Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Bohuslav Hostinský

# Riemannova theorie o počtu prvočísel v daných mezích. [IV.]

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 39 (1910), No. 4, 395--416

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121243

Nebyla by úplnou naše vzpomínka, kdybychom se nezmínili o trvalém pomníku, jejž zesnulý si vystavěl novým elektrotechnickým ústavem čes. techniky, po němž dlouhá léta toužil, jsa nucen své přednášky o oboru tak důležitém a nákladných strojů, apparátů měrných i demonstračních vyžadujícím prostředky velmi skrovnými odbývati v místnostech nedostatečných. Vytrvalé jeho snaze podařilo se za všestranné podpory professorského sboru dosíci toho, že nový, všem moderním potřebám hovící ústav mohl býti r. 1906 svému účelu odevzdán. Bohužel, nemohl se dlouho těšiti z úspěchu úmornou vytrvalostí dobytého. Odešel a nevrátí se víc. Odešel v něm učitel šlechetný, pracovník neúnavný a muž poctivý, charakteru nejryzejšího. Čest budiž jeho památce! Prof. dr. *B. Kučera.*

---

# Riemannova theorie o počtu prvočísel v daných mezích.

Napsal **Bohuslav Hostinský**.

(Dokončení.)

Je-li $x$ číslo celé, doplníme definice funkce $f(x)$ takto:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{x} b_n - \frac{b_x}{2} = \sum_{n=1}^{x-1} b_n + \frac{b_x}{2}. \tag{37b}$$

$f(x)$ jest funkce nespojitá, ale pro každou hodnotu $x$ jest

$$\lim_{\delta=0} \frac{f(x-\delta)+f(x+\delta)}{2} = f(x).$$

Poznamenejme ještě, že z Eulerovy rovnice (1) následuje

$$\log \zeta(s) = -\sum_p \log\left(1-\frac{1}{p^s}\right) = \sum_p \left(\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{3s}}+\ldots\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}.$$

Riemannovu rovnici (38) formuluje Landau tímto způsobem:

$$\lim_{T=\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{2-Ti}^{2+Ti} x^s \frac{\log\zeta(s)}{s}\,ds = \lim_{T=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{2-Ti}^{2+Ti} \frac{x^s}{s}\sum_{n=1}^{[x]}\frac{b_n}{n^s}\,ds \tag{40}$$
$$= f(x), \quad T > 0.$$

Poněvadž jest dle (37 $a$, $b$) a (39) pro každé kladné $x$

$$\lim_{T=\infty}\int_{2-Ti}^{2+Ti}\frac{x^s}{s}\sum_{n=1}^{[x]}\frac{b_n}{n^s}ds=\lim_{T=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{2-Ti}^{2+Ti}\sum_{n=1}^{[x]}b_n\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}=f(x),$$

stačí k důkazu rovnice (40) dokázati, že

$$\lim_{T=\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{2-Ti}^{2+Ti}\frac{x^s}{s}\sum_{n=[x]+1}^{\infty}\frac{b_n}{n^s}ds=0.$$

Integrál
$$\int\frac{y^s}{s}=ds,$$
vzatý podél obdélníka s vrcholy $s=2-Ti$, $w-Ti$, $w+Ti$, $2+Ti$ ($w$ reální a kladné) rovná se nulle.

Předpokládejme
$$0<y<1,\quad w>2.$$

Pak jest (následující integrály jsou vesměs přímočaré)

$$\left|\int_{2-Ti}^{2+Ti}\frac{y^s}{s}ds\right|=\left|\int_{2-Ti}^{w-T}\frac{y^s}{s}ds+\int_{w-T}^{w+Ti}\frac{y^s}{s}ds+\int_{2-Ti}^{2+Ti}\frac{y^s}{s}ds\right|$$

$$\leqq\frac{2}{T}\int_2^w y^\varrho\,d\varrho+\frac{y^w}{w}\int_{-T}^{T}dt$$

($\varrho$ ... reální část $s$).

Pro $\lim w=\infty$ jest

$$\left|\int_{2-Ti}^{2+Ti}\frac{y^s}{s}ds\right|\leqq\frac{2}{T}\int_2^\infty y^\varrho\,d\varrho=\frac{2y^2}{-T\log y}.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^s}$ jest pro $\varrho=2$ absolutně a stejnoměrně konvergentní; z toho vyplývá, že

$$\left|\int_{2-Ti}^{2+Ti}\frac{x^s}{s}\sum_{n=[x]+1}^{\infty}\frac{b_n}{n^s}ds\right|\leqq\sum_{n=[x]+1}^{\infty}|b_n|\frac{2\left(\frac{x}{n}\right)^2}{-T\log\frac{x}{n}}$$

$$\leqq\frac{2x^2}{-T\log\left(\frac{x}{[x]+1}\right)}\sum_{n=[x]+1}^{\infty}\frac{|b_n|}{n^2}.$$

Limita posledního výrazu pro $T = \infty$ jest nulla.

