pro určitost nechť $s>1$. Pak jest pro $0<x<y$

$$sx^{s-1}(y-x)<y^s-x^s<sy^{s-1}(y-x). \tag{2}$$

Důkaz. $\frac{y}{x}\neq 1$, takže z funkcí proměnné ξ

$$\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^\xi-1}{\xi},\quad \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^\xi-1}{\xi\left(\frac{y}{x}\right)^\xi}$$

podle **7.** prvá stoupá a druhá klesá v oboru kladných ξ. Ježto $0<1<s$, je tedy

$$\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^s-1}{s}>\frac{\frac{y}{x}-1}{1},\quad \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^s-1}{s\left(\frac{y}{x}\right)^s}<\frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}},$$

z čehož (2). Podle (2) snadno soudíme, že funkce x^s má derivaci sx^{s-1}.

9.[4]) Buď $a>0$, $a\neq 1$. Podle **7.** pro $x>0$ funkce $\frac{a^x-1}{x}$ stoupá

[3]) Viz poznámku [2]).
[4]) L. c., př. 21.

a $\dfrac{\alpha^x-1}{x\alpha^x}$ klesá. Podíl obou funkcí jest $\alpha^x \to 1$ pro $x \to 0$. Tedy obě funkce mají pro $x \to 0$ zprava stejnou limitu (to platí i pro $\alpha = 1$); tuto limitu označím $L(\alpha)$. Je pak $L(1) = 0$ a pro $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, $x > 0$ jest

$$\frac{\alpha^x-1}{x\alpha^x} < L(\alpha) < \frac{\alpha^x-1}{x}; \tag{3}$$

tedy zejména

$$\frac{\alpha-1}{\alpha} < L(\alpha) < \alpha - 1. \tag{4}$$

Podle (4) jest

$$L(\alpha) > 0 \text{ pro } \alpha > 1; \quad L(\alpha) < 0 \text{ pro } \alpha < 1. \tag{5}$$

Podle (1_2) jest

$$\frac{(\alpha\beta)^x-1}{x} = \alpha^x \frac{\beta^x-1}{x} + \frac{\alpha^x-1}{x},$$

z čehož pro α, $\beta > 0$

$$L(\alpha\beta) = L(\alpha) + L(\beta). \tag{6}$$

Podle (5) a (6) $L(\alpha)$ stoupá v oboru kladných α. Mimo to ze (6) plyne, že pro celé n

$$L(\alpha^n) = n\,L(\alpha). \tag{7}$$

10. Podle (4) jest $\lim\limits_{\alpha \to 1} L(\alpha) = 0$. Odtud a ze (6) plyne, že $L(\alpha)$ je spojitá v oboru kladných α. Hodnoty, jichž nabude, tvoří tedy interval J; J je zdola i shora neohraničený podle (7). Tedy $J = \mathfrak{R}$. Tedy $L(\alpha)$ nabude každé reálné hodnoty; a každé jen jednou, ježto stoupá. Zejména tedy existuje jedno a jen jedno číslo — označme je e — takové, že $L(e) = 1$. Podle (5) jest $e > 1$. Ze (3) vychází ihned, že

$$1 + x < e^x \text{ pro } x \gtrless 0. \tag{8}$$

Pro každé reálné α jest

$$e^\alpha = \lim_{x \to 0} (1 + \alpha x)^{\frac{1}{x}}. \tag{9}$$

Důkaz. Pro $\alpha = 0$ zřejmé. Nechť tedy $\alpha \neq 0$. Buď $0 < x < \dfrac{1}{|\alpha|}$. Podle (7) jest

$$0 < 1 + \alpha x < e^{\alpha x}. \tag{10}$$

Ježto $x > 0$, funkce $\xi^{\frac{1}{x}}$ proměnné ξ stoupá v oboru kladných ξ. Tedy z (10) plyne podle (1_3)

