Josef Zahradníček
O některých křivkách odvozených z kuželoseček. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 49 (1920), No. 2-3, 174--181

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121364

O některých křivkách odvozených z kuželoseček.

Dr. Josef Zahradníček.

Přímka
$$y = Ax + k$$
je tečnou ellipsy, kruhu, hyperboly, má-li s křivkou
$$b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2$$
dva splývající body společny. Řešením obou rovnic dostáváme
$$x = \frac{\mp a^2 Ak \pm \sqrt{D}}{b^2 \pm a^2A^2},$$
kde jest
$$D = a^2b^2 (b^2 \pm a^2A^2 \mp k^2).$$
Podmínka pro tečnu
$$D = 0$$
dává
$$k^2 = a^2A^2 \pm b^2 \text{ [1.)]},$$
bod dotyku má pak souřadnice
$$x_1 = -\frac{a^2A}{\sqrt{a^2A^2 \pm b^2}}, \quad y_1 = \pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2A^2 \pm b^2}}.$$
Rovnice normály u jmenovaných kuželoseček jest
$$y - y_1 = -\frac{1}{A}(x - x_1);$$
dosaďme sem předešlé hodnoty za x_1, y_1 a obdržíme
$$x = -\frac{1}{A}x - \frac{e^2}{\sqrt{a^2A^2 \pm b^2}}.$$
Pro normálu paraboly vyplývá obdobně
$$y = -\frac{1}{A}x + \frac{p(1 + 2A^2)}{2A^3};$$
souřadnice bodu dotyku vyjádřené směrnicí tečny A jsou zde:
$$x_1 = \frac{p}{2A^2}, \quad y_1 = \frac{p}{A}.$$

[1.)] Rovnice tečny jest
$$y = Ax + \sqrt{a^2A^2 \pm b^2}$$
pro ellipsu, kruh, hyperbolu a
$$y = Ax + \frac{p}{2A}$$
pro parabolu. (Viz Č. Č. M. r. XLVII. str. 204 a n.).

Vycházející z těchto rovnic pro normály kuželoseček, podáme řešení některých úloh sem spadajících.

Jest určiti geom. místo pat kolmic spuštěných s počátku souřadnic na normály kuželoseček.[2.]

Pro ellipsu a hyperbolu jest rovnice normály

$$y = -\frac{1}{A}x - \frac{e^2}{\sqrt{a^2A^2 \pm b^2}}$$

a rovnice kolmice s počátku na normálu spuštěné

$$y = Ax.$$

Vyloučením proměnného A obdržíme rovnici geom. místa ve tvaru

$$(a^2y^2 \pm b^2x^2)(x^2 + y^2)^2 = e^4x^2y^2.$$

Protiúpatnice ellipsy a hyperboly pro pól v počátku souřadnic je křivka 6. stupně, která má v počátku čtyřnásobný bod a patří ke třídě křivek zvaných dle tvaru „scarabaeus-brouk.“ (Srovnej G. Loria, Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven, Lipsko 1902, str. 231 a 232)

V případě paraboly jsou příslušné rovnice

$$y = -\frac{1}{A}x + \frac{p(1 + 2A^2)}{2A^3},$$

$$y = Ax;$$

rovnice geom. místa jest stupně 4. a má tvar

$$(x^2 + y^2)(2y^2 - px) = pxy^2.$$

Jest určiti protiúpatnice kuželoseček pro pól v ohnisku.

V případě ellipsy a hyperboly máme rovnice

$$y = -\frac{1}{A}x - \frac{e^2}{\sqrt{a^2A^2 \pm b^2}},$$

$$y = A(x - e).$$

Vyloučením A dostáváme

$$(x^2 + y^2 - ex)^2 [a^2y^2 \pm b^2(x - e)^2] = e^4y^2(x - e)^2.$$

Rovnice tato je splněna pro

$$x = e, \quad y = o,$$

[2.]) Geom. místo pat kolmic spuštěných s daného bodu na tečny křivky nazývá se úpatnicí, geom. místo pat kolmic spuštěných s daného bodu na normály křivky jest protiúpatnice dané křivky vzhledem k danému pólu, anebo úpatnice evoluty dané křivky — evoluta jest obálka normál.

