Franciszek Leja

Les suites de polynômes et la représentation conforme

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 5, 151--153

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121270

d. h. wenn und nur wenn

$$A_n = \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\varphi)\, e^{-ni\varphi} d\varphi, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

Die Integrale sind Lebesgue-sche Integrale.

Satz II:

Die Funktion f(z) gehört zur Klasse C, wenn und nur wenn bei jedem gegebenen n die Koeffizienten in folgender Form dargestellt werden können

$$A_k = \frac{e^{ik\vartheta_n}}{k} \sum_{j=0}^{y} (e^{-ki\varphi_{2j}^{(n)}} - e^{-ki\varphi_{2j+1}^{(n)}}), \tag{3}$$

$$1 \leq k \leq n, \qquad 0 \leq y \leq n,$$

$$0 = \varphi_0^{(n)} < \varphi_1^{(n)} < \ldots < \varphi_{2y+1}^{(n)} < 2\pi,$$

$$(\varphi_1^{(n)} - \varphi_0^{(n)}) + (\varphi_3^{(n)} - \varphi_2^{(n)}) + \ldots + (\varphi^{(n)}_{2y+1} - \varphi^{(n)}_{2y}) = 2b.$$

Dabei sind ϑ_n, $\varphi_j^{(n)}$ und y von k unabhängige durch n bestimmte reelle Zahlen.

Die Sätze I und II sind äquivalent.

Les suites de polynômes et la représentation conforme.

F. Leja, Warszawa.

Soit D un domaine quelconque du plan complexe dont la frontière F est un continu connexe contenant au moins deux points différents. Je supposerai que le domaine D contienne le point à l'infini dans son intérieur.

Considérons $n + 1$ points différents quelconques

$$\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n \tag{1}$$

appartenant à la frontière F et formons le produit de tous les distances mutuelles entre les points (1):

$$V(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \prod_{0 \leqq j < k \leqq n} |\zeta_j - \zeta_k|. \tag{2}$$

Cette fonction des points (1) atteint sur F un maximum (car l'ensemble F est, d'après l'hypothèse, fermé et borné). Soit V_n ce maximum et

$$\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n \tag{3}$$

les points de F en lesquels il est atteint. On a donc

$$V_n = V(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n) = \max_{\text{sur } F} V(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n).$$

Formons maintenant les $n + 1$ produits suivants

$$\Delta_j = |(\eta_j - \eta_0) \dots (\eta_j - \eta_{j-1}) (\eta_j - \eta_{j+1}) \dots (\eta_j - \eta_n)|,$$
$$\text{où } j = 0, 1, \dots, n,$$

et considérons le plus petit d'eux. Sans nuir à la généralité on peut supposer qu'on ait

$$\Delta_0 \leqq \Delta_j, \quad \text{pour } j = 0, 1, \dots, n.$$

Cela posé, considérons le polynôme du degré n que voici

$$\mathrm{L}_n(z) = \frac{(z - \eta_1)(z - \eta_2) \dots (z - \eta_n)}{(\eta_0 - \eta_1)(\eta_0 - \eta_2) \dots (\eta_0 - \eta_n)}. \tag{4}$$

En faisant varier n on obtient une suite infinie de polynômes

$$\mathrm{L}_1(z), \mathrm{L}_2(z), \dots, \mathrm{L}_n(z), \dots \tag{5}$$

intimement liée au domaine donné D. Les modules des polynômes (5) ne surpassent pas l'unité sur la frontière F de D et leurs points zéros sont situés, quel que soit $n = 1, 2, \dots$, sur F et jouissent d'une propriété extrémale spécifiée plus haut.

Or, on peut démontrer les propositions que voici:

1° La suite infinie

$$\frac{1}{n} \log | \mathrm{L}_n(z) |, \quad n = 1, 2, \dots,$$

converge dans le domaine D vers la fonction de Green $\mathrm{G}(z)$ de D remplissant les conditions suivantes:

$$\mathrm{G}(z) \to 0, \text{ si } z \text{ tend vers un point de } F,$$
$$\log | z | - \mathrm{G}(z) \to C, \text{ si } z \to \infty,$$

où C est un nombre fini.

