Petre Sergescu

Compléments à ma communication du Congrès de Chambéry

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 5, 136--140

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121266

ukázal při důkazu věty, že determinant, v němž dvě řady jsou si rovny, má hodnotu 0. (Crelles J. 167, 1932, str. 197, Hasse, Aufgabensammlung zur Höheren Algebra, S. Göschen 1082, str. 97).

Determinanten in Körpern von beliebiger Charakteristik. Um die von Prof. K. Petr im Artikel: O definici determinantu, Časopis 60, 1931, S. 201—213, dargelegte Theorie der Determinanten auf den Fall der Körper von Charakteristik $p = 2$ zu erweitern, muß man die alternierende Funktion passend definieren.

Compléments à ma communication du Congrès de Chambéry.

P. Sergescu, professeur à l'Université de Cluj.

1. Dans ma communication au congrès de Chambéry, 1933, de l'Association française pour l'avancement des sciences (57 session, pag. 50—54) j'ai montré que les équations $\sum_{k=1}^{n} (1 + kr)^p x^k = 0$ où $p = 1$, 2 ou négatif, ont au plus deux racines réelles. Je supposais tous les termes de la progression positifs, donc $r > 0$ sans restreindre la généralité.*) Ces résultats peuvent être étendus.

2. L'équation $\sum_{k=1}^{n} (1 + kr)^3 x^k = 0$, où $r > 0$, a au plus trois racines réelles.

Les racines réelles sont négatives et comprises entre -1 et 0 (théorème de Kakeya). En multipliant par $(1 - x)^4$:

$$(1 - x)^4 \sum_{k=1}^{n} (1 + kr)^3 x^k = 1 + [(1 + r)^3 - 4] x +$$
$$+ [4r^3 - 6r + 3] x^2 + (r - 1)^3 x^3 - [1 + (n + 1) r]^3 x^{n+1} +$$
$$+ \{4 [1 + (n + 1) r^3] - [1 + (n + 2) r]^3\} x^{n+2} - \{4 (1 + nr)^3 -$$
$$- [1 + (n - 1) r\}^3 x^{n+3} + (1 + nr)^3 x^{n+4} = 0.$$

Les parenthèses qui multiplient x^2, x^{n+1}, x^{n+2}, x^{n+3}, x^{n+4} sont positives. Cas n impair. La transformée en $-x$ de cette expression a trois variations. L'équation proposée a effectivement trois racines réelles. En effet, posons:

$$y = 1 - [(1 + r)^3 - 4] x + (4r^3 - 6r + 3) x^2 - (r - 1)^3 x^3$$
$$Y = [1 + (n + 1) r]^3 x^{n+1} + [\ldots] x^{n+2} + [\ldots] x^{n+3} + (1 + nr)^3 x^{n+4}.$$

L'équation revient à $y = Y$. Pour $r > 2$, y coupe Ox en deux points $\alpha < \beta$ situés entre 0 et 1. Y croit de 0 à $Y(1) > y(1)$. Donc Y coupe y en un point d'abscisse $< \alpha$. De plus, on peut prendre n assez grand pour que pour $x_0 > \beta$, donné, on ait $Y(x_0) <$

*) Il faut supprimer pag. 53 les lignes 5 et 6, qui se sont glissées par une erreur de transcription.

$< \varepsilon < y\,(x_0)$, de sorte que Y doit couper y encore en deux points; donc, trois racines.

(Pour $p = 2$, Chambéry, cette circonstance ne se produit pas, car si $y\,(1) > 0$ la parabole $y = 0$ ne coupe plus Ox de sorte que Y ne doit plus couper la branche descendente de la parabole.)

Cas n pair. La cubique y a la concavité tournée vers les y positifs dans l'intervalle 0, 1 ($y'' > 0$). L'équation est $y = -Y$. Or $-Y$ a la concavité tournée vers les y négatifs. Dès lors, y et $-Y$ ont au plus deux points communs. Pour n pair l'équation proposée a donc au plus deux racines réelles. La proposition est établie.

