Václav Jeřábek

O křížnici a stříížnici

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 61 (1932), No. 4, 130--136

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121313

O křížnici a střížnici.

V. Jeřábek.

(Došlo v červnu 1928.)

1. V rovině π dána jest přímka X a na ní tři pevné body a, e, o. V bodech a, e postavme kolmo na X resp. přímky $R_1 \parallel H_1$. Přímkou M_1 jdoucí bodem o protněme R_1 v bodě r_1. Kružnice K_1, jejíž střed je o a poloměr $\overline{or_1} = r$, seče přímku H_1 v bodě n_1. Vedeme-li tímto bodem rovnoběžku N_1 s X protne, přímku M_1 v bodě m_1. Geom. místem tohoto bodu je křivka L_1.

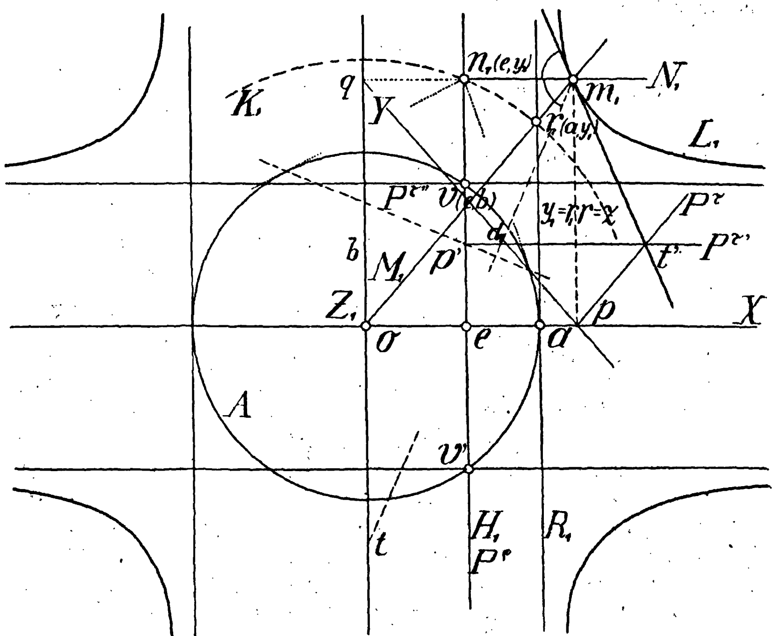
2. Rovinu π zvolme za průmětnu a pokládejme r_1 za průmět bodu r, jehož výška $\overline{r_1 r}$ nad rovinou π rovná se $\overline{ar_1} = z$. Spojnice R bodů a, r má tudíž svůj průmět v R_1. Přímkou Z ($Z_1 \equiv o$), postavenou v bodě o kolmo na π, přímkou R a průmětnou π určen je hyp. paraboloid, jehož jedna plošná přímka M je rovnoběžná se svým průmětem M_1.

Otáčením přímky R kolem osy Z vznikne rotační hyperboloid, jedna povrchová kružnice, vytvořená bodem r, promítá se do K_1. Středem kruhu hrdelního je o a poloměr $\overline{oa} = a$. Rovina ϱ ($\varrho_1 \equiv H_1$), jdoucí přímkou H_1 kolmo ku π, seče rot. hyperboloid v hyperbole H, jejíž průmět je v přímce H_1. Bod n_1 je průmětem bodu n hyperboly H, v němž kružnice K seče rovinu ϱ. Pokládáme-li N_1 za průmět přímky $N \parallel N_1 \parallel X$, lze přímku N míti za površku a X za osu válce proloženého hyperbolou H. Ježto body r a n mají stejnou výšku $\overline{r_1 r} = \overline{n_1 n} = z$ nad průmětnou π, leží površky M, N v jedné rovině (rnm) rovnoběžné s π, náleží tudíž jejich společný bod m křivce L, v níž hyperbolický paraboloid a hyp. válec se protínají; je tedy L_1 průmětem křivky L.

