Kyrille Popoff

Sur les solutions périodiques et asymptotiques dans le problème restreint des trois corps

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 5, 118--123

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121280`

Sur les solutions périodiques et asymptotiques dans le problème restreint des trois corps.

Kyrille Popoff, Sofia.

H. Poincaré a montré l'intérêt que présente l'étude des solutions périodiques et asymptotiques dans le problème des trois corps et plus particulièrement dans le problème restreint où le planétoïde de masse négligeable, est attiré par deux masses (Soleil—Jupiter) décrivant des orbites circulaires autour de leur centre de gravité, le mouvement du planétoïde s'effectuant dans le plan des orbites.

G. H. Darwin, T. N. Thiele, C. Burrau, Moulton, Birkoff et d'autres ont consacré de beaux travaux à ces orbites. Ici même, à Prague, Heinrich a obtenu de beaux résultats théoriques concernant les orbites périodiques. Le problème étant très vaste je voudrais me limiter aux travaux récents exécutés à l'Observatoire de Copenhague.

Elis Strömgren s'est proposé de donner, par une méthode de quadratures numériques, toutes les orbites périodiques simples qu'on a dans la multiplicité d'ordre ∞^4 d'orbites possibles, en admettant la masse de Jupiter égale à celle du Soleil. Aidé par des collaborateurs assidus, il est arrivé au bout de son travail.

En tenant compte de la symétrie des équations différentielles, on établit facilement qu'une orbite périodique qui coupe une certaine droite sous un angle droit doit la couper encore une autre fois sous le même angle. En prenant comme point de départ un point sur cette droite et comme vitesse initiale une vitesse perpendiculaire à cette droite, on poursuit à Copenhague, par des intégrations mécaniques, le mouvement du planétoïde jusqu'à ce qu'il rencontre une seconde fois cette droite. Si l'on arrive au point d'intersection avec une vitesse perpendiculaire à la droite de symétrie, on aura une solution périodique simple, sinon, on reprend les calculs avec une nouvelle vitesse initiale et l'on calcule de nouveau la vitesse au point d'intersection de la nouvelle orbite avec l'axe de symétrie. Par le procédé d'interpolation on arrive facilement, après quelques tâtonnements, à une orbite qui coupe l'axe de symétrie au point de la seconde intersection sous un angle droit, c'est-à-dire à une orbite périodique.

Par le procédé des quadratures mécaniques on a calculé à Copenhague aussi un grand nombre d'orbites asymptotiques aux points de libration équilatères.

On a accumulé ainsi un grand matériel d'orbites périodiques et asymptotiques qui provoque notre admiration. Il restait à mettre de l'ordre dans le matériel obtenu par un travail persévérant et c'est Elis Strömgren lui-même qui s'est chargé de ce travail souvent lourd et délicat. Le procédé qu'il emploie est plutôt visuel. Il dessine les orbites calculées et cherche à les ranger de façon qu'elles forment des suites d'orbites qu'on peut déduire l'une de l'autre par des déformations continues correspondant aux variations continues du point de départ ou de la constante de Jacobi, qui est une fonction des données initiales du problème. Il forme ainsi différentes classes d'orbites périodiques et d'orbites asymptotiques.

L'étude théorique de ce matériel a été entreprise par Aurel Wintner dans la Mathematische Zeitschrift et dans les publications de l'Observatoire de Copenhague. Malheureusement le travail de Wintner est basé sur une interprétation défectueuse de certains théorèmes fondamentaux de la théorie des équations différentielles, ce qui lui permet de mettre en défaut le beau théorème de Poincaré, concernant la filiation des orbites périodiques et établi dans des conditions très générales. En effet, en considérant un système d'équations différentielles dont les seconds membres sont des fonctions périodiques du temps et sans admettre l'existence d'intégrale uniforme, Poincaré établit que „les solutions périodiques disparaissent par couples à la façon des racines des équations algébriques" (Méthodes nouvelles. t. I.).

