Vladimír Knichal
Dyadické rozvoje a Hausdorffova míra

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 5, 149--150

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121258

$$\mathrm{K}(t) = \mathrm{k}\left(\frac{|t|}{4\lambda}\right)\frac{\sin xt}{t},$$

$$\mathrm{J}_\sigma(x) = \frac{1}{(2\lambda)^3}\int_{-\lambda}^{+\lambda}\dots\int\frac{\sin xt}{t}\,\mathrm{G}(\sigma + ti)\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_3\mathrm{d}t_4 =$$

$$= \int_{-4\lambda}^{+4\lambda}\mathrm{K}(t)\,\mathrm{G}(\sigma + it)\,\mathrm{d}t = \int_{-4\lambda}^{+4\lambda}\mathrm{K}''(t)\,\mathrm{d}t\int_0^t\mathrm{d}u\int_{-u}^{+u}\mathrm{G}(\sigma + vi)\,\mathrm{d}v =$$

$$= \int_{-4\lambda}^{+4\lambda}\mathrm{K}''(t)\,\mathrm{d}t\int_0^\infty e^{-\sigma\tau}\frac{1 - \cos t\tau}{\tau^2}\,\mathrm{A}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \to \int_{-4\lambda}^{+4\lambda}\mathrm{K}''(t)\,\mathrm{c}(t)\,\mathrm{d}t = \qquad (3)$$

$$= \int_{-4\lambda}^{+4\lambda}\mathrm{K}(t)\,\mathrm{c}''(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-4\lambda}^{+4\lambda}\frac{\sin xt}{t}\,\mathrm{k}\left(\frac{|t|}{4\lambda}\right)\mathrm{c}''(t)\,\mathrm{d}t,\quad \sigma \to 0.$$

2°

$$\mathrm{J}_\sigma(x) = \int_0^\infty e^{-\sigma u}\,\mathrm{A}(u)\,\mathrm{d}u\int_{-x}^{+x}\frac{\mathrm{d}v}{2^4\lambda^3}\int_{-\lambda}^{+\lambda}\dots\int e^{t(v-u)i}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_3\mathrm{d}t_4 =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\sigma u}\,\mathrm{A}(u)\,\mathrm{d}u\int_{-x}^{+x}\lambda\left\{\frac{\sin\lambda(v-u)}{\lambda\,(v-u)}\right\}^4\mathrm{d}v \to \qquad (4)$$

$$\to \int_0^\infty \mathrm{A}(u)\,\mathrm{d}u\int_{-x}^{+x}\lambda\left\{\frac{\sin\lambda\,(v-u)}{\lambda\,(v-u)}\right\}^4\mathrm{d}v,\quad \sigma \to 0.$$

De (3) et (4) résulte la relation (2). — En partant de (2) on démontre le th. 1 en refaisant la démonstration du th. *B'* de la Note citée.

Dyadické rozvoje a Hausdorffova míra.

Dr. *Vladimír Knichal,* Praha.

Budiž $0 \leq \Theta < 1$ a $\Theta = 0, i_1 i_2 i_3 \dots$ dyadický rozvoj tohoto čísla normovaný požadavkem, aby posloupnost $i_1, i_2, i_3, \dots$ obsahovala nekonečně mnoho nul. Budiž dále $p(\Theta, n)$ počet nul vyskytujících se v systému $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$ $(n \geq 1)$.

Přednášející uvedl napřed dřívější výsledky pp. Borela, Hausdorffa, Hardy-ho a Littlewooda a Khintchina týkající se odhadu funkce $p(\Theta, n)$ pro velká n a pro skoro všechna Θ intervalu $< 0, 1)$. Pak zavedl pojem Hausdorffovy míry: Budiž M jisté množství reálných čísel a $f(x) > 0$ pro $x > 0$. Označme $L_\varrho(M, f(x))$ pro $\varrho > 0$ dolní hranici [v širším smyslu] součtů $\sum\limits_v^V f[(v)]$ [(v) značí délku intervalu v], jestliže V probíhá všechna nejvýše spočetná množství otevřených intervalů pokrývající M a mající tu vlastnost, že každý interval těch množství má délku menší než ϱ. Pak existuje limita (v širším smyslu): $\lim\limits_{\varrho \to 0+0} L_\varrho(M, f(x))$, kterou označíme $L(M, f(x))$ (Hausdorffova míra množství M příslušná k funkci $f(x)$). Konečně uvedl přednášející tuto větu:

Budiž $0 < r < \frac{1}{2}$ a $\mathfrak{M}_r$ množství těch čísel Θ z intervalu $< 0, 1)$, pro která nerovnina $p(\Theta, n) < rn$ má nekonečně mnoho celých, kladných řešení v n. Pak $L(\mathfrak{M}_r, x^\alpha) = 0$ pro $\alpha > \dfrac{\log q(r)}{\log 2}$ a $L(\mathfrak{M}_r, x^\alpha) = \infty$ pro $\alpha < \dfrac{\log q(r)}{\log 2}$, kde $q(r) = \dfrac{1}{r^r\,(1 - r)^{1-r}}$ (je tedy $0 < \dfrac{\log q(r)}{\log 2} < 1$).

Über Potenzreihen mit beschränktem Imaginarteile.

M. Kössler, Praha.

Es sei

$$\mathfrak{f}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n \tag{1}$$

eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion deren, Imaginarteil $\mathfrak{J}\,\mathfrak{f}(z)$ daselbst die Eigenschaft

$$-b \leq \mathfrak{J}\,\mathfrak{f}(z) \leq \pi - b \tag{1a}$$

besitzt. Dabei sei $0 < b < \pi$. Solche Funktionen wollen wir als Funktionen der Klasse C bezeichnen. Das Koeffizientenproblem dieser Klasse ist durch folgende Sätze gelöst.

Satz I:

Es sei $\psi(\varphi)$ eine reelle Funktion höchstens der ersten Baireschen Klasse, welche in $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ definiert ist und die Eigenschaften

$$0 \leq \psi(\varphi) \leq \pi, \qquad \int_0^{2\pi} \psi(\varphi)\,d\varphi = 2\pi b$$

besitzt. Dann gehört $\mathfrak{f}(z)$ zur Klasse C, wenn und nur wenn

$$\mathfrak{f}(z) = \frac{iz}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\psi(\varphi)\,d\varphi}{e^{i\varphi} - z},$$