3. Tečnu křivky L_1 v bodě m_1 sestrojíme průmětem $m_1 t'$ průsečnice rovin tečných τ, τ' v bodě m resp. hyp. paraboloidu a hyp. válce. Rovinu tečnou τ stanovíme dvěma površkami $M \parallel M_1$, mp různých soustav paraboloidu. Površka mp je rovnoběžná s řídicí rovinou $(RR_1) \perp \pi$ a její průmět $m_1 p \parallel R_1$ vytíná na površce X

první soustavy ležící v průmětně π stopu p površky mp. Je tedy rovnoběžka P^τ, vedená bodem p s přímkou $M \parallel M_1$, stopou roviny tečné τ.

Rovinu tečnou τ' hyp. válce v bodě m stanovme površkou N a tečnou np' hyperboly H v bodě n. Stopu p' tečny np' na H_1 vytíná polára $P^{\tau''}$ bodu n_1 vzhledem ke kruhu A. Neboť polára



Obr. 1.

tato je stopou roviny tečné τ'' v bodě n rot. hyperboloidu a H_1 stopou P^ϱ roviny ϱ hyperboly H. Sestrojíme-li tedy stopu $P^{\tau'} \parallel N_1 \parallel X$ jdoucí bodem p', protnou se stopy P^τ, $P^{\tau'}$ v bodě t', jehož spojnice s bodem m je tečnou křivky L a spojnice m_1t' tečnou jejího průmětu L_1.

4. Rovnice křivky L_1. Buďtež X, Y osy pravoúhlé soustavy souřadné. Rovnice přímky M_1 spojující bod o s bodem r_1 (a, y_1) jest

$$\frac{y}{x} = \frac{y_1}{a}. \tag{1}$$

Kružnici K_1 pak náleží rovnice

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{2}$$

Ježto bod r_1 (a, y_1) leží na kružnici K_1,

$$a^2 + y_1^2 = r^2$$

a poněvadž bod n_1 (e, y_2) též kruhu K_1 náleží

$$e^2 + y_2^2 = r^2,$$

tedy

$$a^2 + y_1^2 = e^2 + y_2^2$$

a položíme-li $a^2 - e^2 = b^2$,

$$y_2^2 - y_1^2 = b^2. \tag{3}$$

Rovnice přímky N_1 je

$$y = y_2.$$

Vyloučíme-li y_2 z posledních dvou rovnic,

$$y^2 - y_1^2 = b^2. \tag{4}$$

a vyloučením ještě y_1 z rovnic (1), (4) plyne

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1,$$

což značí rovnici křivky L_1.

Je-li v rovnici $a^2 - e^2 = b^2$, dříve uvedené, $a > e$, je b^2 kladné a rovnice ta vede nás (obr. 1) k trojúhelníku pravoúhlému oev, kde v (e, b) je společným bodem přímky H_1 a kružnice A. V tomto případě pojmenujme křivku L_1 křížnicí (la kreuzcourbe).*)

Je-li však $a < e$, je b^2 záporné a touž rovnicí jsme vedeni (obr. 2) k trojúhelníku prav. oac, kde c (a, b) je průsečíkem přímky R_1 s kružnicí (o, e).[1] V tomto druhém případě nazveme křivku L_1 střížnicí[2] (la kohlenspitzencourbe).

5. Určeme kuželosečku E středem o, vrcholem a a ohniskem e. Je-li E elipsou, jsou její vrcholové tečny $x = \pm a$, $y = \pm b$ asymptotami křížnice L_1 a bod o isolovaným bodem dvojným. Je-li však hyperbolou, jsou její vrcholové tečny $x = \pm a$ asymptotami střížnice a její tečny ve dvojném inflekčním bodě o jsou asymptotami $x = \pm b/a$ hyperboly.

6. Buď q průsečíkem osy Y s přímkou $m_1 n_1$ a p průsečíkem osy X s P^r. Pak poláry bodů p $(x_1, 0)$, q $(0, y_1)$ vzhledem ke kuželosečce mají rovnice

$$x x_1 = a^2, \quad y y_1 = b^2$$

a jejich průsečík (x, y) je pólem přímky pq. Za podmínky, že bod m_1 (x_1, y_1) náleží křivce L_1, vylučme z rovnic předešlých a z rovnice

---

*) Dr. K. Zahradník. O jisté biracionál. kubické transformaci. Č. M. a F. r. XXXIV, 341. Dr. H. Wieleitner. Spezielle ebene Kurven pq. 19. Dr. G. Loria-Schütte. l. c. pg. 210, pg. 696.

