Cornelius Plch
Trojí spůsob elementárného odvození vzorce pro obvod ellipsy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 12 (1883), No. 5, 265--276

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121347

Trojí způsob elementárného odvození vzorce pro obvod ellipsy.

Studujícím napsal

P. Cornelius Plch, T. J. v Bohusudově (Mariaschein).

Předběžná poznámka. Při tomto elementárném odvození nejde nám hlavně o krátkost, ačkoliv i této šetřiti chceme, nýbrž spíše o jasnost i přesnost. Komu však je největší krátkost nade vše milejší, tohož odesýláme na př. k jadrnému spisku: „*Einleitung in die analytische Geometrie* von Dr. *J. Frischauf*“ 1. Aufl. pag. 55. Art. 41. Frischaufovu způsobu odvození podobá se poněkud níže položený způsob druhý, liší se však od něho podstatně, jak z porovnání obou vysvítá.

Prvý způsob.

Budiž střed ellipsy počátkem pravoúhlých souřadnic, velká osa $2a$ osou úseček čili osou x-ovou, menší osa $2b$ osou pořadnic čili osou y-ovou, i značiž E obvod ellipsy, jejž ustanoviti chceme. Jak známo, je středová rovnice ellipsy tato:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \tag{1}$$

kdežto *veličiny* a i b jsou *stálé.*

Opsavše ze středu ellipsy velkou poloosou a jakožto poloměrem kružnici $2a\pi$, rozdělme první kvadrant $\frac{a\pi}{2}$ této kružnice na $n = 2, 3, 4, 5 \ldots.$ sobě rovných oblouků, t. j. na tolik oblouků, na kolik chceme; pak přísluší ke kruhovému oblouku $\frac{a\pi}{2n} = \frac{a \,.\, 3{\cdot}14159\ldots}{2n}$ středový úhel $\frac{\pi}{2n} = \frac{180^0}{2n}$ i tudíž k oblouku $\frac{ma\pi}{2n}$, kdežto $m = 0, 1, 2, 3 \ldots (n-1)$, středový úhel $\frac{m\pi}{2n}$, jejž pevná osa y-ová s pohyblivým poloměrem a opsaného kruhu svírá.

Spustíme-li potom s každého dělícího bodu kruhového kvadrantu $\frac{a\pi}{2}$ na osu x-ovou kolmici (pořadnici), rozdělí se těmito kruhovými pořadnicemi soulehlý kvadrant ellipsového obvodu

$$\frac{E}{4} = E_1 + E_2 + \ldots + E_n \tag{2}$$

taktéž na n (sobě nerovných) oblouků.

Spojivše posléze poloměrem a střed ellipsy s hořejším koncem oné kruhové pořadnice, jež k úsečce x_m náleží, dostaneme z trojúhelníku takto vzniklého

$$x_m = a \sin \frac{m\pi}{2n},$$

z čehož plyne

$$x_{m+1} = a \sin \frac{(m+1)\pi}{2n},$$

Vložíme-li tyto hodnoty úseček do rovnice ellipsy (1), obdržíme příslušné hodnoty pořadnic

$$y_m = b \cos \frac{m\pi}{2n},$$

$$y_{m+1} = b \cos \frac{(m+1)\pi}{2n}.$$

Značí-li e_{m+1} *tětivu ellipsy*, omezenou body (x_m, y_m) i (x_{m+1}, y_{m+1}), tož bude *tětiva*

$$e_{m+1} = \sqrt{(x_{m+1} - x_m)^2 + (y_{m+1} - y_m)^2} =$$

$$= \sqrt{a^2\left[2 \cos \frac{(2m+1)\pi}{4n} \sin \frac{\pi}{4n}\right]^2 + b^2\left[-2 \sin \frac{(2m+1)\pi}{4n} \sin \frac{\pi}{4n}\right]^2},$$

odkudž jde

$$e_{m+1} = 2a \sin \frac{\pi}{4n} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \frac{(2m+1)\pi}{4n}}, \tag{3}$$