dá se tedy psáti ve tvaru

$$[(x-e)^2+y^2] \cdot M = o.$$

Mnohočlen stupně 4. M možno určiti dělením, anebo rozkladem takto: Píšeme horní rovnici ve tvaru:

$$[(x-e)^2+y^2+ex-e^2]\,(x^2+y^2-ex)\,[a^2y^2 \pm b^2(x-e)^2] - e^4y^2(x-e)^2 = o,$$

anebo dále rozvedeno

$$[(x-e)^2+y^2]\;(x^2+y^2)\;[a^2y^2 \pm b^2(x-e)^2] +$$
$$[(ex-e^2((x^2+y^2)-ex\,(x^2+y^2-ex)]\,[a^2y^2 \pm b^2(x-e)^2] - e^4y^2(x-e)^2 = o.$$

Výraz na posledních dvou řádcích zjednodušuje se na

$$-a^2e^2y^2[(x-e)^2+y^2].$$

Je tedy hledaná protiúpatnice

$$[(x-e)^2+y^2]\left\{[a^2y^2 \pm b^2(x-e)^2]\,(x^2+y^2) - a^2e^2y^2\right\} = o.$$

Odpovídá jí bod $F(e, o)$ a křivka stupně 4*ho* s dvojným bodem v počátku.

V případě paraboly jsou příslušné rovnice

$$y = -\frac{1}{A}x + \frac{p(1+2A^2)}{2A^3},$$
$$y = A(x-p/2).$$

První z nich pišme ve tvaru

$$2A^2(Ay+x-p) = p$$

a dosaďme sem z druhé

$$A = \frac{y}{x-p/2};$$

snadno obdržíme

$$[y^2+(x-p/2)^2]\,[y^2-p/2\,(x-p/2)] = o.$$

Geom. místo skládá se ze dvou kuželoseček, prvá je kruh s poloměrem nullovým — bod $F(p/2, o)$, anebo pár imaginárních přímek

$$y = \pm i\,(x-p/2),$$

druhá je parabola.

Jest určiti geom. místo průsečíků vzájemně kolmých normál paraboly.

Pišme normálu paraboly ve tvaru

$$2A^2(Ay+x-p) = p; \tag{1.}$$

normála kolmá má pak rovnici

$$\frac{2}{A^2}\left(-\frac{1}{A}y+x-p\right)=p. \qquad (2.)$$

Vzájemným násobením obou rovnic vyplývá

$$4\left[(x-p)^2-y^2+y(x-p)\left(A-\frac{1}{A}\right)\right]=p^2.$$

Odtud určíme

$$A-\frac{1}{A}=\frac{p^2/4+y^2-(x-p)^2}{y(x-p)}. \qquad (3.)$$

Z rovnice (1.) a (2.) vychází sečtením:

$$y\left(A-\frac{1}{A}\right)+2(x-p)=\frac{p}{2}\left(A^2+\frac{1}{A^2}\right).$$

Vylučme odtud pomocí rovnice (3.) proměnnou A a obdržíme rovnici geom. místa

$$\frac{p^2/4+y^2-(x-p)^2}{y(x-p)}\left[\frac{p^2/4+y^2-(x-p)^2}{y(x-p)}\cdot\frac{p}{2}-y\right]$$
$$+3p-2x=o.$$

Výraz v hranaté závorce upravme na tvar

$$\frac{3p-2x}{y(x-p)}\left(\frac{y^2}{2}-\frac{p^2}{8}+\frac{px}{4}\right),$$

jest pak předešlá rovnice

$$(3p-2p)\left\{[y^2-(x-p)^2+p^2/4]\left(\frac{y^2}{2}-\frac{p^2}{8}+\frac{px}{4}\right)+\right.$$
$$\left.+y^2(x-p)^2\right\}=o. \qquad (4.)$$

Výraz v klikaté závorce je splněn hodnotami

$$x=p/2,\ y=o$$

a z toho dá se předpokládati jeden činitel

$$(x-p/2)^2+y^2;$$

druhý kvadratický činitel možno nalézti dělením. Ostatně můžeme postupovati také obecně, výraz v klikaté závorce psáti ve tvaru

$$(ay^2+bpx+cx^2+dp^2)(\alpha y^2+\beta px+\gamma x^2)$$

a srovnáním určiti koeficienty.

