Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Libický

O dvojných součinech vektorových. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 48 (1919), No. 3-4, 226--229

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121291

Integrace dává opět homothetické kuželosečky a ze vztahu

$$M_1 = c^3 M_3$$

plyne pro poměr průvodičů rovnice:

$$\begin{aligned}(m_2+m_3)c^5-(2m_2+3m_3)c^4+(m_2+3m_3)c^3 \\ -(3m_1+m_2+2m_3)c^2+(3m_1+2m_2)c-(m_1+ \\ +m_2)=0.\end{aligned} \tag{16}$$

2. Je-li $\vartheta = \pi$, jest $r_{12} = r_{31} - r_{23}$.

Zcela obdobnou cestou jako v případech předešlých obdržíme, kladouce $\frac{r_{12}}{r_{23}} = c$, vztahy

$$M_1 = m_1 + m_2 + \left[\frac{c^2}{(1+c)^2} - c^2\right] m_3$$

$$M_3 = \left[\frac{1}{(1+c)^2} - \frac{1}{c^2}\right] m_1 + m_2 + m_3.$$

Integrace pohybových rovnic vede opět k *homothetickým kuželosečkám*, a pro poměr průvodičů obdržíme rovnici

$$\begin{aligned}(m_2+m_3)c^5+(2m_2+3m_3)c^4+(m_2+3m_3)c^3 \\ -(m_2+3m_1)c^2-(2m_2+3m_1)c-(m_2+m_1)=0.\end{aligned} \tag{17*)}$$

O dvojných součinech vektorových.

Napsal Ph. Dr. **Vlad. Libický.**

(Dokončení.)

Vzhledem ke vzorci (9)**) jest analytický tvar skalárovektoriálního součinu dyad **al**, **bm**, **cn**:

$$\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm} \times \mathbf{cn} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}.$$

Skalárovektoriální a vektoroskalární součiny dyadických mnohočlenů.

Jsou-li dány dyadické mnohočleny (dyadiky)

$$\Phi = \mathbf{al} + \mathbf{bm} + \mathbf{cn}, \quad \Psi = \mathbf{do} + \mathbf{ep} + \mathbf{fq},$$

---

*) Viz Tiserand: Traité de méc. cél., I., str. 155.
Srovnej Charlier: Die Mech. des Himmels, II., str. 110.

**) *A. Libický*, Vekt. analysis, vzorec (15) na str. 19.

utvoříme jejich skálárovektoriální součin, znásobíme-li skalárovektoriálně každý člen prvého mnohočlenu každým členem mnohočlenu druhého a sečteme-li takto obdržené částečné součiny. Bude tedy:

$$\Phi \dot{\times} \Psi = \{\mathbf{al} + \mathbf{bm} + \mathbf{cn}\} \dot{\times} \{\mathbf{do} + \mathbf{ep} + \mathbf{fq}\}$$
$$= \mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{do} + \mathbf{bm} \dot{\times} \mathbf{do} + \mathbf{cn} \dot{\times} \mathbf{do}$$
$$+ \mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{ep} + \mathbf{bm} \dot{\times} \mathbf{ep} + \mathbf{cn} \dot{\times} \mathbf{ep} + \mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{fq} + \mathbf{bm} \dot{\times} \mathbf{fq} + \mathbf{cn} \dot{\times} \mathbf{fq}.$$

Použijeme-li vzorce (6) seznáme snadno, že platí též

$$\Phi \dot{\times} \Psi = \{\Phi_C . \Psi\}_v \tag{12}$$

a obdobně

$$\Phi \underset{\cdot}{\times} \Psi = \{\Phi . \Psi_C\}_v, \tag{12*}$$

kde pravé strany jsou vektorové části součinů $\Phi_C . \Psi$ a $\Phi . \Psi_C$.