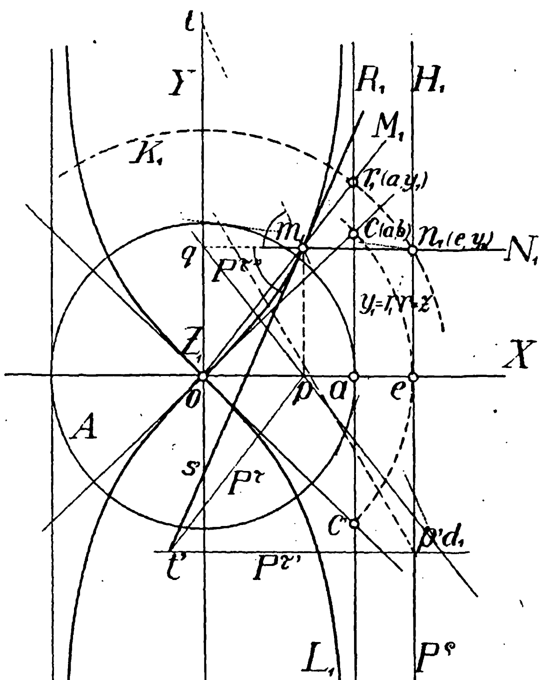
[1] (o, e) značí kružnici, jejíž střed je o a poloměr $oe = e$.

[2] Pojmenování toto voleno podle jednoho cviku tělocvičného.

křivky L_1 x_1, y_1, čímž obdržíme rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

je tedy pól (x, y) na kuželosečce E, z čehož vyplývá, že pq je tečnou této kuželosečky. Je tedy, jak známo, křivka L_1 z kuželosečky E odvozená. Lze tudíž křivku L_1 sestrojiti, když tečnou elipsy



Obr. 2.

resp. hyperboly protneme přímky X, Y v bodech p, q, jimiž vedené rovnoběžky s příslušnými osami protínají se v bodě m_1 křivky L_1.

7. Mějme X, Y, Z za osy pravoúhlé soustavy souřadné prostorové. Ježto souřadnice z kteréhokoliv bodu přímky M v případě jednom a kruhu K v případě druhém rovná se $y_1 = ar_1 = r_1 r = n_1 n$ a píšeme-li tedy v rovnicích (1), (4) z místo y_1, bude

$$xz = ay$$

rovnice hyperbolického paraboloidu a

$$y^2 - z^2 = b^2$$

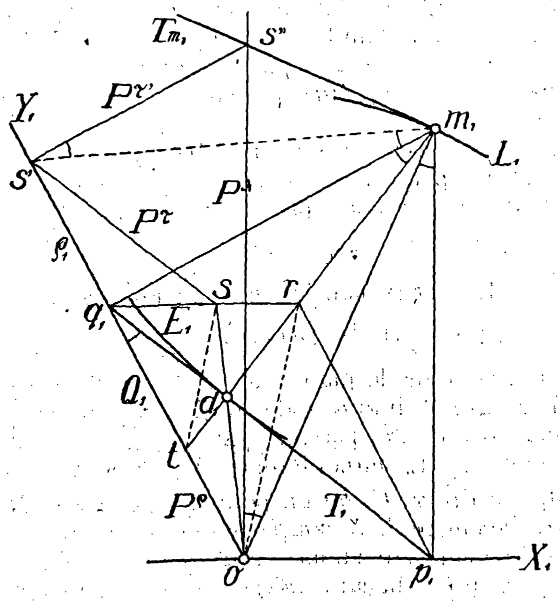
rovnice hyp. válce. Vyloučíme-li z těchto rovnic z, obdržíme rovnici křivky L_1, kterážto je průmětem křivky L společné hyper. paraboloidu a hyp. válce, jak již dříve bylo uvedeno.