kdež

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \tag{4}$$

znamená druhou mocninu *číselné výstřednosti.*

Rozvinutím na pravé straně rovnice (3) dle binomické poučky obdržíme

$$e_{m+1} = 2a \sin \frac{\pi}{4n} \left\{1 - \lim \left[\frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin^2 \frac{(2m+1)\pi}{4n} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1.1}{2.4} \varepsilon^2 \sin^4 \frac{(2m+1)\pi}{4n} + \frac{1.3.1}{2.4.6} \varepsilon^6 \sin^6 \frac{(2m+1)\pi}{4n} + \ldots\right]\right\}. \tag{5}$$

Zavedeme-li do rovnice (5) za mocniny sinusův úhlu $\frac{(2m+1)\pi}{4n}$ příslušné hodnoty cosinusův ze známých rovnic

$$\sin^2\frac{(2m+1)\pi}{4n}=\frac{1}{2}\left(1-\cos\,[2m+1]\,.\,\frac{2\pi}{2n}\right),$$

$$\sin^4\frac{(2m+2)\pi}{4n}=\frac{1\,.\,1}{2\,.\,4}\left(3-4\cos\,[2m+1]\,.\frac{\pi}{2n}+\cos\,[2m+1]\,.\frac{2\pi}{2n}\right),$$

. . . .

dostaneme

$$e_{m+1}=2a\sin\frac{\pi}{4n}\left\{1-\lim\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2\left(1-\cos\,[2m+1]\,.\,\frac{\pi}{2n}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{1\,.\,1}{2\,.\,4}\right)^2\varepsilon^4\left(3-4\cos\,[2m+1]\,.\frac{\pi}{2n}+\cos\,[2m+1]\,.\frac{2\pi}{2n}\right)+\ldots\right)\right\};$$

kladouce pak místo čísla m po sobě hodnoty $0, 1, 2, 3\ldots(n-1)$, obdržíme

$$e_1=2a\sin\frac{\pi}{4n}\left\{1-\lim\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2\left(1-\cos 1\,.\,\frac{\pi}{2n}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{1\,.\,1}{2\,.\,4}\right)^2\varepsilon^4\left(3-4\cos 1\,.\,\frac{\pi}{2n}+\cos 1\,.\,\frac{2\pi}{2n}\right)+\ldots\right]\right\},$$

$$e_2=2a\sin\frac{\pi}{4n}\left\{1-\lim\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2\left(1-\cos 3\,.\,\frac{\pi}{2n}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{1\,.\,1}{2\,.\,4}\right)^2\varepsilon^4\left(3-4\cos 3\,.\,\frac{\pi}{2n}+\cos 3\,.\,\frac{2\pi}{2n}\right)+\ldots\right]\right\},$$

. . . .

$$e_n=2a\sin\frac{\pi}{4n}\left\{1-\lim\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2\left(1-\cos\,[2n-1]\,.\,\frac{\pi}{2n}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{1\,.\,1}{2\,.\,4}\right)^2\varepsilon^4\left(3-4\cos\,[2n-1]\,.\frac{\pi}{2n}+\cos\,[2n-1]\,.\frac{2\pi}{2n}\right)+\ldots\right]\right\},$$

kteréžto rovnice snadno se dají sčítati, sečteme-li cosinusy každého sloupce dle známého vzorce:

$$\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\ldots\cos(2n-1)\,\alpha=\frac{\sin 2n\alpha}{2\sin\alpha}.$$

A tu nabudeme

$$\frac{\sin 2n\,\frac{\pi}{2n}}{2\sin\frac{\pi}{2n}}=\frac{\sin 2n\,\frac{2\pi}{2n}}{2\sin\frac{2\pi}{2n}}=\frac{\sin 2n\,\frac{3\pi}{2n}}{2\sin\frac{3\pi}{2n}}=\frac{\sin 2n\,\frac{4\pi}{2n}}{2\sin\frac{4\pi}{2n}}=\ldots=0,$$

z čehož patrno, že součet všech cosinusův každého sloupce rovná se nulle.