$$0 < (1 + \alpha x)^{\frac{1}{x}} < e^\alpha. \tag{11}$$

Podle (7) je dále
$$1+\alpha x = 1 - \frac{\alpha x}{1+\alpha x} < e^{-\frac{\alpha x}{1+\alpha x}},$$
z čehož podobně jako výše
$$(1+\alpha x)^{\frac{1+\alpha x}{x}} > e^{\alpha}.$$
Odtud a z (11) vychází, že pro $0 < x < \frac{1}{|\alpha|}$ jest
$$e^{\alpha}(1+\alpha x)^{-\alpha} < (1+\alpha x)^{\frac{1}{x}} < e^{\alpha}.$$
Odtud plyne bez obtíží
$$e^{\alpha} = \lim_{x\to 0+} (1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}. \tag{12}$$
Avšak
$$[1+\alpha\,.\,(-x)]^{\frac{1}{-x}} = \frac{1}{(1-\alpha x)^{\frac{1}{x}}},$$
takže podle (12)
$$\lim_{x\to 0-} (1+\alpha x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0+} (1-\alpha x)^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{e^{-\alpha}} = e^{\alpha}.$$
Odtud a z (12) plyne (9). Zejména je tedy
$$e = \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$
Vidíme, že nerovnost (8) charakterisuje číslo e.[5])

11. Podle **9.** jest
$$\lim_{x\to 0+} \frac{\alpha^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\alpha^x - 1}{x\alpha^x} = L(\alpha).$$
Avšak
$$\frac{\alpha^{-x}-1}{-x} = \frac{\alpha^x - 1}{x\alpha^x},$$
tedy
$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha^x - 1}{x} = L(\alpha). \tag{13}$$
Podle (1_1) a (13) funkce α^x má derivaci $\alpha^x\,.\,L(\alpha)$. Zejména e^x má derivaci e^x.

12. Buď $0 < x < y$. Dosadíme-li do (4) $\alpha = \frac{y}{x}$, vyjde podle (6)
$$\frac{y-x}{y} < L(y) - L(x) < \frac{y-x}{x}.$$

---

[5]) V. Sierpiński: Analiza, sv. 1, č. 1, § 47.

Tedy funkce $L(x)$ má derivaci $\frac{1}{x}$. Ze (13) plyne snadno, že $L(x)$ je přirozený logaritmus čísla $x > 0$.

13. Symbol $\sqrt{\alpha}$ byl v **1.** definován pro $\alpha > 0$. Pro jakékoli komplexní $\alpha = a + bi$ položme

$$\sqrt{\alpha} = \sqrt{\frac{|\alpha| + a}{2}} + \varepsilon i \sqrt{\frac{|\alpha| - a}{2}}, \tag{14}$$

kde $\varepsilon = 1$ pro $b \geqq 0$, $\varepsilon = -1$ pro $b < 0$. Zřejmě $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$. Pro $|\alpha| = 1$, $\alpha \neq -1$ vychází ze (14) snadno

$$\sqrt{\alpha} = A(1 + \alpha); \qquad A = \frac{1}{\sqrt{2(1+a)}} > 0. \tag{15}$$

14. Definujme rekurentně

$$r_0 = 1, \quad r_1 = -1, \quad r_{n+1} = \sqrt{r_n} \text{ pro } n \geqq 1.$$

Pak jest $|r_n| = 1$ pro všecka n, takže podle (15) pro $n \geqq 2$ jest

$$r_{n+1} = t_n(1 + r_n), \quad t_n > 0. \tag{16}$$

Buď $\varrho_n = \operatorname{Real} r_n$, $\sigma_n = \operatorname{Im} r_n$, tedy $r_n = \varrho_n + i\sigma_n$. Podle (14) je pro $n \geqq 1$

$$\varrho_{n+1} = \sqrt{\frac{1+\varrho_n}{2}},$$

takže $0 \leqq \varrho_n \leqq 1$ pro $n \geqq 2$. Tedy pro $n \geqq 1$

$$1 - \varrho_{n+1} = 1 - \sqrt{\frac{1+\varrho_n}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{1+\varrho_n}{2}\right)}{1 + \sqrt{\frac{1+\varrho_n}{2}}} = \frac{\frac{1-\varrho_n}{2}}{1 + \varrho_{n+1}} \leqq \frac{1-\varrho_n}{2}.$$

