Arnošt Dittrich

Vyjádření základních vzorců sférické astronomie soujemnými lineárně lomenými transformacemi

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 57 (1928), No. 3-4, 226--235

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121378

Vyjádření základních vzorců sférické astronomie soujemnými lineárně lomenými transformacemi.

Napsal dr. *Arnošt Dittrich.*

Astronomie sférická jest z nejstarších partií aplikované matematiky. Zdálo by se, že po dvou tisíciletém vývoji věru již není co brousit na ni. Ale již zavedení nových pomůcek, jako počítací stroj, zatlačí po příp. nejen nějaký vzorec „pohodlný k logaritmování", ale třeba hned celý styl, celý sloh dokazovací do pozadí. Podobně působí získání nových poznatků teoretických. Staří astronomové opírali se o sférickou trigonometrii. Nevzdáváme se její pomoci. Ale rádi si ji vyvodíme otočením Descartesova kříže.[1])

Dedukce základních transformačních vzorců (4), (7) sférické astronomie jest velmi průhledná. Ale proč si máme všímati rotace celého prostoru, když nás zajímá jen klenba nebeská, plocha kulová. Proč počítati ve třech souřadnicích, kde se zajímáme jen o dvě? — Zejména, když ty dvě lze stáhnouti v jediné soujemné číslo. Dnes každý, jenž matematiku studoval, zná základy teorie soujemných funkcí. Proč by se neměla použíti k odvození základních vzorců sférické astronomie.

Označení bodu na sféře soujemným číslem. Provede se stejně jako v teorii soujemných funkcí. Na kouli zvolí se pól, s něhož se body její (hvězdy) stereografickou projekcí přenesou do rovníkové roviny. Do té položíme pravoúhlý kříž, jehož počátek padne do středu sféry. Pomocí něho, obvyklým způsobem označíme průmět hvězdy do rovníkové roviny soujemným číslem.

Soujemná souřadnice z, horizontová. Pól stane se zenitem, rovina k němu náležející jest horizont. Osa X míří k jihu, osa Y k západu. Pak jest arcus soujemného čísla z roveň azimutu a. Absolutní obnos jeho plyne z podobnosti trojúhelníků OPz k oP^*. Protože poloměr sféry $OP = 1$, jest poměr odvěsen (viz obr. 1)

$$|z| = \frac{\cos h}{1 - \sin h}.$$

[1]) Viz **Láska** *„Úvod do kosmické fysiky"*, **§ 14. Str. 66. 1926. — Svoboda „Astronomie sférická". Litografie z 1924.**

Tuto funkci výšky h, označíme H. Průmět hvězdy se zenitu do roviny horizontu označen tedy soujemným. číslem

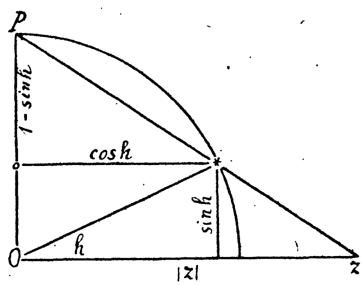
$$z = \frac{\cos h}{1 - \sin h} e^{ia}$$

kratčeji

$$z = He^{ia}.$$

Absolutní obnos H závisí jen na h, na výšce, arcus přímo rovná se azimutu a. Poznamenejme pro další některé vlastnosti funkce H:

$$\frac{H}{\cos h} = \frac{H^2 + 1}{2} = \frac{H^2 - 1}{2 \sin h} = \frac{1}{1 - \sin h}. \tag{1}$$



Obr. 1.