V prvním z těchto vzorců položme na právé straně místo Φ_C dyadiku Φ, tudíž na levé straně místo Φ sdruženou dyadiku Φ_C a vyměňme podobně v druhém vzorci vzájemně Ψ_C a Ψ; tím dostaneme

$$\{\Phi . \Psi\}_v = \Phi_C \dot{\times} \Psi = \Phi \underset{\cdot}{\times} \Psi_C, \tag{13}$$

čímž vektorová část skalárního součinu dvou dyadik vyjádřena jest skalárovektoriálními (nebo vektoroskalárními) součiny.

Vzhledem ke vzorcům (4) můžeme také psáti rovnice:

$$\begin{aligned} \Phi \dot{\times} \Psi &= \Phi_C \underset{\cdot}{\times} \Psi_C, \\ \Phi \underset{\cdot}{\times} \Psi &= \Phi_C \dot{\times} \Psi_C. \end{aligned} \tag{14}$$

Zvláštní případy:

1. Položme $\Phi \equiv \Psi$; pak jsou dle vzorců (12) $\Phi \dot{\times} \Phi$ a $\Phi \underset{\cdot}{\times} \Phi$ vektorové části dyadik $\Phi_C . \Phi$ a $\Phi . \Phi_C$. Ježto skalární součin dyadiky a její hodnoty sdružené jest dyadika symmetrická, *) jejíž vektor se rovná nulle, **) platí:

$$\Phi \dot{\times} \Phi = \Phi \underset{\cdot}{\times} \Phi = 0. \tag{15}$$

2. Je-li dyadika Ψ idemfaktorem $I = \mathbf{a'a} + \mathbf{b'b} + \mathbf{c'c}$, ***)

*) *Ant. Libický*, Vektorová analysis, pag. 149.

**) Nonion symmetrické dyadiky jest (Vekt. anal., str. 17).

$$\begin{aligned} &a_{11}\,\mathbf{ii} + a_{12}\,\mathbf{ij} + a_{13}\,\mathbf{ik} \\ + &a_{12}\,\mathbf{ji} + a_{22}\,\mathbf{jj} + a_{23}\,\mathbf{jk} \\ + &a_{31}\,\mathbf{ki} + a_{32}\,\mathbf{kj} + a_{33}\,\mathbf{kk} \end{aligned}$$

a ze vztahů $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i}$ atd. (ibid. str. 12) plyne, že vektor takového mnohočlenu jest roven nulle.

***) *Ant. Libický*, Vektorová analysis, pag. 141.

obdržíme dle (12) pro součin $\Phi \dot{\times} I$ výraz $\{\Phi_C . I\}_v$, aneb jelikož

$$\Phi_C . I = \Phi_C$$

též $$\Phi \dot{\times} I = \{\Phi_C\}_v = -\Phi_{Cv}\text{†)} \qquad (15)$$

z čehož poznáváme, že skalárovektoriálním součinem dyadiky s idemfaktorem stanoven jest vektor sdružené dyadiky Φ_C.

Podobně jest $$\Phi \underset{\cdot}{\times} I = \Phi_v = -\{\Phi_C\}_v, \qquad (16^a)$$

ježto $\Phi . I_C = \Phi . I = \Phi$.

Pro součiny, v nichž idemfaktor jest prvním činitelem, nabudeme

$$I \dot{\times} \Psi = \Psi_v, \qquad (17)$$

poněvadž $$I_C . \Psi = I . \Psi = \Psi;$$

podobně jest $$I \underset{\cdot}{\times} \Psi = -\Psi_v = \{\Psi_C\}_v. \qquad (17^a)$$

Lze tedy vektor dyadického mnohočlenu Ψ vyjádřiti dvojnými součiny skalárovektoriálními (nebo vektoroskalárními), jichž jedním činitelem jest idemfaktor, totiž

$$\Psi_v = I \dot{\times} \Psi = -I \underset{\cdot}{\times} \Psi = \Psi \underset{\cdot}{\times} I = -\Psi \dot{\times} I. \qquad (18)$$