Odtud indukcí vychází, že pro $n \geqq 1$ jest

$$1 - \varrho_n \leqq \frac{4}{2^n},$$

z čehož plyne

$$\lim_{n \to \infty} \varrho_n = 1. \tag{17}$$

15. Zvolme pevně libovolné kladné číslo π; určitá volba bude provedena ve **23.** Označme $\mathfrak{A}_\pi$ množství čísel tvaru $\frac{2\pi\nu}{2^n}$; buď $\mathfrak{A}_\pi^1$ $(\mathfrak{A}_\pi^2)$ množství čísel x z $\mathfrak{A}_\pi$, pro než $0 < x < \pi$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$. Množství $\mathfrak{A}_\pi$ je husté v $\mathfrak{R}$.

16. Položme $E\left(\frac{2\pi\nu}{2^n}\right) = r_n^\nu$. Tím je komplexní funkce $E(x)$ definována jednoznačně v $\mathfrak{A}_\pi$ a splňuje zde funkční rovnice

$$|E(x)| = 1, \tag{18}$$
$$E(x + 2k\pi) = E(x) \text{ pro celá } k, \tag{19}$$
$$E(x + y) = E(x) \,.\, E(y). \tag{20}$$

Položme $C(x) = \text{Real}\, E(x)$, $S(x) = \text{Im}\, E(x)$. Podle (18), (19), (20) platí v $\mathfrak{A}_\pi$

$$[C(x)]^2 + [S(x)]^2 = 1, \tag{18'}$$
$$C(x + 2k\pi) = C(x),\ S(x + 2k\pi) = S(x) \text{ pro celá } k, \tag{19'}$$
$$C(x + y) = C(x)\, C(y) - S(x)\, S(y), \tag{20'}$$
$$S(x + y) = S(x)\, C(y) + C(x)\, S(y). \tag{20''}$$

Zřejmě $E(0) = 1$, $E(\frac{1}{2}\pi) = i$, $E(\pi) = -1$, takže

$$C(0) = 1,\ C(\tfrac{1}{2}\pi) = 0,\ C(\pi) = -1. \tag{21}$$
$$S(0) = S(\pi) = 0,\ S(\tfrac{1}{2}\pi) = 1. \tag{22}$$

Ježto $E(0) = 1$, podle (20) jest $E(-x) = \frac{1}{E(x)}$, takže podle (18) jest v $\mathfrak{A}_\pi$

$$C(-x) = C(x),\ S(-x) = -S(x). \tag{23}$$

17. Pro $x = \frac{2\pi\nu}{2^n}$; $0 \leqq \nu \leqq 2^{n-1}$ jest $S(x) \geqq 0$; při tom $S(x) = 0$ pouze pro $\nu = 0$ a $\nu = 2^{n-1}$. To je zřejmé pro $n = 2$. Buď tedy $m \geqq 2$; nechť učiněný výrok je správný pro $n = m$; mám odvoditi, že je správný i pro $n = m + 1$. Nechť tedy $x = \frac{2\pi\nu}{2^{m+1}}$, $0 < \nu < 2^m$; mám dokázati, že $\text{Im}\, E(x) > 0$. Pro sudé ν je to zřejmé; nechť tedy $\nu = 2\lambda + 1$, $0 \leqq \lambda < 2^{m-1}$. Podle (20) jest

$$E(x) = E\left(\frac{2\pi(2\lambda + 1)}{2^{m+1}}\right) = E\left(\frac{2\pi\lambda}{2^m}\right) . E\left(\frac{2\pi}{2^{m+1}}\right). \tag{24}$$

Podle (16) existuje $t_m > 0$ takové, že

$$E\left(\frac{2\pi}{2^{m+1}}\right) = t_m\left[1 + E\left(\frac{2\pi}{2^m}\right)\right];$$

tedy podle (20) a (24)

$$E(x) = t_m\left[E\left(\frac{2\pi\lambda}{2^m}\right) + E\left(\frac{2\pi(\lambda + 1)}{2^m}\right)\right].$$

Ježto $0 \leqq \lambda < 2^{m-1}$, $m \geqq 2$, jest

$$\text{Im}\, E\left(\frac{2\pi\lambda}{2^m}\right) \geqq 0,\ \text{Im}\, E\left(\frac{2\pi(\lambda + 1)}{2^m}\right) \geqq 0,$$

při čemž aspoň jednou platí vztah $>$. Ježto $t_m > 0$, jest tedy vskutku $\operatorname{Im} E(x) > 0$. Dokázali jsme, že $S(x) > 0$ v $\mathfrak{A}_\pi^1$.