Tím jest rovnice (40) dokázána; za integrační čáru mohla by býti volena přímka procházející bodem $s = a$ na reální ose a rovnoběžná s osou imaginární, jen když $a > 1$; na hodnotu integrálu tato změna nemá vlivu.

19. Považuje-li se funkce $f(x)$ za známou, najde se $F(x)$ z rovnice (37). Tuto inversi rovnice (37) lze provésti methodou, kterou udal *Möbius* (*51*).

Definujme funkci $\mu(n)$ pro každé kladné celé číslo $n$ následujícím způsobem:

$\mu(n) = 0$, je-li $n$ dělitelno čtvercem nějakého prvočísla,

$\mu(1) = \mu(n) = 1$, je-li $n$ rovno součinu ze sudého počtu prvočísel. a

$\mu(n) = -1$, je-li $n$ rovno součinu z lichého počtu prvočísel.

Napíšeme-li rovnici $\left(\text{viz (37)}\right)$

$$\frac{\mu(n)}{n} f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{\mu(n)}{n} F\left(x^{\frac{1}{n}}\right) + \frac{\mu(n)}{2n} F\left(x^{\frac{1}{2n}}\right) + \frac{\mu(n)}{3n} F\left(x^{\frac{1}{3n}}\right) + \ldots$$

pro $n = 1, 2, 3\ldots$ a sečteme-li všecky řádky takto vzniklé (těch řádků není nekonečně mnoho, poněvadž od jistého indexu $n$ počínaje redukují se všechny další na identitu $0 = 0$), obdržíme

$$\Sigma \frac{\mu(n)}{n} f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = F(x) + A_2 F\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + A_3 F\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \ldots$$

Součet na levé straně jde od $n = 1$ tak daleko, pokud není $f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = 0$.

Koefficient $A_m$ při $F\left(x^{\frac{1}{m}}\right)$ na pravé straně jest $\frac{1}{m} \Sigma \mu(d)$, vztahuje-li se tento součet na všecky dělitele čísla $m$. Neboť je-li $d$ takový dělitel, tedy $m = d \cdot e$, vyskytuje se $F\left(x^{\frac{1}{m}}\right)$ $= F\left(x^{\frac{1}{de}}\right)$ v řádku $d$-tém s koeficientem $\frac{\mu(d)}{de} = \frac{\mu(d)}{m}$; není-li $d'$ dělitelem čísla $m$, nevyskytuje se $F\left(x^{\frac{1}{m}}\right)$ v řádku $d'$-tém.

Bude tudíž

$$F(x) = \Sigma \frac{\mu(n)}{n} f\left(x^{\frac{1}{n}}\right), \tag{41}$$

platí-li rovnice

$$\Sigma \mu(d) = 0,$$

v které se vztahuje součet na všechny dělitele $d$ libovolného celého čísla $m$.

Jsou-li $p_1, p_2 \ldots p_\nu$ všecka prvočísla, jimiž jest $m$ dělitelno, tedy

$$m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots p_\nu^{\alpha_3},$$

jest každý dělitel $d$ čísla $m$, pro který $\mu(d) \gtrless 0$, (který tedy není dělitelný čtvercem prvočísla) zároveň dělitelem čísla

$$m' = p_1 \cdot p_2 \ldots p_\nu$$

a naopak každý dělitel čísla $m'$ jest dělitelem čísla $m$. Součet $\Sigma \mu(d)$ má pro $m$ i $m'$ stejnou hodnotu. Všecky dělitele čísla $m'$ obdržíme roznásobením součinu

$$(1 - p_1)(1 - p_2) \ldots (1 - p_\nu)$$

a sice vyskytne se zde každý dělitel $d$ se znamením $+$ nebo $-$ dle toho, je-li $d$ rovno součinu ze sudého neb lichého počtu prvočísel, t. j. $\mu(d)$ rovno buď 1 nebo $-1$.