C'est ce théorème, bien compris et appliqué aux conditions moins générales du problème des trois corps, qui permettra une classification rationnelle des résultats accumulés à Copenhague et par conséquent, si l'on veut arriver à une classification durable il faut rétablir le prestige du théorème de Poincaré, mis en doûte dans les publications de Copenhague.

En effet on lit à la page 325 dans le Mémoire de Wintner[1]): „Doch läßt sich der Poincarésche Beweis dieses sogenannten Verzweigungssatzes nicht aufrechterhalten." Plus loin, p. 336: „Übrigens ist bei Poincaré auch der Beweis seiner höchstens im Sinne der Puiseuxschen Sätze, aber dynamisch keinesfalls sinnvollen Aussage fehlerhaft." Plus loin encore, p. 351: „Der Existenzbeweis von Poincaré beruht, ebenso wie eine analoge Untersuchung von Schwarzschild, auf einem Mißverständnis" etc. etc.

Or voyons d'où vient ce Mißverständnis. Les démonstrations de Wintner s'appuient sur le théorème suivant:

---

1) Aurel Wintner, Grundlagen einer Genealogie der periodischen Bahnen im restringierten Dreikörperproblem. Math. Zeitschrift Bd. 34 (1932), p. 321—402. Voir aussi Publikationer og mindre Meddelelser fra Kobenhavns Observatorium NN. 75, 79.

Soit

$$G_j = G_j(\gamma; \xi_1, \ldots, \xi_n), \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

n fonctions entières de γ, $\xi_1, \ldots, \xi_n$, c'est-à-dire n fonctions développables en séries suivant les puissances entières et positives de γ, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ et convergentes partout. Supposons de plus que les équations différentielles

$$\frac{d\xi_j}{d\tau} = G_j(\gamma, \xi_1, \ldots, \xi_n) \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{2}$$

admettent une intégrale première

$$\Gamma(\gamma; \xi_1, \ldots, \xi_n) = 0, \tag{3}$$

où Γ est de même une fonction entière de γ, $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Soit maintenant

$$\hat{\xi}_j(\tau) = X_j(\tau; \hat{\gamma}, \hat{\xi}_1^0, \ldots, \hat{\xi}_n^0) \tag{4}$$

une solution des équations différentielles (correspondant aux valeurs initiales $\hat{\xi}_j^0$ de ξ_j et à la valeur correspondante de γ) telle que les fonctions $\hat{\xi}_j(\tau)$ soient régulières et plus petites en valeur absolue que M dans l'intervalle fini et fermé

$$0 \leq \tau \leq L \qquad (L > 0). \tag{5}$$

Soit de plus $\hat{T}$ un nombre quelconque de l'intervalle

$$0 \leq \hat{T} \leq L.$$

Alors „Nach bekannten Sätzen, d'après Wintner, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein außer von ε nur von L, M und den G_j abhängiges, also von der speziellen Wahl von $\hat{T}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\xi}_j^0$ unabhängiges $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ derart, daß, sobald die $n + 1$ Abweichungen

$$\Delta\gamma = \gamma - \hat{\gamma}, \qquad \Delta\xi_j^0 = \xi_j^0 - \hat{\xi}_j^0$$

in den Kreisbereichen

$$|\Delta\gamma| \leq \delta_\varepsilon, \qquad |\Delta\xi_j^0| \leq \delta_\varepsilon$$

liegen, die Funktionen

$$\xi_j = \xi_j(\tau; \gamma; \xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)$$

in dem Intervalle

$$0 \leq \tau \leq L + \varepsilon$$

regulär sind".[2])

Pour se rendre compte de l'inexistence d'un tel théorème il suffit de mettre $\gamma = \hat{\gamma}$, $\xi_j^0 = \hat{\xi}_j^0$. Ainsi on aura surement $|\Delta\gamma| = 0 \leq \delta_\varepsilon$,

[2]) Aurel Wintner: Le mémoire cité p. 329.

$|\varDelta\xi_j^0| = 0 < \delta_\varepsilon$ et par conséquent la regularité de la solution (4) dans l'intervalle (5) devait amener sa regularité dans l'intervalle $0 \leq \tau \leq L + \varepsilon$, quel que soit ε.

On aurait pu objecter que l'expression zu jedem $\varepsilon > 0$ veut dire zu jedem unter einer gewissen Grenze ε, mais dans ce cas on exclut de la famille des orbites périodiques toutes ces orbites dont la période dépasse $L + \varepsilon$. On trouve pourtant, même dans les orbites de Copenhague, des orbites à des périodes infinies.

On peut se rendre compte de ce fait aussi sur l'exemple simple

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\, x^2$$

dont l'intégrale $x = \dfrac{1}{t - t_0}$, régulière dans un intervalle qui ne contient pas t_0, devient infinie pour $t = t_0$.

Dans ses réfutations du théorème de Poincaré, Wintner oublie de même que les points singuliers des fonctions de plusieurs variables ne sont pas isolés. Dans un travail que nous publierons bientôt nous allons montrer quel est le sens du théorème de Poincaré et quelle est le parti qu'on en peut tirer.

Après ces remarques critiques revenons à la partie positive de notre rapport. En introduisant au lieu du temps t la variable τ au moyen de la relation

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}t}{r_1 \,.\, r_2},$$

où r_1 et r_2 sont les distances du planétoïde aux deux masses finies et en introduisant les variables de Thiele, les équations du mouvement sont précisement de la forme (2), avec $n = 4$, et admettent une intégrale première (3). Ici les G_j et Γ sont des fonctions entières de $\gamma, \xi_1, \ldots, \xi_4$. Or dans le cas du problème restreint, où les deux masses finies gardent constamment une distance invariable, on ne peut pas avoir que des chocs binaires et dans ce cas on sait des travaux de Karl Sundman que les variables ξ_j sont des fonctions holomorphes de τ dans une bande infinie de largeur finie autour de l'axe réel du plan de la variable τ. Les points singuliers, c'est-à-dire les points de libration, de ces équations sont donnés par les racines du système:

$$G_j(\gamma;\, \xi_1, \ldots, \xi_4) = 0, \qquad j = 1, 2, 3, 4.$$
$$\Gamma(\gamma;\, \xi_1, \ldots, \xi_4) = 0.$$

En développant les seconds membres des équations (2) en séries de Taylor autour de ces points on arrive, après une transformation linéaire, aux équations de la forme:

$$\frac{dx_1}{\lambda_1 x_1 + \ldots} = \frac{dx_2}{\lambda_2 x_2 + \ldots} = \frac{dx_3}{\lambda_3 x_3 + \ldots} = \frac{dx_4}{\lambda_4 x_4 + \ldots} = d\tau, \tag{6}$$

les points (. . .) remplaçant des termes du second degré au moins en $x_1, \ldots, x_4$.

Pour les points de libration colinéaires L_1 et L_3 qui se trouvent en dehors du segment reliant les masses finies, on a

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \sqrt{-1}\, 6{,}1 \ldots \qquad \lambda_3 = -\lambda_4 = 6{,}6 \ldots,$$

et pour le point de libration L_2, entre les deux masses, on a

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \sqrt{-1}\, 2{,}9 \ldots \qquad \lambda_3 = -\lambda_4 = 3{,}8 \ldots$$

La théorie analytique des équations différentielles, telle qu'elle a été développée par Briot et Bouquet, Poincaré, Picard etc. montre que les équations différentielles (6) admettent 1⁰) des solutions asymptotiques développables suivant les puissances entières et positives de $ce^{\lambda_3 \tau}$, convergentes pour des valeurs de τ tendant vers $-\infty$ et 2⁰) des solutions asymptotiques développables suivant les puissances entières et positives de $ce^{\lambda_4 \tau}$ et convergentes pour des valeurs de τ qui tendent vers $+\infty$. Ces solutions ne dependent que de la constante c et comme on a

$$ce^{\lambda\tau} = e^{\lambda\left(\tau + \frac{\log c}{\lambda}\right)} \qquad \text{pour } c > 0$$

et

$$ce^{\lambda\tau} = -e^{\lambda\left(\tau + \frac{\log |c|}{\lambda}\right)} \text{ pour } c < 0,$$

cette constante d'intégration n'a aucune influence sur la forme géométrique des orbites asymptotiques. Elle ne fait que changer les valeurs de τ de la même quantite $\frac{\log c}{\lambda}$.

Des études théoriques sur ces orbites ont été faites par L. A. H. Warren[3]) et reprises par moi dans un travail qui sera bientôt publié. Ces orbites n'ont pas encore été calculées à Copenhague.

L'existence des solutions périodiques de périodes voisines de $\frac{2\pi}{\lambda_1}\sqrt{-1}$ autour des points de libration colinéaires a été établie dans le travail bien connu de Moulton[4]) et il existe un matériel abondant de ces orbites calculées à Copenhague.

Dans un travail qui sera bientôt publié, je démontre l'existence des solutions asymptotiques à ces solutions périodiques pour $\tau = -\infty$ et pour $\tau = +\infty$. Ces solutions peuvent être développées en séries suivant les puissances entières et positives de $ce^{\alpha_1 \tau}$

[3]) L. A. H. Warren, Journal of Mathematics 37 (1916), p. 221—248.
[4]) F. R. Moulton, Periodic orbits. Washington 1920.

respectivement $ce^{\alpha_4\tau}$ dont les coefficients sont des fonctions périodiques de τ. Je démontre de plus que les exposants caractéristiques α_3 et α_4 tendent respectivement vers λ_3 et λ_4 lorsque l'orbite périodique, par des déformations continues, tend vers le point de libration correspondant.

Le calcul numérique de ces orbites asymptotiques aux orbites périodiques n'a été fait nulle part. Le fait que ces orbites restent pendant un intervalle très grand tout près des orbites périodiques correspondantes rend presqu'impossible la séparation de ces orbites asymptotiques des orbites périodiques correspondantes par des procédés des calculs numériques. La plupart des orbites périodiques calculées doivent être de telles orbites.

Considérons maintenant les points de libration équilatères L_4 et L_5. On a dans ce cas

$$\lambda_1 = p + k\sqrt{-1}, \qquad \lambda_2 = p - k\sqrt{-1},$$
$$\lambda_3 = n + l\sqrt{-1}, \qquad \lambda_4 = n - l\sqrt{-1}$$

avec $p > 0$ et $n < 0$. Tous les λ étant complexes, on n'a pas de solutions périodiques dans le voisinage immédiat de ces points. Mais dans ce cas il y a deux familles d'orbites réelles asymptotiques à ces points. En effet, les variables x_1, x_2, x_3, x_4 peuvent être développées ici en séries procédant suivant les puissances positives et entières de

$$c_1 e^{\lambda_1\tau} \text{ et } c_2 e^{\lambda_2\tau},$$

c_1 et c_2 étant deux constantes d'intégration et ces séries convergent pour des valeurs de τ tendant vers $-\infty$. De même nos équations admettent aussi une autre solution où les variables peuvent être développées en séries procédant suivant les puissances entières et positives de

$$c_1 e^{\lambda_3\tau} \text{ et } c_2 e^{\lambda_4\tau},$$

convergentes pour des valeurs de τ tendant vers $+\infty$. Un grand nombre de ces orbites a été calculé à l'Observatoire de Copenhague. Buchanan[5]) a étudié les séries ci-dessus au point de vue formel.

---

[5]) **Daniel Buchanan, Asymptotic satellites near the equilateral-triangle equilibrium points etc. Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 22, p. 309—340.**