18. Funkce $C(x)$ klesá v $\mathfrak{A}_\pi^1$. Důkaz. Buďte x, y dvě čísla z $\mathfrak{A}_\pi^1$; $x < y$. Pak také čísla $\frac{x+y}{2}$, $\frac{y-x}{2}$ náležejí do $\mathfrak{A}_\pi^1$, takže podle **17.** $S\left(\frac{x+y}{2}\right) > 0$, $S\left(\frac{y-x}{2}\right) > 0$. Avšak ze (20') a (23) plyne

$$C(y) - C(x) = -2S\left(\frac{x+y}{2}\right) S\left(\frac{y-x}{2}\right),$$

takže $C(x) > C(y)$, j. b. d. Podle (21) vidíme nyní, že $C(x) > 0$ v $\mathfrak{A}_\pi^2$.

19. Položme $a_\nu = -S\left(\frac{2\pi\nu}{2^n}\right) = -\operatorname{Im} r_n^\nu$. Pak jest

$$a_{\nu+1} - 2a_\nu + a_{\nu-1} = -\operatorname{Im}(r_n^{\nu+1} - 2r_n^\nu + r_n^{\nu-1}).$$

Avšak
$$r_n^{\nu+1} - 2r_n^\nu + r_n^{\nu-1} = r_n^\nu\left(r_{n+1} - \frac{1}{r_{n+1}}\right)^2.$$

Dále jest $r_n = \varrho_n + i\sigma_n$, $|r_n| = 1$, tedy $\frac{1}{r_n} = \varrho_n - i\sigma_n$, takže $r_n - \frac{1}{r_n} = 2i\sigma_n$, takže

$$r_n^{\nu+1} - 2r_n^\nu + r_n^{\nu-1} = -4\sigma_{n+1}^2 . E\left(\frac{2\pi\nu}{2^n}\right),$$

tedy
$$a_{\nu+1} - 2a_\nu + a_{\nu-1} = 4S^2\left(\frac{2\pi}{2^{n+1}}\right) S\left(\frac{2\pi\nu}{2^n}\right).$$

Když $1 \leqq \nu \leqq 2^{n-1} - 1$, je tedy $a_{\nu+1} - 2a_\nu + a_{\nu-1} > 0$ podle **17.** takže podle **4.** vidíme, že pro $1 \leqq k \leqq 2^{n-1} - 1$ jest

$$\frac{S\left(\frac{2\pi k}{2^n}\right)}{k} > \frac{S\left(\frac{2\pi(k+1)}{2^n}\right)}{k+1}.$$

Tím je zjištěno, že funkce $\frac{S(x)}{x}$ klesá v $\mathfrak{A}_\pi^1$.

20. Pro $0 \leqq \nu \leqq 2^{n-2} - 1$ položme $a_\nu = \dfrac{S\left(\frac{2\pi\nu}{2^n}\right)}{C\left(\frac{2\pi\nu}{2^n}\right)}$, což je dovoleno, neboť jmenovatel je kladný podle **18.** Jest

$$a_\nu - a_{\nu-1} = \frac{\operatorname{Im}\left[E\left(\frac{2\pi\nu}{2^n}\right) . E\left(-\frac{2\pi(\nu-1)}{2^n}\right)\right]}{C\left(\frac{2\pi\nu}{2^n}\right) C\left(\frac{2\pi(\nu-1)}{2^n}\right)}.$$