Soit z_0 un point situé à l'intérieur de D. Fixons la détermination de la fonction $\sqrt[n]{\mathrm{L}_n(z)}$ dans le domaine D et soit α_n le nombre réel tel que la fonction

$$e^{\alpha_n i} \,.\, \sqrt[n]{\mathrm{L}_n(z)}$$

soit positive au point z_0. On peut établir ce que voici:

2° La suite infinie

$$e^{\alpha_n i} \,.\, \sqrt[n]{\mathrm{L}_n(z)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

tend dans le domaine D vers une fonction limite $\mathrm{f}(z)$. La fonction $\mathrm{f}(z)$ est régulière et différente de zéro dans D et l'équation

$$z' = \frac{1}{\mathrm{f}(z)}$$

détermine la représentation conforme du domaine D sur le cercle unité dans laquelle l'image du point $z = \infty$ est le point $z' = 0$ et l'image du point $z = z_0$ se trouve sur le demi-axe réel et positif.

Über allgemeine Spektralfunktionen.

Heinrich Löwig, Prag.

Es sei M ein σ-Körper von Teilmengen einer Menge $\mathfrak{M}$, welche selbst ebenfalls M angehöre, und es sei $\mathfrak{R}$ ein vollständiger komplexer euklidischer Raum, d. h. ein vollständiger komplexer linearer metrischer Raum, in welchem ein hermiteisch symmetrisches inneres Produkt definiert ist. Ist dann jeder Menge $\mathfrak{A}$ von M ein Einzeloperator $\mathrm{E}(\mathfrak{A})$ in $\mathfrak{R}$ derart zugeordnet, daß für jedes Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$ $(\mathrm{E}(\mathfrak{A})\,\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$ eine absolut additive Mengenfunktion in M ist, und ist $\mathrm{E}(\mathfrak{M})$ die Identität, dann soll $\mathrm{E}(\mathfrak{A})$ eine *Spektralfunktion* in M und $\mathfrak{R}$ heissen. Der Verfasser hat die Frage untersucht und beantwortet, wann zwei Spektralfunktionen in demselben σ-Körper isomorph sind, und hat dabei folgendes Resultat erhalten: Zwei Spektralfunktionen in demselben σ-Körper M sind dann und nur dann isomorph, wenn sie in bezug auf jede endliche nicht negative absolut additive Mengenfunktion in M die *gleiche Vielfachheit* besitzen. Unter der Vielfachheit einer Spektralfunktion $\mathrm{E}(\mathfrak{A})$ in M und $\mathfrak{R}$ in bezug auf eine endliche nicht negative absolut additive Mengenfunktion $\mathrm{f}(\mathfrak{A})$ in M ist dabei die Vielfachheit dieser Spektralfunktion in bezug auf die abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit derjenigen Elemente $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{R}$ zu verstehen, für welche $(\mathrm{E}(\mathfrak{A})\,\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$ in bezug auf $\mathrm{f}(\mathfrak{A})$ total stetig ist, d. h. für jede Menge verschwindet, für welche $\mathrm{f}(\mathfrak{A})$ verschwindet; die Vielfachheit von $\mathrm{E}(\mathfrak{A})$ in bezug auf eine abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{R}$, deren Einzeloperator mit allen $\mathrm{E}(\mathfrak{A})$ vertauschbar ist, ist die kleinste Kardinalzahl $\aleph$ von der Eigenschaft, daß es eine Menge $\mathfrak{N}$ von Elementen $\mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{P}$ von der Mächtigkeit $\aleph$ und von der Eigenschaft gibt, daß die abgeschlossene lineare Hülle der Elemente $\mathrm{E}(\mathfrak{A})\,\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{A} \in M$, $\mathfrak{x} \in \mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{P}$ zusammenfällt. Der ausgesprochene Satz ist eine Verallgemeinerung der Sätze über die orthogonale Aequivalenz zweier quadratischer Formen in unendlich vielen Veränderlichen, welche von E. Hellinger (Die Orthogonalinvarianten quadratischer Formen von unendlich vielen Variabeln; Dissertation Göttingen 1907)