Počet dělitelů prvního druhu jest

$$N_1 = 1 + \frac{\nu(\nu-1)}{1 \cdot 2} + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots,$$

počet dělitelů druhého druhu

$$N_2 = \nu + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots$$

Dle binomické věty

$$N_1 - N_2 = (1-1)^\nu = 0.$$

V součtu $\Sigma \mu(d)$ jest právě tolik členů rovných 1 jako členů rovných $-1$ a tedy

$$\Sigma \mu(d) = 0.$$

20. Analytický výraz pro funkci $f(x)$, zbavený již znamení integračních, odvozuje Riemann z rovnice (38), odkud eliminuje

$$\frac{\log \zeta(s)}{s}$$

rovnicí (31). Poněvadž by však jednotlivé členy z pravé strany této rovnice, dosazeny byvše do (38), vedly k divergentním integrálům, transformuje Riemann dříve integrál (38) dle vzorce

$$\int \frac{\log \zeta(s)}{s} x^s ds = \frac{x^s}{\log x} \frac{\log \zeta(s)}{s} - \frac{1}{\log x} \int x^s \frac{d}{ds} \frac{\log \zeta(s)}{s} ds$$

V mezích $a - \infty i \ldots a + \infty i$ (které zkrátka naznačíme písmenou $R$ položenou pod znamení integrační) jest

$$\int_R \frac{\log \zeta(s)}{s} x^s ds = - \frac{1}{\log x} \int_R x^s \frac{d}{ds} \frac{\log \zeta(s)}{s} ds,$$

neboť (viz odst. 10.) $|\zeta(s)|$ jest na integrační čáře obsažena stále v konečných mezích a nemůže se rovnati nulle. Máme tudíž

$$2\pi i \log x \,.\, f(x) = - \int_R . \, x^s \frac{\log \zeta(s)}{s} ds. \tag{42}$$

Do pravé strany této formule jest dosaditi za

$$\frac{d}{ds} \frac{\log \zeta(s)}{s}$$

řadu, která vznikne, derivujeme-li na pravé straně rovnice (31) člen po členu. Integrál v (42) rozdělí se tak v nekonečnou řadu integrálů, jejichž výpočet vede k definitivnímu vzorci pro $f(x)$.

Touto cestou našel Riemann rovnici (43), která jest sice správná, ale její správnost nevyplývá bezprostředně z naznačeného postupu. Neboť jest třeba dokázati, že nekonečná řada na pravé straně v (43) konverguje a to k takové hodnotě, že pravá strana skutečně se rovná levé. Tento důkaz provedl poprvé Mangoldt (*40*, *41*) ve formě nad míru složité. Mnohem jednodušší důkaz podal v nejnovější době Landau (*36*); viz též odst. 14.

Omezím se zde na Riemannovo formální odvození rovnice (43) s podrobnými údaji o čarách integračních. Při derivaci pravé strany v rovnici (31) odpadá člen $\frac{\log \pi}{2}$ a zbývají čtyři členy; příspěvky těchto členů k integrálu (42) buďtež $A$, $B$, $C$, $D$, takže

$$2\pi i \log x \,.\, f(x) = A + B + C + D.$$

Výpočet jednotlivých členů (cf. (39)):

*a*)

$$A = \int\limits_R - x^s \frac{\log 2}{s^2}\, ds = -\log 2 \left\{\left[\frac{x^s}{s}\right]_R + \int\limits_R \frac{x^s \log x}{s}\, ds\right\}$$

$$= -2\pi i \log x \,.\, \log 2;$$

*b*)

$$B = \int\limits_R x^s \frac{d}{ds} \frac{\log (s-1)}{s}\, ds = \left[x^s \frac{\log (s-1)}{s}\right]_R$$

$$- \int\limits_R x^s \log x \frac{\log (s-1)}{s}\, ds.$$

Budiž $\beta$ reální číslo nejvýše rovné 1, a

$$\varphi(\beta) = \int\limits_R \frac{\log\left(\frac{s}{\beta} - 1\right)}{s}\, x^s\, ds.$$

Logarithmus na pravé straně jest pro bod $s = a$, v němž integrační čára protíná reální osu, reální ($a > 1$), je-li $\beta > 0$. Derivace funkce $\varphi(\beta)$ vypočteme kladouce

$$s - \beta = s', \; a - \beta = a'$$

(tedy $a' > 0$):

$$\frac{d\varphi}{d\beta} = \int\limits_R \frac{x^s\, ds}{(\beta - s)\beta} = -\frac{x^\beta}{\beta} \int\limits_{a'-i\infty}^{a'+i\infty} \frac{x^{s'}\, ds'}{s'} = -2\pi i \frac{x^\beta}{\beta}.$$

Integrujeme-li $\frac{d\varphi(u)}{du}$ z $-\infty$ do 1 podél čáry, jež se vyhýbá bodu $u = 0$ *pod* reální osou, jest jednak (odst. 16.)

$$\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{d\varphi(u)}{du}\, du = -2\pi i \int\limits_{-\infty}^{1} \frac{x^u\, du}{u} = -2\pi i\, (Li\,(x) + \pi i),$$

jednak
$$\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{d\varphi(u)}{du}\, du = \varphi(1) - \varphi(-\infty).$$