8. Buďtež dány v rovině π křivka E_1 a dvě přímky $X_1 Y_1$, jež se sečou v bodě o. Tečnou T_1 křivky E_1 v bodě d_1 protněme přímku X_1 v bodě p_1 a přímku Y_1 v bodě q_1. Bodem o veďme přímku X svírající se svým průmětem X_1 daný úhel α, na př. $\alpha = 45^0$. Do bodu p_1 promítněme bod p přímky X a bodem tímto veďme přímku $pm \parallel p_1 m_1$ v daném směru. Proložme křivkou E_1 plochu válcovou kolmou ku π. Bodem p vedená přímka $T \parallel T_1$ dotýká se válce v bodě d, jenž má svůj průmět v d_1. Je-li T_1 proměnnou tečnou křivky E_1, vytvoří proměnný bod tečny $T \parallel T_1$ na válci křivku E, jejíž průmět je v E_1. Stanovme křivkou E, přímkou X a průmětnou π konoid, jehož obrysová křivka je E. Je tedy rovina $(TT_1) \perp \pi$ rovinou tečnou konoidu v bodě d. Rovina ϱ, vedená přímkou Y_1 kolmo ku π, seče konoid v určité křivce Q, jejíž jeden bod q, v němž T protíná rovinu ϱ, má svůj průmět v q_1. Veďme opět jiným daným směrem bodem q přímku $qm \parallel q_1 m_1$, která přímku pm seče v bodě m; tím vznikne trojúhelník pqm, který má svůj průmět v $\triangle\, p_1 q_1 m_1$. Stanovme body opm rovinu λ, jejíž stopa P^λ jde bodem o rovnoběžně s přímkou $mp \parallel m_1 p_1$. Pak proložme křivkou Q válec, rovnoběžný s π, jehož jedna površka $qm \parallel q_1 m_1$ má s rovinou λ společný bod m, který tudíž náleží křivce L, v níž rovina λ válec proložený křivkou Q seče a která promítá se do L_1.

9. Tečna T_{m_1} křivky L_1 je průmětem průsečnice T_m roviny $\lambda \equiv opm$ s rovinou tečnou τ' válce (QL) podél površky qm. Rovina τ' obsahuje tečnu qs' křivky Q v bodě q. Sestrojíme-li stopu s' tečny qs, lze též zobraziti stopu $P^{\tau'} \parallel q_1 m_1 \parallel qm$ jdoucí bodem s', takže spojnice průsečíků stop $P^{\tau'}$, P^λ s bodem m bude hledanou tečnou T_m. Jde tudíž o sestrojení bodu s'. Za tím účelem položme podél površky T konoidu tečný hyp. paraboloid, jehož útvary řídicími jsou: přímka X, tečna $d_1 d \perp \pi$ konoidu v bodě d ležící v jeho tečné rovině $(TT_1) \perp \pi$ vedené bodem d, a průmětnou π. Spojnice od_1 je površkou hyp. paraboloidu ležící v rovině π. Rovnoběžky X_1 a $q_1 s$ jsou průměty dvou površek X a qs hyp. paraboloidu téže soustavy. Má tedy qs svou stopu v bodě s, v němž $q_1 s \parallel X_1$ seče površku od_1 hyp. paraboloidu ležící v průmětně π. Vedeme-li tedy bodem s rovnoběžku $P^\tau \parallel T_1 \parallel T$, obdržíme stopu společné tečné roviny τ hyp. paraboloidu a konoidu v bodě q. Je tedy průsečíkem stop P^ϱ a P^τ stanovena hledaná stopa s' tečny qs' křivky Q. Nyní lze již stopu $P^{\tau'}$ roviny tečné τ sestrojiti; spojíme-li její průsečík s'' se stopou P^λ s bodem m_1, dostáváme tečnu T_{m_1} křivky L_1 v bodě m_1.