Položíme-li, přihlížejíce k rovnici (2), zkrátka

$$e_1 + e_2 + \ldots e_n = \frac{e}{4},$$

dále pak

$$\lim \left[\frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \varepsilon^4 + \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \varepsilon^6 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{7}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2 \varepsilon^8 + \ldots\right] = \mathrm{R}, \qquad (6)$$

obdržíme

$$\frac{e}{4} = 2a\,\{1 - \mathrm{R}\}\, n \sin\frac{\pi}{4n},$$

odkudž plyne rovnice

$$e = 8a\,\{1 - \mathrm{R}\}\, n \sin\frac{\pi}{4n} \quad \text{aneb} \quad \frac{e}{n \sin\frac{\pi}{4n}} = 8a\,\{1 - \mathrm{R}\},$$

kdežto e značí *obvod do ellipsy vepsaného mnohoúhelníku* o $4n = 8, 12, 16, 20 \ldots$ stranách.

Poněvadž v této rovnici proměnné veličiny e, $n \sin\frac{\pi}{4n}$ při rostoucím n i stálých veličinách a, R ustavičně se přibližují ku svým stálým mezím E, $\frac{\pi}{4}$, obdržíme odtud *dle základní věty*) hromadného* (pro každou hodnotu čísla $n = 2, 3, 4, 5 \ldots$ dovoleného) *přechodu k mezním hodnotám hledaný vzorec pro obvod ellipsy*

$$\mathrm{E} = 2a\pi\,\{1 - \mathrm{R}\},$$

anebo vzhledem k rovnici (6)

$$\mathrm{E} = 2a\pi \left\{1 - \lim \left[\frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \varepsilon^4 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \varepsilon^6 + \frac{1}{7}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2 \varepsilon^8 + \ldots\right]\right\} \qquad (7)$$

*) Tato *základní věta* zní: *Stálá hodnota* (zde: $8a\,\{1 - \mathrm{R}\}$) *poměru dvou proměnných* $\left(e,\ n \sin\frac{\pi}{4n}\right)$ *rovná se obdobnému poměru jejich stálých mezí* $\left(\mathrm{E},\ \frac{\pi}{4}\right)$. Důkaz viz v „Čas. pro pěst. math. a fys. X. pg. 252. §. 5."

Poznamenání. Jakož *stálé číslo* $\frac{\pi}{4}$ je *stálá mezní hodnota*, k níž se proměnné číslo $n \sin \frac{\pi}{4n}$ při rostoucím n ustavičně přibližuje, rovněž tak jest *proměnné (částečné) číslo* $\frac{\pi}{4n}$ *proměnná (částečná) mezní hodnota* proměnného čísla $\sin \frac{\pi}{4n}$; z čehož patrno jest, že *mezní hodnoty mohou býti buď stálé buď proměnné. Každá část mezní hodnoty*, netoliko proměnné nobrž i stálé, *jest proměnnou mezní hodnotou.*

Spůsob druhý.

Přihlížejíce k rovnicím již známým ze spůsobu prvého, totiž:

$$x_{m+1} = a \sin\left(\frac{m\pi}{2n} + \frac{\pi}{2n}\right) = x_m \cos\frac{\pi}{2n} + a \sin\frac{\pi}{2n} \cos\frac{m\pi}{2n},$$

$$y_{m+1} = b \cos\left(\frac{m\pi}{2n} + \frac{\pi}{2n}\right) = y_m \cos\frac{\pi}{2n} - b \sin\frac{\pi}{2n} \sin\frac{m\pi}{2n},$$

položme pro každou hodnotu čísla $n = 2, 3, 4, 5 \ldots$

$$\xi_{m+1} = x_m + \frac{a\pi}{2n} \cos\frac{m\pi}{2n},$$

$$\eta_{m+1} = y_m - \frac{b\pi}{2n} \sin\frac{m\pi}{2n}.$$

Poněvadž jest vzhledem k rovnici ellipsy (1)