V poslední rovnici jest $\varphi(-\infty)$ limita, ku které se blíží $\varphi(u)$, vzdaluje-li se $u$ z bodu $u = 1$ do $u = -\infty$ podél integrační čáry, t. j. podél reální osy až na okolí bodu $u = 0$, jemuž se vyhýbá hodnotami s imaginární částí zápornou. Tímto přechodem zvětšuje se argument výrazu $\left(\frac{a}{u} - 1\right)$ od nully do $+\pi i$. Z toho vyplývá, že logarithmus za integračním znamením ve vzorci pro $\varphi(\beta)$ se redukuje pro $lim\ \beta = -\infty$ na

$$log(-1) = +\pi i,$$

je-li $s$ bod integrační čáry $R$. Jest tedy

$$\varphi(-\infty) = \int_R \frac{\pi i}{s} x^s\, ds = +\pi i \,.\, 2\pi i$$

a

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{d\varphi(u)}{du}\, du = \varphi(1) - \pi i \,.\, 2\pi i.$$

Integrál na levé straně byl vyjádřen též integrallogarithmem; srovnání obou rovnic vede k výsledku

$$\varphi(1) = -2\pi i\, Li(x).$$

Pravá strana rovnice pro $B$ jest rovna $-log\ x \,.\, \varphi(1)$, tedy

$$B = 2\pi i\ log\ x \,.\, Li(x).$$

c)

$$C_n = -\int_R x^s \frac{d}{ds} \frac{log\left(1 + \frac{s}{2n}\right)}{s}\, ds,\quad C = \sum_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Analogickou redukcí jako v případě $b$) obdržíme

$$C_n = log\ x \,.\, \psi(-2n),\qquad \psi(\beta) = \int_R \frac{log\left(1 - \frac{s}{\beta}\right)}{s} x^s\, ds;$$

$$log\left(1 - \frac{s}{\beta}\right)$$

jest reální pro $s = a$ a $\beta < 0$, tedy $\psi(-\infty) = 0$.

Z rovnice

$$\frac{d\psi(u)}{du} = \int_R \frac{x^s\, ds}{(u - s)\, u} = -2\pi i \frac{x^u}{u}$$

následuje, že

$$\int_{-\infty}^{\beta} \frac{d\psi(u)}{du}\, du = \psi(\beta) - \psi(-\infty) = \psi(\beta)$$

a tedy

$$\psi(\beta) = -2\pi i \int_{-\infty}^{\beta} \frac{x^u\, du}{u} = -2\pi i \int_{\infty}^{x} \frac{v^{\beta-1}\, dv}{\log v} \quad x^{\frac{u}{\beta}} = v.$$

Máme tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi(-2n) = -2\pi i \int_{\infty}^{x} \frac{u^{-1}}{\log u} \sum_{n=1}^{\infty} u^{-2n}\, du$$

$$= 2\pi i \int_{x}^{\infty} \frac{dx}{x(x^2-1)\log x},$$

$$C = \log x \,.\, \sum_{n=1}^{\infty} \psi(-2n) = 2\pi i \log x \int_{x}^{\infty} \frac{dx}{x(x^2-1)\log x}$$

*d)*

$$D_\beta = \int_R x^s \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right] ds, \quad D = -\sum_\beta D_\beta$$

$\beta = \frac{1}{2} \pm \alpha i$; $\alpha$ jsou kořeny rovnice $\xi(t) = 0$, jejichž reální část jest kladná. $\beta$ jsou tedy komplexní kořeny rovnice $\zeta(s) = 0$ (odst. 10.). Binom $\left(1 - \frac{s}{u}\right)$ nemůže se rovnati nulle pro žádné $u$, jehož reální část jest menší než 1 (tudíž také pro žádné $\beta$; viz odst. 10.), poněvadž podél integrační čáry $R$ jest reální část $a$ integrační proměnné $s$ větší než 1.

Z toho následuje, že $\log\left(1 - \frac{s}{u}\right)$, jenž jest reální pro $s = a$ a $u$ záporné, jest jednoznačný pro všecka $u$, jichž reální část jest menší než 1.