Souvislost pravoúhlých souřadnic s číslem z. Všimněme si pravoúhlých souřadnic definovaných relacemi

$$\begin{aligned} \xi &= \cos h \cos a \\ \eta &= \cos h \sin a \\ \zeta &= \sin h. \end{aligned}$$

Rozvedeme-li exponentielu, jest

$$z = \frac{\cos h \cos a + i \cos h \sin a}{1 - \sin h}$$

tak, že

$$z = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}.$$

Ekvatoreální souřadnice Z k úhlu hodinovému. Hvězda promítá se ze severního pólu do rovníku nebeského. Osa X míří k průseku rovníku nebeského s poledníkem na jižním nebi. Osa Y jde bodem západním. Kříž ten vznikne, otočíme-li kříž horizontový kol osy Y o úhel $90 - \varphi$, kde φ jest výška pólu. Pro analogii s předchozím případem, třeba jen zaměniti azimut hodinovým úhlem t, a výšku deklinací δ. Jest pak

$$Z = \Delta e^{it}; \quad \Delta = \frac{\cos \delta}{1 - \sin \delta}. \tag{2}$$

Absolutní obnos Δ závisí jen na deklinaci, arcus rovná se úhlu hodinovému.

Ekvatoreální souřadnice $\bar{Z}$ *k rektascensi.* Nyní se osa X proloží bodem jarním. Osa Y je k ní kolmá, ale v opačném smyslu než dříve. Na místě úhlu hodinového užívá se rektascense α. Proto jest

$$\bar{Z} = \Delta e^{i\alpha}.$$

Nyní jest arcus roveň rektascensi, ale v opačném směru čítané než úhel hodinový.

Ekliptikální soujemná souřadnice ζ. Osa X jest tatáž jako dříve, osa Y vznikne z předchozí, když tato se o úhel ε, sklon ekliptiky k rovníku, otočí kol osy X tak, aby zapadla do ekliptiky. Do té se hvězdy s jejího severního pólu promítají obdobně jako prve do rovníku. Pro tuto analogii nastoupí na místo rektascense délka λ, místo deklinace šířka β. Proto jest

$$\zeta = B e^{i\lambda}; \quad B = \frac{\cos\beta}{1 - \sin\beta}.$$

Absolutní obnos B závisí jen na β, arcus rovná se λ.

Transformace vížící horizontovou souřadnici z a ekvatoreální Z, k úhlu hodinovému náležející. Stereografická projekce zobrazí kouli isogonálně na rovník, po případě na obzor. Následkem toho jest i souvislost roviny z s rovinou Z isogonální. Hodnoty z a Z náležející téže hvězdě jsou tedy spoutány soujemnou funkcí. Funkce ta jest velice jednoduchá. Zní

$$Z = \frac{a + bz}{c + dz}.$$

Stereografická projekce promítá totiž kruh na kouli v kruh na rovině. Opíše-li bod z v horizontu kruh, opíše kruh hvězda na sféře i průmět její Z v rovině rovníkové. Přísluší tedy kruhu roviny z zase kruh roviny Z. Následkem toho lze souvislost obou rovin vyjádřiti lineárně lomeným výrazem.

Abychom numerické počítání koeficientů a, b, c, d přikrátili, všimněme si, že rovník protne horizont v bodě východním a západním. Hvězda stojící v bodě východním neb západním promítá se do téhož bodu ze zenitu i pólu. Body „$+i$" jakož „$-i$" jsou samodružné. Samodružné body dostaneme ale ze základní relace kladouce $Z = z$, čímž vznikne rovnice

$$dz^2 + z(c - b) - a = 0.$$

Kořeny její jsou samodružnými body. Má-li tato rovnice míti kořeny $\pm i$, jest rovnocenná s relací

$$z^2 + 1 = 0,$$

což žádá, aby

$$c = b, \quad d = -a,$$

tak, že základní relace zní

$$Z = \frac{a + bz}{b - az}.$$

Transformace závisí tedy pouze na jediném parametru $a : b$. Vyčíslíme jej pomocí severního pólu. Ježto se s něho do rovníku promítá, má sám $Z = \infty$. Příslušné z nalezne se z azimutu severního pólu, jenž činí 180° a jeho výšky φ. Přísluší tedy

$$Z = \infty, \quad z = -\Phi, \quad \text{kde } \Phi = \frac{\cos\varphi}{1 - \sin\varphi}.$$