$$b^2\xi^2_{m+1} + a^2\eta^2_{m+1} = a^2b^2\left[1 + \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2\right],$$

leží bod (ξ_{m+1}, η_{m+1}) *mimo ellipsu;* i jelikož jest

$$b^2x_m\xi_{m+1} + a^2y_m\eta_{m+1} = a^2b^2,$$

bude přímka, omezená body (x_m, y_m) i (ξ_{m+1}, η_{m+1}), *tangentou*)* čili *tečnou* dotýkající se obvodu ellipsy E v bodě (x_m, y_m).

Označíme-li tuto tangentu ellipsovou písmenem e'_{m+1}, obdržíme obdobným postupem jako při spůsobu prvém

---

*) Někteří mathematikové (na př. Dr. *J. Frischauf*) nazvali tuto *tangentu tětivou* buď z nedopatření aneb spíše proto, že při rostoucím n rozdíl obou přímek ustavičně se přibližuje k nulle a bod (ξ_{m+1}, η_{m+1}) k ellipsovému bodu (x_{m+1}, y_{m+1}), poněvadž jest $\lim \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 = 0$.

$$e'_{m+1} = \frac{a\pi}{2n}\left\{1 - \lim\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 \left(1 - \cos m\,.\frac{\pi}{n}\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{1\,.\,1}{2\,.\,4}\right)^2 \varepsilon^4 \left(3 - 4\cos m\,.\frac{\pi}{n} + \cos m\,.\frac{2\pi}{n}\right) + \ldots\right]\right\}.$$

Dosazením hodnot 0, 1, 2, 3 ... $(n-1)$ místo m, nabudeme n rovnic, jichžto součet snadno se určí, sečteme-li cosinusy každého sloupce dle známého vzorce

$$\cos 0\,\alpha + [\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots\ldots + \cos(n-1)\alpha] =$$
$$= 1 + \frac{\sin(n-1)\frac{\alpha}{2}\cos n\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

z něhož postupným dosazením hodnot $\frac{\pi}{n}$, $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{3\pi}{n}$, $\frac{4\pi}{n}$, $\frac{5\pi}{n}$, $\frac{6\pi}{n}$.... úhlu α dostaneme následující součty sloupcových cosinusův: 1, 0, 1, 0, 1, 0 ...

Položivše zkrátka

$$e'_1 + e'_2 + \ldots + e'_n = \frac{e'}{4},$$
$$\frac{a\pi}{2n}\lim\left[\frac{1}{4}\varepsilon^2 + \frac{1}{16}\varepsilon^4 + \ldots\right] = \frac{r}{4},$$

obdržíme při hořejším (6) významu písmeny R

$$\frac{e'}{4} = \frac{a\pi}{2}\{1 - \mathrm{R}\} + \frac{r}{4},$$

z čehož plyne rovnice

$$e' - r = 2a\pi\{1 - \mathrm{R}\} \quad \text{anebo} \quad \frac{e'}{\pi\{1-\mathrm{R}\} + \frac{r}{2a}} = 2a,$$

v nížto proměnné veličiny e', r anebo e', $\left[\left[\pi\{1-\mathrm{R}\} + \frac{r}{2a}\right]\right]$ při rostoucím n i stálých veličinách a, R ustavičně se přibližují ku svým stálým mezím E, 0 anebo E, $\pi\{1-\mathrm{R}\}$. Pročež obdržíme *dle odvozené* *) *anebo dle základní věty hromadného*

---

*) Tato *odvozená věta* zní: *Stálá hodnota* (zde: $2a\pi\{1-\mathrm{R}\}$) *rozdílu dvou proměnných* (e', r) *rovná se obdobnému rozdílu jejich stálých mezí* (E, 0).

(pro každou hodnotu čísla $n = 2, 3, 4, 5 \ldots$ dovoleného) *přechodu k mezním hodnotám hledaný vzorec pro obvod ellipsy*

$$E = 2a\pi \{1 - R\}.$$

Spůsob třetí.