Stejnou redukcí jako v předešlých případech obdržíme pro komplexní kořeny $\beta$

$$\psi(\beta) = \int\limits_{R} x^s \frac{\log\left(1 - \frac{s}{\beta}\right)}{s} ds = \int\limits_{-\infty}^{\beta} \frac{d\psi(u)}{du} du$$

$$= -2\pi i \int\limits_{-\infty}^{\beta} \frac{x^u du}{u};$$

integrační čára jde rovnoběžně s reální osou, nad ní, je-li r. č. $\beta$ kladná, nebo pod ní, je-li r. č. záporná. Jest tedy

$$D = +\log x \sum_{\beta} \psi(\beta) = -2\pi i \log x \sum_{\alpha} \left( \int\limits_{-\infty}^{\frac{1}{2}+\alpha i} \frac{x^u du}{u} + \int\limits_{-\infty}^{\frac{1}{2}-\alpha i} \frac{x^u du}{u} \right)$$

Jeden z obou integrálů v závorce má horní mez s imaginární částí positivní, druhý s im. č. negativní (pro každé $\alpha$). Dle odst. 16. možno tedy psáti

$$D = -2\pi i \log x \sum_{\alpha} \left[ Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right) \right].$$

Definitivní vzorec pro $f(x)$:

$$f(x) = Li(x) - \sum_{\alpha} \left[ Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right) \right]$$
$$+ \int\limits_{x}^{\infty} \frac{dx}{x(x^2-1)\log x} - \log 2 \qquad (43)$$

(„*Riemannova formule*").

Poslední člen jest v původním pojednání Riemannově nesprávný; nalézáme tam (*61* 1. vyd. p. 143.) $+ \log \xi(0)$ místo správného $-\log 2$. Tento omyl opravil Genocchi (*15*).

21. Z rovnice (43) dokázal Mangoldt (*43*) poprvé, že

$$\lim_{x=\infty} \frac{F(x)}{Li(x)} = 1. \qquad (44)$$

Vzhledem k (36) lze psáti tuto rovnici také

$$\lim_{x=\infty} \frac{F(x) \log x}{x} = 1. \qquad (45)$$

Rovnice (44) vyjadřuje v přesné formě zákon předpověděný Gaussem (*14*).

Mangoldtův důkaz formule (44) není zcela jednoduchý; rovněž jest komplikovaný důkaz, který uveřejnil o málo později Valleé-Poussin (*72*). Jednodušší důkaz podal Landau (*37*).

Zajímavo jest, že lze rovnici (44) jednoduše odvoditi z věty, že součet logarithmů prvočísel $p$ menších než $x$ jest asymptotický k $x$, t. j. že

$$\Sigma \log p = (1 + \varepsilon) x, \ \lim \varepsilon = 0 \text{ pro } \lim x = \infty. \quad (46)$$

*Cahen* (*4*, *5*) se pokusil o důkaz této poslední věty methodou, kterou dříve naznačil Halphen (*76*); v podstatě jest podobná tato methoda Riemannově methodě užité při odvození formule (43). Avšak Cahenův důkaz není přesný; doplnění jeho důkazu vyžadovalo důkaz věty, že funkce $\zeta(s)$ nemá žádný nullový bod tvaru $1 + \sigma i$ ($\sigma$ reální; viz odst. 11.). Teprve když tato věta byla dokázána, bylo možno zdokonaliti Cahenův důkaz tak, že o správnosti rovnice (46) není již pochyby. Přesný důkaz pro (46) podal Hadamard (*22*, *23*, *24*) a téměř současně s ním Vallée-Poussin (*72*), jenž naznačil také následující důkaz (*71*) rovnice (45) na základě rovnice (46):

Rozdělme všecka prvočísla $p$ menší než $x$ na dvě skupiny tak, aby prvočísla $p'$ první skupiny a prvočísla $p''$ druhé skupiny vyhovovala nerovnostem

$$\frac{x}{\log x} < p' < x, \ p'' < \frac{x}{\log x}; \ \Sigma \log p' + \Sigma \log p'' = \Sigma \log p.$$

Dle rovnice (46) jest

$$\lim_{x=\infty} \frac{\Sigma\, lp''\,^{*)}}{\Sigma\, lp} \frac{(1+\varepsilon')}{(1+\varepsilon)\, lx} = 0,$$

ežto $\lim \varepsilon = \lim \varepsilon' = 0$ pro $\lim x = \infty$.