Čitatel vpravo je podle (20) roven $S\left(\frac{2\pi}{2^n}\right)$. Tedy pro $1 \leqq \nu \leqq 2^{n-2}-2$ jest

$$a_{\nu+1} - 2a_\nu + a_{\nu-1} = \frac{S\left(\frac{2\pi}{2^n}\right)\left[C\left(\frac{2\pi(\nu-1)}{2^n}\right) - C\left(\frac{2\pi(\nu+1)}{2^n}\right)\right]}{C\left(\frac{2\pi(\nu+1)}{2^n}\right) C\left(\frac{2\pi\nu}{2^n}\right) C\left(\frac{2\pi(\nu-1)}{2^n}\right)}.$$

Napravo je kladné číslo; vskutku prvý činitel v čitateli je kladný podle **17.** a ostatní výrazy jsou kladné podle **18.** Tedy podle **4.** jest

$$\frac{S\left(\frac{2\pi(k+1)}{2^n}\right)}{(k+1)\, C\left(\frac{2\pi(k+1)}{2^n}\right)} > \frac{S\left(\frac{2\pi k}{2^n}\right)}{k\, C\left(\frac{2\pi k}{2^n}\right)}$$

pro $1 \leqq k \leqq 2^{n-2}-2$. Tím je zjištěno, že funkce $\frac{S(x)}{x\,C(x)}$ stoupá v $\mathfrak{A}^2_\pi$.

21. Podle (17) jest $\lim\limits_{n\to\infty} C\left(\frac{2\pi}{2^n}\right) = 1$. Podle (23_1) a **18.** je tedy $\lim\limits_{x\to 0} C(x) = 1$, kde při tvoření limity x jest omezeno na $\mathfrak{A}$. Podle (18') je v témž smyslu $\lim\limits_{x\to 0} S(x) = 0$. Ježto podle (18') jest v $\mathfrak{A}$ $|C(x)|$, $|S(x)| \leqq 1$, vychází z funkčních rovnic (20') a (20''), že $C(x)$ a $S(x)$ jsou stejnoměrně spojité v $\mathfrak{A}_\pi$.

22. Lze tedy jedním a jen jedním způsobem rozšířiti definici funkcí $C(x)$ a $S(x)$ na celý obor $\mathfrak{R}$ tak, že rozšířené funkce jsou spojité v $\mathfrak{R}$. Vzhledem ke spojitosti funkční rovnice odvozené v **16.** platí v celém $\mathfrak{R}$. Rovněž ze spojitosti vychází podle **17.** a **18.**, že $S(x) > 0$ v intervalu $< 0+, \pi - >$, že $C(x) > 0$ v $< 0+, \frac{1}{2}\pi - >$; dále podle **19.** a **20.**, že funkce $\frac{S(x)}{x}$ klesá v $< 0+, \pi - >$ a že $\frac{S(x)}{x\,C(x)}$ stoupá v $< 0+, \frac{1}{2}\pi - >$.

23. Podíl funkcí $\frac{S(x)}{x}$ a $\frac{S(x)}{x\,C(x)}$ jest $C(x) \to 1$ pro $x \to 0$. Z monotonnosti obou funkcí vychází, že obě mají pro $(x) \to 0+$ stejnou limitu λ. Podle (23_2) jest $\lambda = \lim\limits_{x\to 0} \frac{S(x)}{x}$. Ježto pro $0 < x < \pi$ jest $S(x) > 0$, jest $\lambda > 0$. Jest

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{S(x)}{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{S\left(\frac{2\pi}{2^n}\right)}{\frac{2\pi}{2^n}} = \frac{1}{2\pi} \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n}{2^n}.$$

Limita vpravo je tedy kladná a mohu zvoliti

$$\pi = \tfrac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n}{2^n}.$$

Pak klademe $S(x) = \sin x$, $C(x) = \cos x$. Je tedy $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Odtud a z funkčních rovnic (20') a (20'') vychází, že funkce $\sin x$ ($\cos x$) má derivaci $\cos x$ ($-\sin x$).

*

Sur les fonctions x^s, e^x, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur déduit les propriétés fondamentales de ces fonctions par une méthode nouvelle.