Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Augustin Pánek

O mathematické a morální naději. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 6 (1877), No. 2, 69--76

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121329

O mathematické a morální naději.

Sepsal

Augustin Pánek.

Část I.

O naději mathematické čili objektivní.

§. 1.

*Součin z očekávané výhry (výhody) a pravděpodobnosti (probabilitas), že téže výhry se dostane, sluje nadějí mathematickou aneb objektivní.**)

Nazvemež s_1 sázku (mise) osoby A_1, s_2 sázku osoby A_2, a pravděpodobnost, že osoba A_1 celou sázku $s_1 + s_2 = v$ vyhraje, $p_1 = \frac{a_1}{m_1}$, a že ji osoba A_2 vyhraje, $p_2 = \frac{a_2}{m_2}$, pak jest především

$$p_1 + p_2 = \frac{a_1}{m_1} + \frac{a_2}{m_2} = 1,$$

značí-li a_1, a_2 počet případů příznivých (chance), m_1, m_2 počet všech jedině a rovně možných.

Zde platí zásada: *sázky jsou v úměře s pravděpodobnostmi, že se vyhraje*, tedy

$$s_1 : s_2 = p_1 : p_2 \,. \tag{1}$$

Z této úměry plyne

$$(s_1 + s_2) : s_1 = (p_1 + p_2) : p_1$$

aneb

$$v : s_1 = 1 : p_1 ,$$

z čehož snadno se obdrží

$$s_1 = p_1 v ,$$

a podobně

$$s_2 = p_2 v ,$$

tedy všeobecně

$$s = p v \,. \tag{2}$$

*) *Mathematickou naději* aneb též *očekávání* (sors, lucrum) lze pro mnohé případy nazvati *„průměrnou hodnotou“*.

Z vzorce (2) plyne věta: *sázka hráče s rovná se jeho naději mathematické* $N = p\,v$ *ve výhru a naopak, předpokládáme-li, že se shoduje sázka s možnou výhrou,*

$$s = N. \tag{2'}$$

Srovnáme-li sázky dvou osob, bude

$$s_1 : s_2 = p_1\,v_1 : p_2\,v_2 = \frac{a_1}{m_1}\,v : \frac{a_2}{m_2}\,v_2\,, \tag{3}$$

to jest: *sázky jsou ve srovnalosti složité s očekávanou výhrou a pravděpodobnostmi, že se vyhraje.*

Jest-li $m_1 = m_2$, pak

$$s_1 : s_2 = a_1\,v_1 : a_2\,v_2\,. \tag{3'}$$

Všeobecně obdržíme dle (3) srovnalost spojitou

$$s_1 : s_2 : \ldots : s_n = p_1\,v_1 : p_2\,v_2 : \ldots : p_n\,v_n\,, \tag{4}$$

a dle (3'),

$$s_1 : s_2 : \ldots : s_n = a_1\,a_1 : a_2\,a_2 : \ldots : a_n\,v_n\,. \tag{4'}$$

Ze (4) plyne dále

$$s_\lambda : \sum_{n=1}^{n} s_n = p_\lambda v_\lambda : \sum_{n=1}^{n} p_n\,v_n\,, \tag{5}$$

a ze (4') podobně

$$s_\lambda : \sum_{n=1}^{n} s_n = a_\lambda\,v_\lambda : \sum_{n=1}^{n} a_n\,v_n\,, \tag{5'}$$

kteroužto srovnalost si též zjednáme, zavedeme-li a místo p do vzorce (5).

Položíme-li $s_1 = s_2 = \ldots = s_n$, obdržíme z (5),

$$1 : n = p_\lambda\,v_\lambda : \sum_{n=1}^{n} p_n\,v_n, \tag{6}$$

a z (5')

$$1 : n = a_\lambda\,v_\lambda : \sum_{n=1}^{n} a_n v_n\,. \tag{6'}$$

Ze vzorce (2) následuje pak

$$v = \frac{s}{p} = \frac{m\,s}{a}\,, \tag{7}$$

to jest: *výhra rovná se poměru sázky a pravděpodobnosti, že výhra se získá.* *)

*) Tohoto pravidla se však nešetří, neboť loterie a herny nabízejí obyčejně hráčům výhru, jež nedosahuje výše poměrné k sázce; spoléhají na takové nerozumné hráče, kteří bez namáhání chtějí sbohatnouti.

Z téhož vzorce obdržíme dále

$$s : a = p : 1 = a : m, \qquad (8)$$

to jest: *sázka má se k výhře, jako příslušná příznivá pravděpodobnost k jednotce čili jistotě aneb jako počet případů příznivých ke všem možným.*

Hrají-li dvě osoby a jedna z nich vsadí před početím, druhá teprv po rozhodnutí hry, musí zaplatiti hodnotu dle vzorce (8).