Z toho následuje dále, že

$$\lim_{x=\infty} \frac{\Sigma\, lp'}{\Sigma\, lp} = \lim_{x=\infty} \frac{\Sigma\, lp - \Sigma\, lp''}{\Sigma\, lp} = 1,$$

tedy

$$\Sigma\, lp' = (1 + \delta) x, \ \lim \delta = 0 \text{ pro } \lim x = \infty.$$

Součet $\Sigma\, lp'$ se nezmění, nahradíme-li každý jeho člen jistou střední hodnotou mezi prvním členem, jenž jest větší než $lx - llx$ a posledním členem, jenž jest menší než $lx$; poněvadž

*) $lN$ zkráceně místo $\log N$.

jest počet členů onoho součtu $F(x) - F\left(\frac{x}{lx}\right)$, obdržíme

$$(lx - \Theta\, llx)\left(F(x) - F\left(\frac{x}{lx}\right)\right) = (1 + \delta)\, x,\ 0 < \Theta < 1.$$

Tato rovnice dokazuje, že

$$\lim_{x=\infty} \left[F(x) - F\left(\frac{x}{lx}\right)\right] \frac{lx}{x} = 1. \tag{47}$$

Vzhledem k nerovnostem

$$1 = \frac{\Sigma\, lp}{\Sigma\, lp} > \frac{F(x)\, l2}{(1+\varepsilon)\, x},\ 1 = \frac{\Sigma\, lp}{\Sigma\, lp} < \frac{F(x) \,.\, lx}{(1+\varepsilon)\, x}$$

jest jednak

$$\lim_{x=\infty} sup\,^{*)} \frac{F(x)}{x} \leqq \frac{1}{l2},\ \lim_{x=\infty} sup\, F\left(\frac{x}{lx}\right) . \frac{lx}{x} \leqq \frac{1}{l2}$$

a tedy (cf. (47))

$$\lim_{x=\infty} sup\, F(x) . \frac{lx}{x} \leqq 1 + \frac{1}{l2},$$

jednak

$$\lim_{x=\infty} inf\,^{**)} \frac{F(x)\, lx}{x} \geqq 1.$$

Spojíme-li obě poslední nerovnosti, kladouce v nich $\frac{x}{lx}$ místo $x$, vidíme, že hodnota výrazu

$$F\left(\frac{x}{lx}\right) . \frac{lx\,(lx - llx)}{x}$$

jest stále obsažena v mezích 1 a $1 + \frac{1}{l2}$, t. j.

$$\lim_{x=\infty} F\left(\frac{x}{lx}\right) . \frac{lx}{x} = 0.$$

Rovnice (47) se redukuje tudíž na (45).

---

*) lim sup. značí hořejší limitu ve smyslu Canchyově (»la plus grande des limites«, viz Encyclopédie des sciences math. I. 3. 19. aneb Goursat, Cours d'analyse t. I. p. 370).

**) lim inf. značí dolejší limitu ve smyslu Canchyově. Viz předch. poznámku.

22. Asymptotickým zákonem (44) není ovšem vyčerpán obsah formule (43). Kdybychom v (43) podrželi toliko první člen, obdržíme vzhledem k (41) vzorec

$$F(x) \doteq \Sigma \frac{\mu(n)}{n} Li\left(x^{\frac{1}{n}}\right), \tag{48}$$

jenž udává $F(x)$ přesněji než $Li(x)$. K úplně přesnému vyjádření funkce $f(x)$ a tudíž i $F(x)$ jest třeba znáti kořeny $\alpha$ rovnice $\xi(t) = 0$, jak ukazuje formule (43). O rozložení těchto kořenů v rovině $t$, které patrně souvisí s rozdělením prvočísel v přirozené řadě čísel, nebyla však dosud podána přesná theorie; viz odst. 25.

Přes to se však podařilo odhadnouti do jisté míry stupeň přesnosti, s kterou vyjadřuje $Li(x)$ funkci $f(x)$.

Z rovnice (44), kterou možno psáti takto:

$$\lim_{x=\infty} \frac{F(x) - Li(x)}{F(x)} = 0$$

vyplývá, že relativní chyba konverguje k nulle, roste-li $x$ do nekonečna; pro dosti veliká $x$ může se státi absolutní chyba $F(x) - Li(x)$ libovolně malou částí $F(x)$.

Phragmèn omezil řád chyby zdola (*55*, *57*; viz též poznámku v *30*):

Rozdíl $f(x) - Li(x)$ nemůže býti řádu nižšího než $x^{\frac{1}{2}}$. Aby to dokázal, uvažuje Phragmèn integrál

$$\int_\alpha^\infty \left[f(x) - Li(x)\right] x^{-s-1}\, dx, \quad \alpha > 1.$$