3. L'équation $\sum_{k=1}^{n} (1 + kr)^{p-1}x^k = 0$ a au plus p racines réelles.

Ce nombre est atteint (p. ex. $p = 1, 2$; $p = 4$, $r < -3$). On multiplie par $(1 - x)^p$; dans le produit les coefficients de $x^p, x^{p+1}, \ldots, x^n$ sont nuls car ils sont de la forme:

$$\begin{gathered}(1 + mr)^{p-1} - C^1{}_p\,[1 + (m - 1)\,r]^{p-1} + \ldots \\ + (-1)^{p-1}\,[1 + (m - p)\,r]^{p-1} = \mathrm{F}(0) - C^1{}_p\mathrm{F}(1) + \ldots \\ + (-1)^{p-1}\mathrm{F}(p) \text{ où } \mathrm{F}(x) = [1 + (m - x)\,r]^{p-1},\end{gathered}$$

et ceci est zéro, étant la p^{e} différence du polynome $\mathrm{F}(x)$ de degré $p - 1$.

Ce même calcul de différences permet de voir que dans la transformée en $-x$ du produit, les coefficients de $x^{n+1}, x^{n+2}, \ldots, x^{n+p}$ ne présentent que des permanences si $r > 0$. Donc il ne peut y avoir des variations que pour les termes de dégrés $0, 1, \ldots, p - 1, n + 1$, soit p variations, ce qui établit la proposition pour $r > 0$.

Ce calcul, assez long, peut être remplacé par une démonstration très élégante (valable pour r réel quelconque) que je dois, ainsi que les généralisations, à la bienveillance de mon maître Paul Montel:

Le produit a: p termes de degrés $0, 1, \ldots, p - 1$ et p termes de degrés $n + 1, \ldots, n + p$. En considérant à la fois les permanences et les variations, le théorème de Descartes montre que le produit a $(p - 1) + 2 + (p - 1) = 2p$ racines réelles au plus. On en connaît p égales à 1. Le second facteur a, dès lors, au plus p racines réelles. C. q. f. d.

4. La cause de ce résultat est que certains coefficients du produit sont des différences finies nulles. Ceci entraîne donc la généralisation:

Soit la suite de nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et $\Delta a_0, \ldots, \Delta a_{n-1}, \Delta^2 a_0, \ldots, \Delta^2 a_{n-2}, \ldots$ les différences successives des termes de la suite. Considérons l'équation:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = 0$$

et supposons:

1⁰ Les coefficients a_i et leurs dernières différences Δa_{n-1}, $\Delta^2 a_{n-2}, \ldots, \Delta^{p-1}a_{n-p+1}$ sont positifs.

2⁰ Les différences d'ordre p de la suite sont nulles.

Alors, $f(x) = 0$ a au plus p racines réelles (négatives). En effet, dans $(1 - x)^p f(x)$, les coefficients de x^{n+p}, $x^{n+p-1}, \ldots, x^n$, x^{n-1} sont respectivement:

$$a_n, -(\Delta a_{n-1} + C^1{}_{p-1}a_n)\ (\Delta^2 a_{n-2} + C^1{}_{p-2}\Delta a_{n-1} + C^2{}_{p-1}a_n), \ldots$$
$$\ldots, (-1)^{p-1}\ \Delta^p a_{n-p+1},\ (-1)^p\ a_{n-p-2}.$$

Les termes en $x^{n+1}, \ldots, x^{n+p}$ présentent seulement des variations, les $n - p + 1$ termes en $x^n, x^{n-1}, \ldots, x^p$ manquent et l'on achève comme au Nr. 3.

On peut prendre p. ex. $a_k = P(k)$, P étant un polynome de degré $p - 1$, ayant les coefficients positifs.

En appliquant le même raisonnement aux p premiers termes du produit, on a:

Si les a_i sont positifs et si la condition 2⁰ est remplie; de plus:

3⁰ Si $a_0 > 0$, $\Delta a_0 < 0$, $\Delta^2 a_0 > 0, \ldots, (-1)^{p-1}\ \Delta^{p-1}a_0 > 0$, l'équation a au plus p racines réelles.

Supposons remplies à la fois les conditions 1⁰, 2⁰ et 3⁰. D'après 3⁰ les premiers p termes du produit présentent seulement des variations; d'après 2⁰ les $n - p + 1$ termes suivants manquent; d'après 1⁰ les p derniers termes présentent également seulement des variations. Les a_i étant positifs, les racines réelles sont négatives. La transformée en $-x$ ne peut avoir de variation qu'entre les termes en x^{p-1} et x^{n+1}. Donc:

4⁰ Si les conditions 1⁰, 2⁰ et 3⁰ sont remplies à la fois, l'équation $f(x) = 0$ a au plus une racine réelle.