Konečně z (2) jde

$$p = \frac{s}{v}, \qquad (9)$$

to jest: *příznivá pravděpodobnost, že se vyhraje, rovná se podílu ze sázky a výhry.*

Má-li osoba A naději, že pro příznivé pravděpodobnosti $p_1, p_2, \ldots, p_n$, vyhraje $v_1, v_2, \ldots, v_n$, jaké jest očekávání téže osoby?

Dle vzorce (2) jest hledaná mathematická naděje

$$N = p_1 v_1 + p_2 v_2 + \ldots + p_n v_n = \sum_{n=1}^{n} p_n v_n, \qquad (10)$$

to jest: *vsadí-li tedy osoba A, že se splní několik na sobě nezávislých výjevů, jest naděje mathematická ve výhru rovna součtu součinů z jednotlivých výher a pravděpodobnosti, že jich získá.*

Tato hodnota udává patrně i patřičnou sázku. Tento případ můžeme ze stanoviska hráče pokládati za sloučení tolika her, kolik sázek učiněno bylo, čili za jedinou hru, a tedy i sázky k jednotlivým hrám spojí se v jedinou sázku.

Mezi hodnotami $v_1, v_2, \ldots, v_n$ mohou také býti některé *negativní* a tehdáž podává výplatu hráč.

Jsou-li $\left\{\begin{matrix}\text{pravděpodobnosti}\\ \text{výhry}\end{matrix}\right\}$ pro rozličné $\left\{\begin{matrix}\text{výhry}\\ \text{pravděpodobnosti}\end{matrix}\right\}$ rovny, jest $\left\{\begin{matrix} p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p \\ v_1 = v_2 = \ldots = v_n = v \end{matrix}\right\}$, a tedy

$$\left.\begin{aligned} N &= p \sum_{n=1}^{n} v_n, && (11) \\ N &= v \sum_{n=1}^{n} p_n. && (12) \end{aligned}\right\}$$

Jsou-li pro stejné výhry rovné pravděpodobnosti, jest pak

$$N = n p v. \qquad (13)$$

Mají-li sázky hráčů vzhledem k očekávané výhře spočívati na správném základě, musí **před rozhodnutím** *hry očekávání pro všechny osoby býti rovno*, tedy

$$p_1 v_1 = p_2 v_2 = \ldots = p_n v_n, \qquad (14)$$

a protož se má

$$v_\lambda : v_\mu = p_\mu : p_\lambda ; \qquad (15)$$

jest-li $m_\lambda = m_\mu$,

$$v_\lambda : v_\mu = a_\mu : a_\lambda . \qquad (15')$$

Věta (14): $p_1 v_1 = p_2 v_2$ se nezmění, pokládáme-li jednu z dvou osob za representanta několika účastníků; v tomto případě jest

$$p_1 v_1 = (p_2 + p_3 + \cdots p_n) v_2 = v_2 \sum_{n=2}^{n} p_n . \qquad (16)$$

1. *Příklad.* Jaká jest naděje mathematická, že někdo vyhraje 144 zl., vrhne-li dvěma kostkama paš vůbec, aneb součet 5, aneb paš určitý?

Naděje mathematická vrhnouti paš vůbec jest $\frac{1}{6} . 144 = 24$, vrhnouti součet 5, jest $\frac{1}{9} . 144 = 16$ a konečně vrhnouti paš určitý $\frac{1}{36} . 144 = 4$, protož jsou naděje mathematické v poměru

$$24 : 16 : 4 = 6 : 4 : 1,$$

to jest při stejné výhře 144 zl. jsou pravděpodobnosti v úměře

$$\frac{1}{6} : \frac{1}{9} : \frac{1}{36} = \frac{6}{36} : \frac{4}{36} : \frac{1}{36}.$$

Z toho patrno, že jest kýžená výhra, vrhne-li se součet 5, čtyřikrát, vrhne-li se paš vůbec, šestkrát větší, než kýzená výhra pro vrh určitého paše.

2. *Příklad.* Dvě osoby hrají spolu kostkou obyčejnou, a jedna z nich obdrží za každý vrh s-krát tolik zlatých, kolik vržené číslo udává; jaká jest její mathematická naděje ve výhru?

Mathematická naděje tohoto hráče jest dle (11) součet součinů všech šesti rovně možných výjevů a pravděpodobnosti $p = \frac{1}{6}$, tak že

$$N = \frac{1}{6}(s + 2s + 3s + 4s + 5s + 6s) = 3\frac{1}{2} \cdot s,$$

to jest *průměrná hodnota* každého vrhu, které žádný vrh úplně nevyhovuje.