Podrží-li každé písmě svůj předešlý význam, tož pro každou hodnotu čísla n nezbytně platí tyto nerovnice:

$$e < E < e',$$

$$4n \sin \frac{\pi}{4n} \{1 - R\} < \pi \{1 - R\} + \frac{r}{2a};$$

avšak platí též nezbytně pro každou hodnotu n rovnice

$$\frac{e}{4n \sin \frac{\pi}{4n} \{1 - R\}} = \frac{e'}{\pi \{1 - R\} + \frac{r}{2a}} = 2a;$$

pročež bude tím spíše (a fortiori)

$$\frac{e}{4n \sin \frac{\pi}{4n} \{1 - R\}} = \frac{E}{\pi \{1 - R\}} = \frac{e'}{\pi \{1 - R\} + \frac{r}{2a}} = 2a,$$

odkudž jde

$$E = 2a\pi \{1 - R\}.$$

Zvláštní případy a výsledky.

Považujeme-li v rovnici (4) *velkou poloosu a* za *veličinu stálou*, ale *menší poloosu b za veličinu libovolně nebo neodvisle proměnnou*, tož bude

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 0 \text{ pro } b = a,$$

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 \text{ pro } b = 0.$$

Vložením těchto hodnot do rovnice (7) obdržíme

$$\text{pro } b = a \text{ rovnici } E = 2a\pi, \tag{8}$$

v kterémžto případě *ellipsa jest kruhem;*

$$\text{pro } b = 0 \text{ rovnici } E = 2a\pi \left\{1 - \lim \left[\frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 + \ldots\right]\right\}, \tag{9}$$

v kterémžto případě *ellipsa jest přímkou*, jejíž obvod se rovná dvojnásobné délce $2a$. Tudíž máme

$$\text{pro } b = 0 \text{ rovnici } E = 2a \,.\, 2 = 4a. \tag{10}$$

Dosazením této hodnoty do rovnice (9) dostaneme

$$4a = 2a\pi \left\{1 - \lim \left[\frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 + \ldots\right]\right\}, \quad (11)$$

odkudž plynou následující dva pozoruhodné *výsledky*:

$$\pi = \frac{2}{1 - \lim \left[\frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 + \ldots\right]}, \quad (12)$$

$$1 - \frac{2}{\pi} = \lim \left[\frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 + \ldots\right]. \quad (13)$$

Dodatek. Položíme-li *při stálé poloose a* menší poloosu

$$b = \frac{a}{n} \quad \text{čili} \quad \varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{1}{n^2},$$

budou v rovnici (7) veličiny E, ε^2, ε^4, ε^6, $\varepsilon^8 \ldots$ na proměnném čísle n tak závislé, že při rostoucím n ustavičně se přibližují k veličinám $4a$, 1, 1, 1, 1 ... jakožto k svým stálým mezím. Pročež dostaneme rovnici (11) z rovnice (7) i *hromadným* (pro každou hodnotu čísla $n = 2, 3, 4, 5 \ldots$ dovoleným) *přechodem k mezním hodnotám*, aniž by třeba bylo rovnici (7) převésti dříve na *základní tvar stálého poměru dvou proměnných*, na čísle n závislých, *veličin*:

$$2a\pi = \frac{E}{1 - \lim \left[\frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{4.6}\right)^2 \varepsilon^4 + \ldots\right]} =$$

$$= \frac{4a}{1 - \lim \left[\frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 + \ldots\right]},$$

aneb

$$2a\pi = \frac{E}{\varrho} = \frac{4a}{1 - \lim \left[\frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 + \ldots\right]},$$

kdežto proměnný rozdíl

$$\varrho = 1 - \lim \left[\frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{4.6}\right)^2 \varepsilon^4 + \ldots\right] = f(\varepsilon)$$

jest funkce proměnné výstřednosti ε.