5. Le raisonnement du Nr. 2, n pair, est applicable à toute équation générale remplissant les conditions 1⁰ et 2⁰ du Nr. 4 avec $p = 4$ et telle que l'ensemble des termes de degrés 0, 1, 2 et 3 du produit $(1 + x)^1 f(-x)$ soit une fonction convexe dans l'intervalle 0, 1, les coefficients a_j étant positifs et croissants avec j.

Par exemple, si

$$a_j = P(j) = \alpha j^3 + \beta j^2 + \gamma j + 1$$

et si les quantités positives α, β, γ vérifient les relations

$$4\alpha - 2\gamma + 3 > 0, \qquad \alpha + 3\beta - 5\gamma + 6 > 0,$$

l'équation:

$$P(0) + P(1)\,x + P(2)\,x^2 + \ldots + P(2q)\,x^{2q} = 0$$

a au plus deux racines réelles.

6. Ces considérations peuvent être rattachées à l'étude des polynomes sections de certains développements en série. On connaît le résultat de MM. M. Pétrovitch et G. Polya, étendu par M. P. Montel: Si tous les polynomes sections ont toutes les racines réelles, le développement de la série représente une fonction entière de forme particulière.

En suivant les indications de M. P. Montel, on a le théorème:

Les polynomes sections d'une fraction rationelle ont un nombre fini et borné de zéros réels.

Soient $P(x)$, $Q(x)$ de polynomes de degrés p et q. On a:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} \equiv a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots = Q_n(x) + x^{n+1} S_n(x),$$

$$Q(x) \equiv Q_n(x)\,P(x) + x^{n+1}\,S_n(x)\,P(x).$$

L'identité exige que le polynome $P(x)\,Q_n(x)$, de degré $n + p$, ne contienne que les termes de degrés $0, 1, 2, \ldots, q, n + 1, n + 2, \ldots, n + p$. Si l'on compte les variations des coefficients de $P(x)\,Q_n(x)$ et de son transformé en $-x$, on en a donc

$$(q + 1) + 2 + (p - 1) = p + q + 1$$

car les termes en x^q et x^{n+1} peuvent présenter des variations aussi dans le transformé. Il s'ensuit que le polynome $P(x)\,Q_n(x)$ a au plus $p + q + 1$ racines réelles. Si $P(x)$ a r racines réelles, les polynomes sections $Q_n(x)$ ont au plus $p + q - r + 1$ zéros réels, quel que soit leur degré.

Si le dénominateur $P(x)$ a toutes les racines réelles, les polynomes sections $Q_n(x)$ ont au plus $q + 1$ zéro réels, q étant le degré du numérateur de la fraction rationnelle.

En particulier, les polynomes sections de l'inverse d'un polynome ayant toutes les racines réelles, ont au plus une racine réelle (Résultat donné par Laguerre).

Ce théorème contient comme cas particuliers les coefficients $P(k)$ du Nr. 4, ainsi que ceux du Nr. 3. En effet si tous les zéros du dénominateur $P(x)$ sont réels et distincts $1/\alpha, \ldots, 1/\lambda$ et si nous supposons $q \leqq p - 1$, le développement en fractions simples donne les polynomes sections $\sum_{k=0}^{n} (A\alpha^k + \ldots + L\lambda^k)\,x^k$ qui ont donc au plus $q + 1 = p$ zéros réels, quelles que soient les p quantités réelles $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$. Si $\alpha = \beta = \ldots = \lambda$, le développement de $\frac{Q(x)}{P(x)}$ devient: $\sum_{k=0}^{\infty}{}' (ak^{p-1} + bk^{p-2} + \ldots + l)\, x^k$.

Les $A, \ldots, L$ sont arbitraires, donc les $a, \ldots, l$ le sont aussi et: L'équation $\sum_{k=0}^{n}{}' (ak^{p-1} + bk^{p-2} + \ldots + l)\, x^k = 0$ a au plus p racines réelles.

L'équation du Nr. 3 est un cas particulier de cette équation, donc elle a au plus p racines réelles.