Výplata se však vyrovnává, neboť vrhne-li jedna z obou osob číslo 1, 2, 3, má ztrátu $2\frac{1}{2} \cdot s$, $1\frac{1}{2} \cdot s$, $\frac{1}{2} \cdot s$; vrhne-li ale číslo 4, 5, 9, má výhru $\frac{1}{2} \cdot s$, $1\frac{1}{2} \cdot s$, $2\frac{1}{2} \cdot s$. Pro druhou osobu platí totéž, vždy ale v opačném pořádku.*)

3. *Příklad.* V osudí se nalezá 16 lístků, z nichž 8 číslovaných od 1 do 8, ostatních 8 však prázdných. Kdosi vsadí 3 zl., a obdrží za ně tolik zlatých, jaké číslo vytáhne; jaké jest jeho očekávání?

Pravděpodobnost pro vytažení kteréhokoliv lístku jest $\frac{1}{16}$, a tedy mathematická naděje, že vyhraje

$$1,\ 2,\ 3, \ldots, 8 \text{ zl.}$$

jest

$$\frac{1}{16} \cdot 1,\ \frac{1}{16} \cdot 2,\ \frac{1}{16} \cdot 3, \ldots, \frac{1}{16} \cdot 8,$$

konečně součet $= 2\frac{1}{4}$ zl.

Hra tato byla by neshodna.

4. *Příklad.* V osudí nalezá se 13 kuliček, 8 bílých a 5 červených. Která osoba vytáhne bílou, obdrží s zl., která červenou, platí s zl.; jak velká bude sázka jednoho tahu?

Sázka jest

$$\frac{8}{13} s - \frac{5}{13} s = \frac{3}{13} s \text{ zl.}$$

Všeobecný vzorec (10) lze přeměniti, nejsou-li dány pravděpodobnosti, nýbrž počet případů, udávajících výhry. Dostaneme-li výhru $v_1, v_2, \ldots, v_n$, v případech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, a nenastane-li v případech α_k ani výhra ani ztráta, jest naděje mathematická

*) Viz dále §. 6.

$$N = \frac{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \alpha_k} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{n} \alpha_n v_n}{\alpha_k + \sum\limits_{n=1}^{n} \alpha_n}. \tag{17}$$

Příklad. Někdo má los z loterie sestávající z 500 losů, na které připadne 1 výhra 1000 zl., 4 po 500 zl. a 10 po 100 zl. Zač stojí jeden los?

Podle vzorce (17) máme

$$N = \frac{1000 + 4.500 + 10.100}{500} = 8 \text{ zl.}$$

§. 2.

Historickou důležitost má tak zvaný „*Petrohradský problem*" (Problème de Pétersbourg), který *Mikuláš Bernoulli* v dopise datovaném 9. září 1713 *Montmort-ovi* předložil a který zní:

Osoby A a B hrají spolu; osoba A vrhne vzhůru peníz se znamením *hlava* a *písmo*, a platí osobě B určitou sázku dvakrát, čtyřikrát, osmkrát, ..., 2^n-krát, když padne písmo prvním, druhým, třetím, ..., n-tým vrhem, takže obdrží vždy B při následujícím vrhu dvojnásobnou sumu předcházející. Jaká jest mathematická naděje osoby B, aneb mnoho-li musí osoba B vsaditi, přijme-li hru.*)

Úkol tento, v této formě podaný, může se nazvati neurčitým, neboť připouští tři rozličné případy s určitými významy, které nyní podáme.**)

I. Osoby A a B hrají spolu; osoba A vrhne peníz vzhůru n-krát a osoba B dostane 2, 4, 8, ..., 2^n určitých penízů, když při 1., 2., 3., ..., n-tém vrhu padne písmo. Písmo však smí se jen jednou objeviti. Jaká jest mathematická naděje osoby B?

V tomto případě se smí pouze n vrhů vykonati a proto má B případů příznivých n a v jednom z těchto může se objeviti kýžené písmo. Pravděpodobnost, že při jednom vrhu padne písmo, jest $\frac{1}{2}$, a tedy pravděpodobnost, že při jednom z oněch n případů příznivých padne, $\frac{1}{2^n}$.

*) *Montmort* „Analyse de jeux de hasard. 2. Edit. Paris, 1713. pag. 402."