Připomenutí. Poněvadž *hromadný přechod k mezním hodnotám proměnných*, na čísle n závislých *veličin, jichžto součet*, *rozdíl, součin, poměr ... je stálý pro každou hodnotu čísla n* rovněž tak *je dovolen* *), jakož jest na př. dovoleno položiti

$$\frac{42}{48}=\frac{35}{40}=\frac{28}{32}=\frac{21}{24}=\frac{14}{16}=\frac{7}{8},$$

anebo

$$\frac{42}{48}=\frac{7}{8},\ \frac{35}{40}=\frac{7}{8},\ \frac{28}{32}=\frac{7}{8},\ \frac{21}{34}=\frac{7}{8},\ \frac{14}{16}=\frac{7}{8},$$

netřeba tedy při hromadném přechodu k mezním hodnotám *klásti*

$$n=\infty,\quad \frac{a}{\infty}=0,\quad \frac{a}{0}=\infty,\quad \infty . 0=a,$$

kteréžto (v jistém smyslu správné) *relace k nemalým vedou sporům i neshodám*, značí-li zde komu „$=$“ *rovnítko* „∞“ *číslo skutečně nekonečné (numerus actu infinitus)* t. j. číslo, nad něž většího není ani býti nemůže, „0“ pak *opravdivou nullu* čili nicku, rovnající se rozdílu dvou stejných čísel.

Srovnej Dr. *Gutberlet:* Das Unendliche metaphysisch und mathematisch betrachtet, Mainz 1878; Dr. *A. Mayr:* Vollständige Theorie des Differenzial-Calculs, Regensburg 1854; *Gauss:* Briefwechsel 2. Bd. pag. 271; Historisch-politische Blätter Bd. 86 pag. 291, kde Dr. *J. Pohle* nazývá *nekonečně velké „den Zankapfel der Alten“ a nekonečně malé „das Sphinxräthsel der Analysis“*; pak Dr. *Jos. Pospíšil: Filosofie podle zásad sv. Tomáše Akvinského*, část I. pag. 429, v Brně 1883.

Přibližné hodnoty čísla $\{1-R\}$.

Poněvadž sbíhavost nekonečné řady R (6) je tím zdlouhavější, čím ε^2 od 1 méně se liší, tak že pro $\varepsilon^2=1$ *součet padesáti* přesně určených *členů řady* R bez obvyklé náhrady či opravy *nepodává* ještě zcela správně *ani dvě nejvyšší desetinné*

---

*) Důkaz viz v tomto časop. X. pag. 201; 252. Podaný tam *důkaz platí všeobecně*, protože stálý součet, rozdíl, součin ... proměnných, na čísle *n* závislých veličin snadno se dá provésti na základní tvar stálého poměru proměnných.

číslice hledaného *čísla* $R = 1 - \frac{2}{\pi} = 0{\cdot}363\ 380\ 22\ldots.$ (13), proto snad mnohým studujícím vhod přijde *přibližná hodnota*

$$P = 1 - \frac{\frac{1}{4}\varepsilon^2}{1 - \left(\frac{3}{16} + \frac{1}{51 - 43\varepsilon^2}\right)\varepsilon^2} =$$

$$= 1 - \frac{(204 - 172\varepsilon^2)\,\varepsilon^2}{816 - (857 - 129\varepsilon^2)\,\varepsilon^2} \qquad (14)$$

kterážto *nejméně ve třech nejvyšších desetinných číslicích* s hledaným číslem $\{1 - R\}$ souhlasí.

