Karl Carda

Herleitung der Doppelungleichung $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$ aus der arcsin-Reihe

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 5, 141

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121248`

Herleitung der Doppelungleichung $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$ aus der arc sin-Reihe.

Karl Carda, Prag.

$$\frac{\pi}{6} = \text{arc sin}\,\frac{1}{2};\ \pi = 3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{3\,.\,2^3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} \cdot \frac{6}{5\,.\,2^5} + $$
$$+ \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6} \cdot \frac{6}{7\,.\,2^7} + \ldots \tag{1}$$

Est ist $a_1 = \frac{1}{8}$, $a_2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{9}{80}$, $a_3 = a_2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{4} > \frac{1}{8} \cdot (\frac{9}{80})^2$.
Es gilt allgemein

$$a_n > \tfrac{1}{8} \cdot (\tfrac{9}{80})^{n-1}. \tag{2}$$

Den Beweis führen wir durch den „Schluß von n auf $(n + 1)$". Es sei (2) für ein gewisses n richtig. Dann ist

$$a_{n+1} > \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{9}{80}\right)^{n-1} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{2n+1}{2n+3} \cdot \frac{1}{4}.$$

Wir zeigen, daß die Ungleichung

$$\frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{2n+1}{2n+3} > \frac{1}{2}$$

für jedes $n > 1$ richtig ist. In der Tat ist

$$2\,(4n^2 + 4n + 1) > 4n^2 + 10n + 6$$

oder $n\,(2n - 1) > 2$. Diese Ungleichung trifft für alle $n > 1$ zu. Demnach ist

$$\sum_1^\infty a_n > \sum_1^\infty \tfrac{1}{8} \cdot (\tfrac{9}{80})^{n-1} = \tfrac{10}{71}.$$

Andererseits ist

$$\sum_1^\infty a_n < a_1 + a_2 + a_3 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} < \frac{1}{7}.$$

Sur l'«Intégration logique» des équations de la Dynamique.

Jules Drach, Paris.

J'ai donné antérieurement (Comptes rendus du Congrès intern. de Strasbourg, 1920, p. 376—380) la détermination des cas de réduction d'une équation, $\frac{d^2y}{dx^2} = F(x,\ y)$, quand il existe une