Kladouce v těchto součinech za Ψ dyadiku $\nabla \mathbf{v}$, jejíž vektor jest $\nabla \times \mathbf{v} = curl\ \mathbf{v}$, *) dostaneme vzorce

$$curl\ \mathbf{v} = I \dot{\times} \nabla \mathbf{v} = -I \underset{\cdot}{\times} \nabla \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v} \underset{\cdot}{\times} I = -\nabla \mathbf{v} \dot{\times} I. \qquad (19)$$

Analytický tvar skalárovektoriálního a vektoroskalárního součinu. Jsou-li obě dyadiky dány noniony: **)

$$\begin{aligned}\Phi = a_{11}\,\mathbf{ii} + a_{12}\,\mathbf{ij} + a_{13}\,\mathbf{ik}, \qquad & \Psi = b_{11}\,\mathbf{ii} + b_{12}\,\mathbf{ij} + b_{13}\,\mathbf{ik}\\ + a_{21}\,\mathbf{ji} + a_{22}\,\mathbf{jj} + a_{23}\,\mathbf{jk} \qquad & + b_{21}\,\mathbf{ji} + b_{22}\,\mathbf{jj} + b_{23}\,\mathbf{jk}\\ + a_{31}\,\mathbf{ki} + a_{32}\,\mathbf{kj} + a_{33}\,\mathbf{kk} \qquad & + b_{31}\,\mathbf{ki} + b_{32}\,\mathbf{kj} + b_{33}\,\mathbf{kk},\end{aligned}$$

obdržíme přihlížejíce ke vzorcům (9), pro skalárovektoriální součin $\Phi \dot{\times} \Psi$ tento výraz:

$$\begin{aligned}\Phi \dot{\times} \Psi = & (a_{12} b_{13} - a_{13} b_{12} + a_{22} b_{23} - a_{23} b_{22} + a_{32} b_{33} - a_{33} b_{32})\,\mathbf{i}\\ & + (a_{13} b_{11} - a_{11} b_{13} + a_{23} b_{21} - a_{21} b_{23} + a_{33} b_{31} - a_{31} b_{33})\,\mathbf{j}\\ & + (a_{11} b_{12} - a_{12} b_{11} + a_{21} b_{22} - a_{22} b_{21} + a_{31} b_{32} - a_{32} b_{31})\,\mathbf{k},\end{aligned}$$

a obdobně (20)

$$\begin{aligned}\Phi \underset{\cdot}{\times} \Psi = & (a_{21} b_{31} - a_{31} b_{21} + a_{22} b_{32} - a_{32} b_{22} + a_{23} b_{33} - a_{33} b_{23})\,\mathbf{i}\\ & + (a_{31} b_{11} - a_{11} b_{31} + a_{32} b_{12} - a_{12} b_{32} + a_{33} b_{13} - a_{13} b_{33})\,\mathbf{j}\\ & + (a_{11} b_{21} - a_{21} b_{11} + a_{12} b_{22} - a_{22} b_{12} + a_{13} b_{23} - a_{23} b_{13})\,\mathbf{k}.\end{aligned} \qquad (20^a)$$

†) Znaménko jest záporné, poněvadž $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

*) Ibid. pag. 80.

**) Ibid. pag. 15.

Vzorce ty se zjednoduší, jsou-li oba mnohočleny symmetrické Σ, Σ' nebo antisymmetrické A, A'.*) V případě prvém rovná se $\Sigma = \Sigma_C$, $\Sigma' = \Sigma'_C$,**) tedy dle (13) platí vztahy:

$$\Sigma \dot{\times} \Sigma' = \Sigma \underset{\cdot}{\times} \Sigma' = -\Sigma' \underset{\cdot}{\times} \Sigma = -\Sigma' \dot{\times} \Sigma; \tag{21}$$

poslední dvě relace plynou ze vzorců (19) a (19[a]).