Má-li kdo pro $\varepsilon^2 \leqq \frac{1}{2}$ přesně určiti *šest nejvyšších desetinných míst* čísla $|1 - R|$, tomu dobře poslouží *přibližná hodnota*

$$p = \frac{1}{8}\sqrt{64 - \left[32 + 2\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^4}{1 - k\varepsilon^2}\right]\varepsilon^2},$$

kdežto

$$k = 0{\cdot}6118 + 0{\cdot}142\varepsilon^6. \qquad (15)$$

Položíme-li koëfficient

$$\left.\begin{array}{l} k = 0{\cdot}6167 + 0{\cdot}1036\,\varepsilon^6 \\ k = 0{\cdot}6195 + 0{\cdot}0905\,\varepsilon^6 \\ k = 0{\cdot}6194 + 0{\cdot}0910\,\varepsilon^6 \\ k = 0{\cdot}6113 + 0{\cdot}1068\,\varepsilon^6 \\ k = 0{\cdot}5153 + 0{\cdot}2385\,\varepsilon^6 \end{array}\right\} \text{pro} \left\{\begin{array}{l} 0{\cdot}5 \lesseqgtr \varepsilon^2 \lesseqgtr 0{\cdot}6, \\ 0{\cdot}6 \lesseqgtr \varepsilon^2 \lesseqgtr 0{\cdot}7, \\ 0{\cdot}7 \lesseqgtr \varepsilon^2 \lesseqgtr 0{\cdot}8, \\ 0{\cdot}8 \lesseqgtr \varepsilon^2 \lesseqgtr 0{\cdot}9, \\ 0{\cdot}9 \lesseqgtr \varepsilon^2 \lesseqgtr 1, \end{array}\right.$$

obdržíme i pro $\varepsilon^2 = 0{\cdot}5$, $0{\cdot}6$, $0{\cdot}7$, $0{\cdot}8$, $0{\cdot}9$, 1 *šest desetinných číslic* hledaného čísla $|1 - R|$, totiž:

$$\left.\begin{array}{l} p = 0{\cdot}974\ 510 \\ p = 0{\cdot}947\ 949 \\ p = 0{\cdot}920\ 146 \\ p = 0{\cdot}890\ 881 \\ p = 0{\cdot}859\ 847 \end{array}\right\} \text{pro} \left\{\begin{array}{l} \varepsilon^2 = 0{\cdot}1, \\ \varepsilon^2 = 0{\cdot}2, \\ \varepsilon^2 = 0{\cdot}3, \\ \varepsilon^2 = 0{\cdot}4, \\ \varepsilon^2 = 0{\cdot}5, \end{array}\right. \quad \left.\begin{array}{l} p = 0{\cdot}826\ 605 \\ p = 0{\cdot}790\ 472 \\ p = 0{\cdot}750\ 251 \\ p = 0{\cdot}703\ 343 \\ p = 0{\cdot}636\ 620 \end{array}\right\} \text{pro} \left\{\begin{array}{l} \varepsilon^2 = 0{\cdot}6, \\ \varepsilon^2 = 0{\cdot}7, \\ \varepsilon^2 = 0{\cdot}8, \\ \varepsilon^2 = 0{\cdot}9, \\ \varepsilon^2 = 1. \end{array}\right.$$

Dr. *Oskar Schloemilch* podal v „Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis 3. Aufl. S. 288 Beisp. 12." *přibližnou hodnotu*

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2},$$

jejížto přesnosti s rostoucí výstředností ε ubývá tak, že pro $\varepsilon^2 = 1$ *jenom v jedné nejvyšší desetinné číslici* s číslem

$$|1 - R| = \frac{2}{\pi}$$

souhlasí.

Pro $\varepsilon^2 < \frac{1}{10}$ není žádného přibližného vzorce zapotřebí, protože *nekonečná řada* R (6) *v tomto případě jest velmi rychle sbíhavou.*

Toliko ku školním cvičením podáváme ještě *přibližnou hodnotu* $\mathfrak{E}$ ellipsového obvodu E, totiž:

$$\mathfrak{E} = 4a + (2\pi - 4)\frac{b^2}{a}, \tag{17}$$

odkudž plyne

$$\mathfrak{E} = 2a\pi = \mathrm{E} \text{ pro } b = a \quad (8),$$
$$\mathfrak{E} = 4a \quad = \mathrm{E} \text{ pro } b = 0 \quad (10),$$