10. Přímky $p_1 r \parallel oq_1$ a $q_1 r \parallel op_1$ sekou se ve vrcholu r rovnoběžníka $op_1 rq_1$. Protneme-li stranu jeho oq_1 spojnicí rd_1 v bodě t, je známo, že ts a or jsou spolu rovnoběžné a že rovnoběžky tyto

jsou úhlopříčkou p_1q_1 půleny; poněvadž p_1q_1 a ss' jsou rovnoběžné, jest $q_1t = s'q_1$. Z toho jest patrno, kterak lze setrojiti tečnu T_{m_1} křivky L_1, je-li dán dotyčný bod d_1 křivky E_1 anebo, kterak naopak, lze vyznačiti na E_1 dotyčný bod d_1, známe-li tečnu T_{m_1} křivky L_1 v bodě m_1. Tímto způsobem je sestrojen dotyčný bod d_1 na tečně p_1q_1 hyperboly v obr. 2.



Obr. 3.

11. Jsou-li přímky m_1p_1, m_1q_1 kolmy k X_1Y_1 a je-li tečna T_{m_1} kolmá k om_1 (obr. 3), je td_1 výškou trojúhelníka $p_1q_1m_1$ jdoucí průsečíkem r druhých dvou výšek $p_1r \perp q_1m_1$, $q_1r \perp m_1p_1$. Neboť, spojíme-li bod m_1 s bodem t, pak

$$\sphericalangle p_1q_1o = \sphericalangle p_1m_1o = \sphericalangle m_1os'' = \sphericalangle m_1s's'' = \sphericalangle s'm_1q_1 = \sphericalangle q_1m_1t.$$

Neboť první dva úhly jsou stejné obvodové úhly v kruhu $op_1m_1q_1$ nad společnou tětivou $\overline{op_1}$; druhé dva jsou stejné úhly střídavé při rovnoběžkách $p_1m_1 \parallel os''$; třetí dva jsou v kruhu $om_1s''s'$ stejné úhly obvodové nad tětivou m_1s''; čtvrté dva jsou stejné úhly střídavé, při rovnoběžkách $s's'' \parallel m_1q_1$ a poslední dva jsou stejné úhly v rovnoramenném trojúhelníku $ts'm_1$ při vrcholu m_1. Z rovnosti prvního a posledního úhlu plyne, že $m_1d_1 \perp p_1q_1$; prochází tudíž tm_1 bodem r. Přímka td_1r, mající s výškou tm_1 společné dva body t, r je s řečenou výškou totožná. Je tedy pata d_1 výšky tm_1 bodem dotyčným křivky E_1.

12. Je-li křivka L_1 kružnicí, procházející bodem o, obaluje přímka p_1q_1 křivku Steinerovu, jsou-li přímky p_1m_1 a q_1m_1 kolmé na X_1 a Y_1. Myslíme-li si totiž, že kružnice L_1 protíná přímky X_1, Y_1 v bodech x_1, y_1, pak přímka p_1q_1 jest přímkou Eulerovou v trojúhelníku ox_1y_1 a obalová křivka tečny T_1 jest křivkou Steinerovou, jejíž dotyčný bod d_1 lze způsobem dříve uvedeným sestrojiti.

13. Je-li bod o středem kružnice L_1, pak proměnná přímka p_1q_1 obaluje šikmou asteroidu, jejíž dotyčný bod d_1 je patou kolmice, spuštěné s bodu m_1 na T_1, čímž přicházíme k známé již konstrukci dotyčného bodu d_1.

Jest mi milou povinností vzdáti díky p. prof. dru J. Roháčkovi, který podle mého manuskriptu článek tento do tisku upravil a příslušné obrazce pečlivě vyrýsoval.

*

Sur deux courbes du sixième ordre.

(Extrait de l'article précédent.)

Étant donné, dans le plan, une droite X et trois points a, e, o d'elle, menons, aux points a, e des droites R_1, H_1 perpendiculaires à X. Par une droite M_1 passant par le point o la droite R_1 est coupée au point r_1. La circonférence K_1 au centre o et au rayon $\overline{or_1} = r$ coupe la droite H_1 en un point n_1. La droite N_1 menée par ce point parallèlement à X coupe M_1 en un point m_1. Le lieu de ce point est une courbe du sixième ordre, dont deux espèces l'auteur étudie de plus près, faisant usage des méthodes de géométrie descriptive.