Patrně jest

$$\int_\alpha^\infty Li(x) \,.\, x^{-s-1}\, dx = \frac{Li(\alpha)\,\alpha^{-s}}{s} + \frac{1}{s}\int_\alpha^\infty \frac{x^{-s}\, dx}{\log x},$$

$$\int_\alpha^\infty \frac{x^{-s}\, dx}{\log x} = \int_{(s-1)\log\alpha}^\infty \frac{e^{-u}\, du}{u} = -\log(s-1) - \int_{(s-1)\log\alpha}^{\log\alpha} \frac{1-e^{-u}}{u}\, du$$

a tedy

$$\int\limits_{\alpha}^{\infty} Li(x)\, x^{-s-1}\, dx = -\frac{log(s-1)}{s}$$

$$+\frac{1}{s}\left[Li(\alpha)\,\alpha^{-s} - \int\limits_{(s-1)\,log\,\alpha}^{log\,\alpha} \frac{1-e^{u}}{u}\, du - \int\limits_{log\,\alpha}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du\right] {}^{*}). \tag{49}$$

Zavedeme-li v rovnici (32) integrační proměnnou $u$ místo $z$ rovnicí $z = -u$, obdržíme

$$Li\ (\alpha) = \lim_{\delta = 0}\left(-\int\limits_{-log\,\alpha}^{\delta} \frac{e^{-u}\, du}{u} - \int\limits_{\delta}^{log\,\alpha} \frac{e^{-u}\, du}{u}\right) - \int\limits_{log\,\alpha}^{\infty} e^{-u}\, du,\ \delta > 0.$$

Připojíme-li k prvnímu a k druhému integrálu

$$\int\limits_{-log.\alpha}^{-\delta} \frac{du}{u} \text{ resp. } \int\limits_{\delta}^{log\,\alpha} \frac{du}{u},$$

nezmění se nic, poněvadž součet těchto posledních dvou integrálů je roven nulle; vychází

$$Li\,(\alpha) = \lim_{\delta = 0}\left(\int\limits_{-log\,\alpha}^{-\delta} \frac{1-e^{-u}}{u}\, du + \int\limits_{\delta}^{log\,\alpha} \frac{1-e^{-u}}{u}\, du\right) - \int\limits_{log\,\alpha}^{\infty} \frac{e^{-u}\, du}{u}$$

$$= \int\limits_{-log\,\alpha}^{log\,\alpha} \frac{1-e^{-u}}{u}\, du \int\limits_{log\,\alpha}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du.$$

Trojčlen v závorce na pravé straně rovnice (49) představuje celistvou funkci proměnné $s$ a pro $s = 0$ rovná se (vzhledem k poslední rovnici) nulle, tedy

$$\int\limits_{\alpha}^{\infty} Li(x)\, x^{-s-1}\, dx = -\frac{log(s-1)}{s} + \text{celistvá funkce } s.$$

Připojíme-li k této rovnici rovnici (38$a$), máme

$$\int\limits_{\alpha}^{\infty}\Big[f(x) - Li(x)\Big] x^{-s-1}\, dx = -\frac{log\,[(s-1)\,.\,\zeta(s)]}{s} + \text{cel. f. } s.$$

---

*) $x^{-\varrho}$ a $log\,(s-1)$ jsou reální pro $s > 1$.

Kdyby byl rozdíl $f(x) - Li(x)$ řádu $x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$, kde $\varepsilon$ značí libovolně malé kladné číslo, měl by integrál na levé straně platnost pro každé $s$, jehož reální část by byla větší než $\frac{1}{2} - \varepsilon$. To však není možno, poněvadž by logarithmus na pravé straně musil zůstati konečný pro zmíněné hodnoty $s$ (funkce $\zeta(s)$ m totiž dle odst. 10. nullové body, jejichž reální část není menší než $\frac{1}{2}\Big)$.

Phragmèn (*55*; viz též *58*) odvodil též větu, že neexistuje pro proměnnou $x$ žádná mez, nad kterou by výraz

$$f(x) - Li(x) + log\, 2$$

neměnil znamení, a sice uvádí tuto větu jako speciální případ obecnějšího theorému. Landau (*35*) zjednodušil Phragmènovy důkazy.

Řád rozdílu vyšetřoval zcela jinou methodou Vallée-Poussin (*72*), jenž došel k výsledku, že chyba, která vznikne, nahradíme-li funkci $F(x)$ integrallogarithmem $Li(x)$, nemůže býti větší než

$$a\frac{log\, x}{x} e^{-b\sqrt{log\, x}},$$

jsou-li $a$ a $b$ konstanty. Z toho následuje věta, že žádná konečná formule nemůže funkci $F(x)$ lépe nahraditi, než $Li(x)$. Vallée-Poussin důkaz neprovádí; podobnou větu udal už Čebyšev *67*. Viz též Landau *34*.)

O výpočet oscillací funkce $f(x)$ pokusil se též Lorenz (*39*) methodou odlišnou od methody Riemannovy, nedošel však k uspokojujícím výsledkům.