Rovnice (4.) nabývá pak tvaru:

$$(3p - 2x)\,[(x - p/2)^2 + y^2]\,[y^2 - p/2\,(x - 3p/2)] = o.$$

Geom. místo — rovnice stupně 5ho — rozpadá se na přímku, bod — ohnisko a parabolu

$$y^2 = p/2\,(x - 3p/2).$$

K tomuto výsledku možno také dospěti cestou následující: Buďtež A_1, A_2, A_3 kořeny rovnice pro normálu paraboly

$$2yA^3 + 2\,(x - p)\,A^2 - p = o.$$

Rovnice tato jest identickou s rovnicí

$$(A - A_1)\,(A - A_2)\,(A - A_3) = o.$$

Srovnáme-li v obou rovnicích stálé členy, obdržíme

$$A_1\,A_2\,A_3 = p/2y.$$

Pro normály vzájemně kolmé platí

$$A_1\,A_2 = -1,$$

pak jest

$$A_3 = -p/2y.$$

Dosadíce hodnotu tuto do rovnice normály, obdržíme rovnici geom. místa

$$y^2 - \frac{px}{2} + \frac{3p^2}{4} = o.$$

Uvádíme ještě jedno řešení téže úlohy: Body dotyku kolmých tečen M_1, M_2, jejich průsečík T a průsečík kolmých normál N tvoří obdélník $M_1\,T\,M_2\,N$, jehož tři vrcholy jsou známy jest určiti geom. místo vrcholu N.

Souřadnice známých vrcholů jsou:

$$M_1\left(\frac{p}{2A^2}, \frac{p}{A}\right), \quad M_2\left(\frac{pA^2}{2}, -pA\right)$$

$$T\left(-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\left[-A + \frac{1}{A}\right]\right)^{3.)}$$

3.) Je známo, že vzájemně kolmé tečny paraboly protínají se na přímce řídící, je tedy $x = -p/2$ a pořadnice y bodu T plyne z rovnice tečny

$$y = Ax + \frac{p}{2A}.$$

Souřadnice bodu N určí se pomocí souřadnic středobodu S úhlopříčky $M_1 M_2$ a souřadnic vrcholu T. Obdržíme pak pro bod N

$$x = \frac{p}{2}\left(A^2 + \frac{1}{A^2}\right) + \frac{p}{2}, \; y = \frac{p}{2}\left(\frac{1}{A} - A\right).$$

Zdvojmocníce druhou rovnici vyloučíme z obou rovnic proměnnou A a obdržíme dřívější výsledek

$$y^2 = \frac{p}{2}\left(x - \frac{3p}{2}\right).$$

Podobnými způsoby možno řešiti touž úlohu i pro případ ellipsy a hyperboly, jenže řešení jest poněkud složitější; normála paraboly jest vzhledem k A vyjádřena rovnicí stupně 3ho, pro ellipsu a hyperbolu rovnicí stupně 4ho — libovolným bodem roviny procházející 3, po případě 4 normály jmenovaných kuželoseček.

Obraťme se nyní k řešení následující úlohy:

Určete geom. místo dvou vrcholů obdélníka, jehož jedna strana je průvodič paraboly a normála úhlopříčkou.

Jeden vrchol proměnlivého obdélníka — bod paraboly — jest

$$M\left(\frac{p}{2A^2}, \frac{p}{A}\right);$$

příslušný průvodič má směrnici

$$\frac{2A}{1 - A^2}.$$

Strana procházející ohniskem $F\,(p/2, o)$ a kolmá na průvodič má rovnici

$$y = \frac{A^2 - 1}{2A}\left(x - \frac{p}{2}\right).$$

Její průsek s úhlopříčkou — normálou

$$y = -\frac{1}{A}x + \frac{p\,(1 + 2A^2)}{2A^3}$$

má souřadnice

$$x = \frac{p\,(A^2 + 2)}{2A^2}, \; y = \frac{p\,(A^2 - 1)}{2A^3}.$$

Z obou těchto rovnic vylučme proměnnou směrnici

$$A = \pm \sqrt{\frac{2p}{2x - p}}$$

a održíme rovnici geom. místa pro třetí vrchol N

$$32py^2 - (3p - 2x)^2 (2p - x) = o.$$

Souřadnice posledního vrcholu G protilehlého ohnisku určíme ze známých souřadnic ostatních tří bodů na základě věty: součet souřadnic dvou protilehlých bodů obdélníka je roven součtu souřadnic druhých dvou protilehlých bodů —