**) *Mikuláš Bernoulli* nepodal sám své řešení.

Nazveme-li cenu peníze S, pak jest dle (2) §. 1. očekávání v pořadí

$$\frac{1}{2^n} \cdot 2S, \ \frac{1}{2^n} \cdot 2^2 S, \ \frac{1}{2^n} \cdot 2^3 S, \ldots, \ \frac{1}{2^n} \cdot 2^n S,$$

a tedy hledaná mathematická naděje dle (10) §. 1. součet těchto jednotlivých,

$$N = \frac{2S}{2^n} + \frac{2^2 S}{2^n} + \frac{2^3 S}{2^n} + \ldots + \frac{2^n S}{2^n}$$

aneb

$$N = \frac{1}{2^n} \cdot (2^n - 1) 2S, \qquad (1)$$

při čemž $(2^n - 1) 2S$ značí výhru.

II. Osoby A a B hrají spolu; osoba B obdrží 2, 4, 8, ..., 2^n penízů, když padne písmo při 1., 2., 3., ..., n-tém vrhu. Vůbec se tedy n vrhů vykoná a kdykoliv padne písmo, obdrží B sumu příslušných penízů. Jaká jest mathematická naděje osoby B?

Při n vrzích může se objeviti písmo n-krát, anebo $(n-1)$-krát a hlava 1, aneb $(n-2)$-krát a hlava 2-krát, a t. d., aneb posléze jednou a hlava $(n-1)$-krát.

Pravděpodobnost, že padne písmo n-krát, jest $\frac{1}{2^n}$, a výhra dle (1) rovná se $(2^n - 1) 2S$, tedy očekávání

$$N_1 = \frac{1}{2^n} \cdot (2^n - 1) 2S.$$

Padne-li písmo $(n-1)$-krát a hlava 1, pak jedna výhra schází, a pravděpodobnost pro jednotlivé případy jest opět $\frac{1}{2^n}$, tedy očekávání

$$N_2 = \binom{n-1}{1} \frac{1}{2^n} \cdot (2^n - 1) 2S.$$

Padne-li písmo $(n-2)$-krát a hlava 2-krát, pak schází dvě výhry a též zde jest příslušná pravděpodobnost $\frac{1}{2^n}$, tedy očekávání

$$N_3 = \binom{n-1}{2} \frac{1}{2^n} \cdot (2^n - 1) 2S,$$

a t. d.

Padne-li konečně jednou písmo a $(n-1)$ hlava, máme podobně

$$N_n = \binom{n-1}{n-1} \frac{1}{2^n} \cdot (2^n - 1)\, 2S.$$

Hodnota hledané mathematické naděje osoby B jest tedy

$$N = \sum_{n=1}^{n} N_n = \frac{1}{2^{n-1}} (2^n - 1) S \cdot \left[1 + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \ldots\right]$$

a poněvadž, jak známo, řada v závorkách rovná se 2^{n-1}, protož

$$N = (2^n - 1) S. \qquad (2)$$

III. Osoby A a B hrají spolu; osoba B dostane 2, 4, 8, ..., 2^n určitých peněz, když padne písmo při 1., 2., 3., ..., n-tém a *posledním* to vrhu. Hra jest ukončena, jakmile padne písmo. Jaká jest mathematická naděje osoby B a co může tedy na počátku hry vsaditi?

Zde tedy může B při n vrzích jen jednou vyhráti, a pravděpodobnost, že při určitém vrhu vyhraje, předpokládá, že v předchozích vrzích nevyhrál. Jsou tedy příslušné pravděpodobnosti pro osobu B,

$$\frac{1}{2}, \; \frac{1}{2^2}, \; \frac{1}{2^3}, \; \ldots, \; \frac{1}{2^n},$$

a výhry

$$2S, \; 2^2 S, \; 2^3 S, \; \ldots, \; 2^n S,$$

tudíž její mathematická naděje

$$N = \frac{1}{2} \cdot 2S + \frac{1}{2^2} \cdot 2^2 S + \frac{1}{2^3} \cdot 2^3 S, \ldots + \frac{1}{2^n} \cdot 2^n S = nS. \quad (3)$$

Daniel Bernoulli *) béře nekonečný počet vrhů, takéž *Laplace* **), kterýž praví, že by se žádný rozvážlivý člověk této hry nesúčastnil.

Je-li počet vrhů nekonečný, $n = \infty$, pak jest sázka osoby B nekonečná,

$$N = \infty\, S = \infty,$$

kteroužto sumu nemůže žádný vyplatiti.***)

(Pokračování.)

*) Viz „Comm. Acad. scient. imperial. petropolit. T. V. ad annos 1730 et 1731, pag. 181 seqq. specimen theoriae novae mensura sortis.“

**) Théorie analytique des probabilités. pag. 239, 3me édition.

***) Viz dále „*o morální naději*“, §. 10.