Jmenovatel našeho lineárně lomeného výrazu

$$Z = \frac{1 + \frac{b}{a} z}{\frac{b}{a} - z}$$

zmizí, když

$$z = + b : a.$$

Je tedy

$$-\Phi = + b : a,$$

tak, že hledaná transformace zní

$$Z = \frac{\Phi z - 1}{z + \Phi}; \quad \Phi = \frac{\cos\varphi}{1 - \sin\varphi}. \tag{3}$$

Zkouška: Z stane se nulou pro jižní pól. Ten má azimut 0°, výšky $-\varphi$, takže jeho z

$$z = \frac{\cos\varphi}{1 + \sin\varphi}.$$

Hodnota z příslušná podle základní relace $Z = 0$ jest však ona, pro níž $z = 1 : \Phi$. Reciproká hodnota z Φ

$$\frac{1 - \sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\cos\varphi}{1 + \sin\varphi},$$

což lze převésti v

$$1 - \sin^2\varphi = \cos^2\varphi,$$

známou identitu trigonometrickou.

Inverse základního vzorce. Vzorec (3) vypočítává z daných souřadnic horizontových souřadnice ekvatoreální δ a t. Jsou-li naopak tyto dány a má se určiti azimut a výška hvězdy, třeba základní vzorec podle z řešiti. Dostaneme

$$z = \frac{-\Phi Z - 1}{Z - \Phi}.$$

Výměna úkolů mezi z a Z způsobí obrácení znaménka u Φ. Víc nic.

Odvození obvyklých transformačních vzorců sférické astronomie. Dosadíme do základního vzorce

$$z = He^{ia},\quad Z = \Delta e^{it},$$

čím dostaneme

$$\Delta e^{it} = \frac{\Phi H e^{ia} - 1}{He^{ia} + \Phi}.$$

Nahoře i dole násobíme soujemně sdruženou hodnotou jmenovatele

$$He^{-ia} + \Phi,$$

čím dostaneme

$$\Delta e^{it} = \frac{\Phi H^2 - \Phi + \Phi^2 He^{ia} - He^{-ia}}{\Phi^2 + 2\Phi H \cos a + H^2}.$$

Přepišme na

$$\Delta e^{it} = \frac{\Phi (H^2 - 1) + H(\Phi^2 e^{ia} - e^{-ia})}{(\Phi^2 + 1) + 2\Phi H \cos a + (H^2 - 1)}.$$

Pomocí vlastností funkce H z (1) plyne

$$\Delta e^{it} = \frac{2\Phi \sin h + \cos h (\Phi^2 e^{ia} - e^{-ia})}{(\Phi^2 + 1)(1 - \sin h) + 2\Phi \cos h \cos a + 2 \sin h}.$$

Oddělíme-li reálné a imaginární, jest

$$\Delta \cos t = \frac{2\Phi \sin h + \cos h \cos a (\Phi^2 - 1)}{(\Phi^2 + 1)(1 - \sin h) + 2\Phi \cos h \cos a + 2 \sin h}$$

$$\Delta \sin t = \frac{\cos h \sin a (\Phi^2 + 1)}{(\Phi^2 + 1)(1 - \sin h) + 2\Phi \cos h \cos a + 2 \sin h}.$$

Píšeme-li relace (1) ve Φ a φ místo H a h, lze zjednodušiti poslední relace na

$$\frac{\cos\delta \cos t}{1 - \sin\delta} = \frac{2 \cos\varphi \sin h + 2 \cos h \cos a \sin\varphi}{2 - 2 \sin h + 2 \cos\varphi \cos h \cos a + 2 \sin h (1 - \sin\varphi)}$$

$$\frac{\cos\delta \sin t}{1 - \sin\delta} = \frac{2 \cos h \sin a}{2 + 2 \cos\varphi \cos h \cos a - 2 \sin h \sin\varphi}.$$

Současně eliminovali jsme Δ pomocí (2). Krátíme dvěma a nahradíme zlomky třemi rovnicemi, jež obsahují neurčitého součinitele X. Obdržíme

$$\cos\delta \cos t = X (\sin\varphi \cos h \cos a + \cos\varphi \sin h)$$
$$\cos\delta \sin t = X (\cos h \sin a)$$
$$1 - \sin\delta = X (\cos\varphi \cos h \cos a - \sin\varphi \sin h) + X.$$

Umocníme relace na druhou a sečteme. Dostaneme krátivše dvěma

$$1 - \sin\delta = X^2 (1 + \cos\varphi \cos h \cos a - \sin\varphi \sin h).$$

Protože podle třetí relace

$$1 - \sin\delta = X\,(1 + \cos\varphi\cos h\cos a - \sin\varphi\sin h)$$

a protože $X \neq 0$, plyne divisí, že

$$X = 1$$

tak, že

$$\begin{aligned} \cos\delta\sin t &= \cos h\sin a \\ \cos\delta\cos t &= \cos\varphi\sin h + \sin\varphi\cos h\cos a \\ \sin\delta &= \sin\varphi\sin h - \cos\varphi\cos h\cos a. \end{aligned} \tag{4}$$

Řešení těchto rovnic dostaneme z inversního teorému: Φ nahradí $-\Phi$. Zamění se t s a, δ s h, φ s hodnotou $180 - \varphi$. Píše se tedy místo $\cos\varphi$ hodnota $-\cos\varphi$, kdežto $\sin\varphi$ zůstane. Pak plyne

$$\begin{aligned} \cos h\sin a &= \cos\delta\sin t \\ \cos h\sin a &= -\cos\varphi\sin\delta + \sin\varphi\cos\delta\cos t \\ \sin h &= \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t, \end{aligned} \tag{5}$$

což jsou obvyklé vzorce k stanovení horizontových souřadnic z δ a t.

Numerické počítání. Vyžaduje tabulky funkce

$$H = \frac{\cos h}{1 - \sin h}$$

a pomůcek k rychlému přecházení od souřadnic polárních k Descartesovým a naopak. Čitatel a jmenovatel transformační relace vypočte se v pravoúhlých souřadnicích. Pak se transformují v polární, takže

$$Z = \frac{r e^{i\chi}}{\varrho e^{i\psi}};$$

pak jest

$$\Delta = r : \varrho\; t = \chi - \psi.$$

Deklinaci lze vzíti z relace

$$\sin\delta = \frac{\Delta^2 - 1}{\Delta^2 + 1}.$$

Převod ekliptikální souřadnice ζ v ekvatoreální $\overline{Z}$. Místo φ nastoupí $90 - \varepsilon$, místo z nastoupí $\overline{Z}$, místo Z nastoupí ζ. Protože nyní osa X jde samodružnými body, totiž jarním a podzimním, jsou tyto dány čísly $+1$ a -1. Aby rovnice

$$dz^2 + z(c - b) - a = 0$$

měla kořeny $+1$, -1, musí se

$$\begin{aligned} c &= b, \\ d &= a. \end{aligned}$$

Transformační vzorec v nynějších proměnných zní tedy pro nahoře zmíněnou analogii

$$\zeta = \frac{a + b\bar{Z}}{b + a\bar{Z}}.$$

Pólu ekliptiky přísluší $\zeta = \infty$. Jmenovatel zmizí pro $\bar{Z} = -b : a$. Nalezněme ekvatoreální souřadnici $\bar{Z}$ pro pól přímo. Deklinace jeho je $90 - \varepsilon$. Proto je její absolutní hodnota

$$|\bar{Z}| = E(90 - \varepsilon) = \bar{E}(\varepsilon) = \bar{E}.$$

Ježto průmět severního pólu ekliptiky padne na zápornou část osy Y, jest

$$\bar{Z} = -i\bar{E}.$$

Jest tedy $b : a = i\bar{E}$ tak, že transformační vzorec hledaný zní

$$\zeta = \frac{1 + i\bar{E}\bar{Z}}{i\bar{E} + \bar{Z}}. \qquad (6)$$

Inversí dostaneme

$$\bar{Z} = \frac{1 - i\bar{E}\zeta}{\zeta - i\bar{E}}.$$

Odvození obvyklých vzorců sférické astronomie. Dělme základní vzorec (6) v čítateli i jmenovateli číslem i; dělme též napravo i nalevo stejným číslem. Dostaneme

$$\frac{\zeta}{i} = \frac{\frac{1}{i^2} + \bar{E}\frac{\bar{Z}}{i}}{\bar{E} + \frac{\bar{Z}}{i}}.$$

Protože

$$i = e^{90i}$$

lze na základě relací

$$\bar{Z} = \Delta e^{i\alpha}; \quad \zeta = Be^{i\lambda}.$$

psáti:

$$Be^{i(\lambda - 90)} = \frac{-1 + \bar{E}\Delta e^{i(\alpha - 90)}}{\bar{E} + \Delta e^{i(\alpha - 90)}}.$$

Rovnice taková zůstane správnou, i když v ní místo $+i$ píšeme $-i$. Následkem toho jest

$$Be^{i(90 - \lambda)} = \frac{\bar{E}\Delta e^{i(90 - \alpha)} - 1}{\Delta e^{i(90 - \alpha)} + \bar{E}}.$$

Vzorec ten porovnáme s relací

$$\Delta e^{it} = \frac{\Phi H e^{ia} - 1}{He^{ia} + \Phi},$$

jež vedla k trigonometrickým vzorcům transformačním (4) a (5). Vidíme, že si asi vzájemně odpovídají veličiny

$$\begin{array}{llll} \delta, \ t; & \varphi; & h, & a \\ \beta, 90-\lambda; & 90-\varepsilon; & \delta, & 90-\alpha. \end{array}$$

Lze tedy pouhou záměnou písmen odvoditi hledané vzorce, píšeme-li na př. v trigonometrických relacích (4) a (5) místo cos t důsledně sin λ, místo sin t důsledně cos λ, atd. Obdržíme

$$\begin{aligned} \cos\beta\cos\lambda &= \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\beta\sin\lambda &= \sin\varepsilon\sin\delta + \cos\varepsilon\cos\delta\sin\alpha \\ \sin\beta &= \cos\varepsilon\sin\delta - \sin\varepsilon\cos\delta\sin\alpha. \end{aligned} \tag{7}$$

Stejně nalezne se inverse těchto relací:

$$\begin{aligned} \cos\delta\cos\alpha &= \cos\beta\cos\lambda \\ \cos\delta\sin\alpha &= -\sin\varepsilon\sin\beta + \cos\varepsilon\cos\beta\sin\lambda \\ \sin\delta &= \cos\varepsilon\sin\beta + \sin\varepsilon\cos\beta\sin\lambda. \end{aligned} \tag{8}$$

Souřadnice bodu jarního. Libovolná hvězda má souřadnice ekvatoreální

$$Z = \Delta e^{it}; \ \bar{Z} = \Delta e^{i\alpha},$$

pak jest

$$\frac{Z\bar{Z}}{\Delta^2} = e^{i(t+\alpha)} = e^{i\Theta}. \tag{9}$$

Ale

$$\Theta = t + \alpha$$

jest hvězdný čas, hodinový úhel bodu jarního. Též pro slunce platí součinové vyjádření (9), souřadnice bodu jarního $e^{i\Theta}$.

Užitečnost našich vzorců prokážeme řešením starého problému, jenž má značný význam pro studium začátků astronomie:

Počítání hvězdných fází.[2]) Heliakické fáze, akronychický východ a kosmický západ hvězd vedou k úkolu stanoviti pro danou hvězdu (α^*, δ^*) polohu s (nepatrnou) výškou h^*[3]) současnou s určitou výškou slunce h, zvanou „arcus visionis".

Nejprve z h^* pomocí relace

$$\sin h^* = \sin\varphi\sin\delta^* + \cos\varphi\cos\delta^*\cos t^*$$

určíme hodinový úhel hvězdy t^*. Pak vypočteme

$$t^* + \alpha^* = \Theta,$$

hodinový úhel bodu jarního.

---

[2]) Nové poznatky o „arcus visionis" přináší K. Schoch „Planetentafeln. XXXIV. 1927".

[3]) 3°—12° nad obzorem podle Schocha XXXIII. Na téže straně dole udává 3°—11°.

Pro slunce platí relace

$$\Delta e^{it} = Z = \frac{\Phi z - 1}{z + \Phi}; \; z = He^{ia}.$$

$$\Theta = t + \alpha$$

$$\Delta e^{i\alpha} = \bar{Z} = \frac{1 - i\bar{E}\zeta}{\zeta - i\bar{E}}; \; \zeta = e^{i\lambda}.$$

Protože

$$\Delta = \left| \frac{\Phi H e^{ia} - 1}{He^{ia} + \Phi} \right| = \left| \frac{1 - i\bar{E}e^{i\lambda}}{e^{i\lambda} - i\bar{E}} \right|,$$

existují dvě rovnice

$$\delta = F(\varphi, h, a); \quad \delta = G(\varepsilon, \lambda).$$

Relace ty si vyhledáme mezi vzorci (4) a (8). Zní

$$\sin \delta = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos a$$
$$\sin \delta = \sin \varepsilon \sin \lambda$$

z čehož rovnice

$$\sin \varepsilon \sin \lambda = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos a, \tag{10}$$

jež váže veličiny λ, a pomocí ε, φ, h.

Druhou takovou vazbu dostaneme z myšlenky, že

$$\Delta^2 e^{i\Theta} = \frac{\Phi H e^{ia} - 1}{He^{ia} + \Phi} \cdot \frac{1 - i\bar{E}e^{i\lambda}}{e^{i\lambda} - i\bar{E}}.$$

kde

$$\Theta = t + \alpha.$$

Relace tato zajisťuje, že existuje vyjádření veličiny Θ proměnnými φ, ε; a, λ, h.

Vyvineme

$$\cos t = \cos \Theta \cos \alpha + \sin \Theta \sin \alpha$$
$$\sin t = \sin \Theta \cos \alpha - \cos \Theta \sin \alpha.$$

Násobíme obě poslední relace $\cos \delta$, eliminujeme vlevo pomocí (4) proměnné t, δ vpravo α, δ. Dostaneme

$$\cos \varphi \sin h + \sin \varphi \cos h \cos a = \cos \Theta \cos \lambda + \sin \Theta \sin \lambda \cos \varepsilon$$
$$\cos h \sin a = \sin \Theta \cos \lambda - \cos \Theta \sin \lambda \cos \varepsilon. \tag{11}$$

V prvé rovnici eliminujeme $\cos a$ pomocí (10), čím plyne

$$\frac{\sin h}{\cos \varphi} = \cos \Theta \cos \lambda + \sin \lambda (\sin \Theta \cos \varepsilon + \sin \varepsilon \operatorname{tg} \varphi).$$

Z relace té dostane se hledaná délka slunce λ, jež určuje datum hvězdné fáze. Problém není tedy těžší než řešiti kvadratickou rovnici. Mezi kořeny rozhodne se pomocí azimutu slunce z rovnice (10) a znalosti jeho polohy na východě či západě.

Expression des formules fondamentales de l'astronomie sphérique par des transformations complexes linéaires fractionnaires.

(Extrait de l'article précédent.)

On fait correspondre, à l'aide de la projection stéréographique de la sphère céleste, à toute position d'une étoile un nombre complexe. Les transformations usuelles des coordonnées astronomiques sont exprimées, en ce cas, par des expressions linéaires fractionnaires, c. à d., fort simplement. La partie réelle et la partie imaginaire de ces formules fournissent les relations usuelles de l'astronomie sphérique. On trouve aussi une expression complexe simple pour le temps sidéral. On peut, par conséquent, résoudre d'une manière générale, sans des difficultés notables, le problème des phases sidérales; l'auteur le fait à titre d'exemple.