V případě druhém $A_C = -A$, $A'_C = -A'$, pročež

$$A \dot{\times} A' = A \underset{\cdot}{\times} A' = -A' \underset{\cdot}{\times} A = -A' \dot{\times} A. \tag{22}$$

Analytický výraz pro součiny antisymmetrických dyadik jest jednoduchý; jestiť***)

$$\begin{aligned} A \dot{\times} A' = (a_{12} b_{13} - a_{13} b_{12})\,\mathbf{i} + (a_{12} b_{23} - a_{23} b_{12})\,\mathbf{j} + \\ + (a_{13} b_{23} - a_{23} b_{13})\,\mathbf{k}. \end{aligned} \tag{23}$$

Pro součin tří dyadik Φ, Ψ, X platí táž základní relace jako pro součiny tří dyad (11), totiž:

$$\Phi \dot{\times} \Psi \underset{\cdot}{\times} X = \Phi : \Psi \substack{\times \\ \times} X. \tag{24}$$

Ve zvláštním případě mohou býti všechny tři činitelé stejny, tedy $\Phi \equiv \Psi \equiv X = \mathbf{al} + \mathbf{bm} + \mathbf{cn}$. Pak obdržíme:

$$\begin{aligned} &\Phi \dot{\times} \Phi \underset{\cdot}{\times} \Phi = \Phi : \Phi \substack{\times \\ \times} \Phi = \\ &= \{\mathbf{al} + \mathbf{bm} + \mathbf{cn}\} : \{\mathbf{al} + \mathbf{bm} + \mathbf{cn}\} \substack{\times \\ \times} \{\mathbf{al} + \mathbf{bm} + \mathbf{cn}\} \\ &= \{\mathbf{al} + \mathbf{bm} + \mathbf{cn}\} : 2\{\mathbf{b} \times \mathbf{c}\ \mathbf{m} \times \mathbf{n} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}\ \mathbf{n} \times \mathbf{l} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}\ \mathbf{l} \times \mathbf{m}\} \\ &= 2(\mathbf{a} . \mathbf{b} \times \mathbf{c}\ \mathbf{l} . \mathbf{m} \times \mathbf{n} + \mathbf{b} . \mathbf{c} \times \mathbf{a}\ \mathbf{m} . \mathbf{n} \times \mathbf{l} + \mathbf{c} . \mathbf{a} \times \mathbf{b}\ \mathbf{n} . \mathbf{l} \times \mathbf{m}) \end{aligned}$$

jelikož však $\mathbf{a} . [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = \mathbf{b} . [\mathbf{c} \times \mathbf{a}] = \mathbf{c} . [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$ a $\mathbf{l} . [\mathbf{m} \times \mathbf{n}] = \mathbf{m} . [\mathbf{n} \times \mathbf{l}] = \mathbf{n} . [\mathbf{l} \times \mathbf{m}]$,†) bude $\Phi \dot{\times} \Phi \underset{\cdot}{\times} \Phi =$

$$= 6(\mathbf{a} . \mathbf{b} \times \mathbf{c}\ \mathbf{l} . \mathbf{m} \times \mathbf{n}) = 6(\mathbf{abc})(\mathbf{lmn}), \tag{25}$$

což jest šestinásobný *třetí skalár* dyadiky Φ.††) Hodnota tohoto skaláru jest rovna determinantu, jehož členy jsou koefficienty a_{ij} nonionu, jímž jest vyjádřena dyadika Φ;†††) tudíž

$$\Phi \dot{\times} \Phi \underset{\cdot}{\times} \Phi = 6 \mid a_{ij} \mid . \tag{26}$$

---

*) Ibid. pag. 17.

**) Ibid. pag. 149.

***) V nonionu antisymmetrické dyadiky jest $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$ $a_{21} = -a_{12}$ atd.

†) *Ant. Libický*, Vektorová analysis, pag. 19.

††) Ibid. pag. 151.

†††) Ibid. pag. 153.