$$x_1 + x_3 = x_2 + x_4, \qquad y_1 + y_3 = y_2 + y_4$$

týž střed obou úhlopříček. Obdržíme pak pro bod G:

$$x = \frac{3p}{2A^2}, \quad y = \frac{p(3A^2 - 1)}{2A^3}.$$

Vyloučením A dostáváme rovnici geom. místa

$$54py^2 = x(9p - 2x)^2.$$

Je to křivka stupně 3ho, jež prochází bodem $x = y = o$ a dvakráte bodem $y = o$, $x = 9p/2$; zove se „trisectrix Catalanova" (1832 odvozena). V uvedeném již spise G. Loria, Spezielle alg. und transcendente ebene Kurven str. 87. odvozena jest jako obálka přímek MG, jichž úseky na osách souřadných jsou

$$\frac{r}{\cos\varphi}, \ \frac{r}{\sin\varphi},$$

při čemž jest

$$r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}.$$

Počátek souřadnic je tu přeložen do ohniska paraboly. Rovnice tam vyvozená vyplývá z naší transformací — translací —

$$\eta = y, \ \xi = x + p/2.$$

Geom. místo vrcholu N jest patrně také trisectrix jen s jinými konstantami.

Řešení předešlých příkladů podána byla v jednodušší formě z toho důvodu, že místo dvou proměnných x, y vyjádřeny byly souřadnice libovolného bodu kuželosečky jedinou proměnnou A a to ve tvaru

$$x = -\frac{a^2 A}{\sqrt{a^2 A^2 \pm b^2}}, \quad y = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 A^2 \pm b^2}}$$

pro bod ellipsy, kruhu, hyperboly a

$$x = \frac{p}{2A^2}, \quad y = \frac{p}{A}$$

pro bod paraboly. Řešení některých úloh stane se také přehledným, píšeme-li souřadnice bodu kuželosečky ve tvaru

$$x = a \cos \varphi, \qquad y = b \sin \varphi$$

pro ellipsu, kruh ($a = b$) a

$$x = a \sec \varphi, \qquad y = b \operatorname{tg} \varphi$$

pro hyperbolu. Přechod od svrchních hodnot k těmto dán jest vztahem

$$A = -\frac{b \cos \varphi}{a \sin \varphi}$$

pro ellipsu a

$$A = \frac{b}{a \sin \varphi}$$

pro hyperbolu. Uvedeme několik příkladů. (Dokončení.)

Několik poznámek o čtyrstěnu.

Napsal **Jan Schuster**, prof. reálky v Pardubicích.

(Dokončení.)

VIII. Podobně jako v trojúhelníku možná ze stran počítati příčky, známe-li dělicí poměry na stranách jimi stanovených bodů vzhledem k vrcholům, lze u čtyřstěnu určiti nejen příčky, ale i obsahy stěn vzniklých řezy vedenými hranami.

Obraťme se nejprve k těmto posledním. Hranou a' vedený řez Δ_a nechť stanoví na protější hraně a úseky x, y. přilehlé ke stěně Δ_1 resp. Δ_4. Platí: $x + y = a$. Jím se rozdělí stěny Δ_2 a Δ_3 v poměru $x : y$. Značme stěnové úhly $\sphericalangle\left(\Delta_2 \frac{x}{x+y}, \Delta_{a'}\right) = \omega_2$, $\sphericalangle\left(\Delta_3 \frac{x}{x+y}, \Delta_{a'}\right) = \omega_3$ se strany stěny Δ_1, pak úhly se strany Δ_4 budou výplňky jejich. Applikace první cosinové věty na oba