Dr. *J. Frischauf* podal *přibližnou hodnotu*

$$\mathfrak{E}' = (a + b)\,\pi, \tag{18}$$

z čehož jde

$$\mathfrak{E}' = 2a\pi = \mathrm{E} \text{ pro } b = a,$$
$$\mathfrak{E}' = \pi a \text{ místo } \mathrm{E} = 4a \text{ pro } b = 0.$$

Závěrek. Chce-li kdo n (t. j. libovolně mnoho) členů nekonečné řady R (6) *nejenom přesně, nýbrž i rychle* určiti a k jejich součtu

$$\mathfrak{R}_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

místo neznámého doplňku

$$\mathfrak{R}_{n+1} = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots = \mathrm{R} - \mathfrak{R}_n$$

připočísti *doplněk přibližný*, nechať určí každý následující člen rekurrentní řady $\mathfrak{R}_n$, v nížto $a_1 = \frac{1}{4}\varepsilon^2$, *pomocí členu předcházejícího přesně určeného* dle vzorce

$$a_n - a_{n-1} \cdot \frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n)^2}\varepsilon^2 = a_{n-1} \cdot \frac{4(n-1)^2 - 1}{4n^2}$$

a ustanoví pak *přibližný doplněk* třeba z této jednoduché relace:

$$\mathfrak{R}'_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{1 - \frac{4(n+1)^2 - 1}{4(n+2)^2}\left[1 + \frac{2\varepsilon^2}{(2n+3)(3-2\varepsilon^2)}\right]\varepsilon^2}. \tag{19}$$

Nekonečná řada $\mathfrak{R}_{n+1}$, jejíž první (nejmenší) podíl

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{4(n+1)^2 - 1}{4(n+2)^2},$$

přibližuje se totiž při rostoucím n k sestupné posloupnosti geometrické tak rychle, že již pro $n = 30$ každý podíl této řady je větší než $\frac{15}{16}\varepsilon^2$ ale menší než $\frac{16}{16}\varepsilon^2$, kdežto pro $n = 0$ jest podíl $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{3}{16}\varepsilon^2$; z čehož vysvítá, že již pro $n = 30$ a tím spíše pro $n > 30$ *všichni podílové této řady jsou sobě bezmála rovni.*

Z relace (19) plyne pro $n = 0$ *přibližná hodnota*

$$1 - \mathfrak{R}'_1 = 1 - \frac{\frac{1}{4}\varepsilon^2}{1 - \frac{3}{16}\left[1 + \frac{2\varepsilon^2}{3(3-2\varepsilon^2)}\right]\varepsilon^2}$$

$$= 1 - \frac{(12 - 8\varepsilon^2)\,\varepsilon^2}{48 - (41 - 4\varepsilon^2)\,\varepsilon^2}, \tag{20}$$

jež pro $\varepsilon^2 \leqq \frac{1}{2}$ je správnější než hodnota (14) a tím správnější se stává, čím více ε^2 k nulle se přibližuje; obdržímeť pro $\varepsilon^2 = \frac{1}{2}$ tři, pro $\varepsilon^2 = 0{\cdot}4$ a $\varepsilon^2 = 0{\cdot}3$ čtyry, pro $\varepsilon^2 = 0{\cdot}2$ pět, pro $\varepsilon^2 = 0{\cdot}1$ šest nejvyšších císlic hledaného čísla $\{1 - \mathrm{R}\}$, konečně pro $\varepsilon^2 = 0$ přesnou hodnotu $1 - \mathfrak{R}'_1 = 1 = 1 - \mathrm{R}$.

Pro $\varepsilon^2 \leqq \frac{1}{10}$ zasluhuje přibližná hodnota (20) i před hodnotou (15) přednost.

Poznámky k řešení problému maxima a minima s vedlejšími podmínkami.

Sdílí

Matyáš Lerch.

1. Úkol stanoviti maximum aneb minimum funkce $\mathrm{V}(x, y)$ proměnných x, y podrobených podmínce $f(x, y) = 0$ dá se formulovati geometricky a to dvojím spůsobem, jak považujeme x, y za souřadnice bodu neb přímky, a sice: