Václav A. Hruška

O interpolaci

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 5, 146--147

$$\frac{dz_i}{dx} = r_i z_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Jestliže charak. rovnica má samé rozličné korene, z (3) dá sa určiť systém riešenia $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dif. systému (1).

Keď charak. rovnica má $n - \varkappa$ násobný koreň, pomocou (4) z (3) dostaneme

$$y_\nu = \sum_{i=1}^{\varkappa+1} d_{\nu i} c_i e^{r_i x} + \sum_{i=\varkappa+2}^{n} d'_{\nu i} y_i, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, \varkappa+1), \tag{5}$$

kde $d_{\nu i}$ a $d'_{\nu i}$ sú determinanty a konstanty. c_i sú integračné konstanty. Pomocou týchto dostaneme z (1) nehomogenný lin. dif. systém o $n - \varkappa - 1$ rovniciach pre $y_{\varkappa+2}, \ldots, y_n$. Každá funkcia $y_1, y_2, \ldots, y_n$ takto určená obsahuje n integ. konst. hodnôt, preto riešenie je obecné.

Jestliže je r_{α_1} $\alpha_1, \ldots, r_{\alpha_\varrho}$ zase α_ϱ-násobným koreňom ($\alpha_1 + \ldots + \alpha_\varrho = n$), vtedy pre $\gamma_{i\lambda}$ máme ϱ lin. hom. systémov tvaru (2), (3), (4) a (5).

O interpolaci.

V. Hruška, Praha.

V poslední době byly vydány některé mnohamístné tabulky bez vyšších diferencí, což v nich velmi znesnadňuje interpolaci. Uvádím na př. K. Hayashiovy Sieben- u. mehrstellige Tafeln ... a Andoyerovy 14místné Nouvelles Tables Trigonométriques. K interpolaci v těchto tabulkách osvědčilo se mi užívati mnohočlenů, které pro $x = a$ a pro $x = a + h$ nabývají týchž hodnot jako interpolovaná funkce $f(x)$ a jichž derivace v těchto bodech nabývají resp. hodnot $f'(a)$ a $f'(a + h)$. Takovou formuli [Láska-Hruška, Teorie a prakse numerického počítání, str. 130, vzorec (8)]

$$f(a + nh) = f_0 + n^2 (3 - 2n)(f_1 - f_0) + n (n - 1)^2 h f'_0 + n^2 (n - 1) h f'_1 + Z_3(x), \quad x = a + nh, \quad 0 \leqq n \leqq 1, \tag{1}$$

$$Z_3(x) = \tfrac{1}{24} n^2 (n - 1)^2 h^4 f^{IV}(a + \Theta h), \qquad 0 < \Theta < 1 \tag{2}$$

lze snadno psáti v symetrickém tvaru velmi vhodném pro numerický výpočet, klademe-li v ní $m = 1 - n$,

$$f(a + nh) \approx m^2 (3 - 2m) f_0 + n^2 (3 - 2n) f_1 + nmh (m f'_0 - n f'_1). \tag{3}$$

Práce spojená s interpolací touto formulí jest přibližně stejná jako při interpolaci Everettovou formulí o druhých diferencích, hranice zbytku vzorce (3) však jest

$$| Z_3(x) | < \tfrac{1}{384} h^4 f^{IV}(a + \Theta h),$$

tedy 9krát menší než hranice zbytku Everettovy formule. Tak na př. při kroku $h = 0{,}001$ v zmíněné 12místné Hayashiově tabulce funkce e^x, $(x < 3)$ bude

$$| Z_3(x) | < \tfrac{20}{384} \,.\, 10^{-12},$$

tedy plně vyhovující, kdežto formule 3. řádu o středních diferencích již nikoliv.

Ještě markantnější jest to, užijeme-li mnohočlenu, jehož také druhé derivace se rovnají resp. $f''(a)$, $f''(a + h)$ pro $x = a$ a pro $x = a + h$:

$$\begin{aligned} f(a + nh) = {} & m^3 (10 - 15m + 6m^2) f_0 + n^3 (10 - 15n + 6n^2) f_1 \\ & + hm^3 (4 - 7m + 3m^2) f'_0 - hn^3 (4 - 7n + 3n^2) f'_1 \qquad (4) \\ & + \tfrac{1}{2}h^2m^3n^2 f''_0 + \tfrac{1}{2}h^2n^3m^2 f''_1 + Z_5(x), \end{aligned}$$

$$x = a + nh,\ m = 1 - n,\ Z_5(x) = \tfrac{1}{720}n^3 (n - 1)^3 h^6 f^{VI}(a + \Theta h),$$

$$| Z_5(x) | < \tfrac{1}{46080}h^6 f^{VI}(a + \Theta h), \qquad 0 < \Theta < 1,$$

proti zbytku

$$| \overline{Z}_5(x) | < \tfrac{5}{1024}h^6 f^{VI}(a + \Theta h), \qquad 0 < \Theta < 1$$

interpolační formule pátého řádu o středních diferencích. Tak na př. při interpolaci v 10 místné části zmíněné tabulky funkce e^x $(3 \leqq x \leqq 10)$ o kroku $h = 0{,}01$ byl by zbytek podle vzorce (4)

$$| Z_5(x) | < \tfrac{1200}{46080} \,.\, 10^{-12},$$

tedy přesnost vyhovující, proti nevyhovující přesnosti

$$| \overline{Z}_5(x) | < 60 \,.\, 10^{-12}$$

interpolační formule 5. řádu o středních diferencích.

Zajímavé jest, že integrací interpolačních vzorců tohoto druhu obdržíme kvadraturní formule, které uveřejnil bez důkazu prof. K. Petr v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky, 1915, str. 454. Tak na př. integrací vzorce (4) obdržíme

$$\int_a^{a+h} f(x)\, dx = \tfrac{1}{2}h\, (f_0 + f_1) + \tfrac{1}{10}h^2\, (f'_0 - f'_1) + \tfrac{1}{120}h^3\, (f''_0 + f''_1) + Z_5$$

$$Z_5 = \tfrac{1}{100800}h^7 f^{VI}(a + \Theta h), \qquad 0 < \Theta < 1$$

za předpokladu spojitosti $f^{VI}(x)$ v oboru $(a, a + h)$.

Un théorème sur les intégrales trigonométriques.

J. Karamata, Beograd.

Dans la Note „Weiterführung der N. Wienerschen Methode“ (Math. Zeitsch. 38, 701—708) j'ai démontré un théorème (le th. B') concernant les intégrales de Laplace $\int_0^\infty e^{-st} A(t)\, dt$. L'objet de