23. Důsledky Riemannovy formule shodují se s direktními výpočty prvočísel, která jsou sestavena v tabulkách až do 9 milionů (Burckhardt *3*, Chernac *8*, Dase *9*, Glaisher *16*). Meissel (*45*) udal zvláštní methodu, kterou lze ustanoviti počet prvočísel v daném intervallu, aniž by bylo třeba každé prvočíslo v tom intervallu zvlášť vypočítati a určil tak počet prvo-

čísel obsažených v prvním stu milionů (*46, 47*) a v první miliardě (*49*).

Dle Meissela jest

$$F(10^9) = 50847478.$$

Meissel opravil též některé chyby v Burckhardtových tabulkách (*48, 49*) a na základě jeho methody podnikl Bertelsen (*18*) rozsáhlou revisi starších tabulek.

Pro pravou stranu rovnice (48) sestavil Gram (*17*) tabulky až do $x = e^{20}$, jakož i pro $e^x$ a $Li(e^x)$ až do $x = 20$. Mimo to sestavil podrobné tabulky pro $F(x)$ až do $x = 10^8$, a tabulku pro srovnání $F(e^x)$ s $Li(e^x)$, pokud $x < 15$.

24. Pravá strana rovnice (43) bývá uváděna v rozličných formách (viz na př. *41* n. *56*). Pro studium funkce $F(x)$, zejména pokud se týče řádu difference $F(x) - Li(x)$, jsou důležité práce Kochovy (*31, 32, 33*). Koch dokázal totiž, že se dá pravá strana formule (43) rozděliti na dvě části:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

tak, že $f_1(x)$ jest řada absolutně a stejnoměrně konvergentní a $f_2(x)$ jest pro všechna $x$ menší, než jistá konstanta. V původní Riemannově formuli (43) není řada integrallogarithmů ani absolutně ani stejnoměrně (představuje funkci $x$ nespojitou) konvergentní; aby konvergovala, musí býti její členy seřaděny dle rostoucích reálních částí kořenů $\alpha$.

Důkazy Kochovy jsou značně dlouhé a nebyly dosud zjednodušeny. Mellin (*50*) poukázal k tomu, jak souvisí Kochova theorie Riemannovy formule s theorií Mangoldtovou.

25. Řád rozdílu $F(x) - Li(x)$ nepodařilo se dosud stanoviti. Přijmeme-li Riemannovu hypothesu, že všechny kořeny rovnice $\xi(t) = 0$ jsou reální, t. j. že všechny komplexní kořeny rovnice $\zeta(s) = 0$ mají reální část $= \frac{1}{2}$, lze dokázati (Koch *31, 32 33*), že jest stále ($k$ . . . konstanta)

$$|F(x) - Li(x)| < k \log x \,.\, \sqrt{x}. \tag{50}$$

Tento výsledek dá se dle Holmgreena (28) odvoditi též z prací Vallèe-Poussinových, které jsou od Kochovy theorie nezávislé (ovšem též za uvedeného předpokladu o kořenech rovnice $\xi(t) = 0$).

Důkaz věty, že všechny kořeny rovnice $\xi(t) = 0$ jsou reální, jenž by ve svých konsekvencích byl důležitý pro theorii funkce $F(x)$, nebyl dosud podán. Že ta věta je asi správná, tomu nasvědčují Gramovy numerické výpočty kořenů rovnice $\zeta(s) = 0$ na přímce r č. $s = \frac{1}{2}$ (odst. 12.)

Stieltjes (26, Lettres à M Leffler; 65) podal velmi zajímavý návod, dle kterého by se snad ta věta dala dokázati. Podle Stieltjesa plyne tato věta z věty, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \tag{51}$$

jest konvergentní, je-li reální část $s$ větší než $\frac{1}{2}$. Neboť kdyby řada skutečně za této podmínky konvergovala, představovala by (Cahen, 5 p. 102) analytickou funkci proměnné $s$ konečnou v části roviny omezené na levo přímkou r. č. $s = \frac{1}{2}$. Tato funkce by však koincidovala pro r. č. $s > 1$ s funkcí $\frac{1}{\zeta(s)}$, jak plyne z Eulerovy rovnice:

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \Pi\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \Sigma \frac{\mu(n)}{n^s};$$

řada (51) by tudíž pro r. č. $s > \frac{1}{2}$ představovala funkci $\frac{1}{\zeta(s)}$. Je-li r. č. $s > \frac{1}{2}$, nemůže se dle toho $\zeta(s)$ rovnati nulle. Žádný komplexní nullový bod $s_0$ funkce $\zeta(s)$ nemůže však také býti na levo od přímky r. č. $s = \frac{1}{2}$, poněvadž by bod $1 - s_0$, jenž jest na pravo od téže přímky, rovněž musil býti nullovým bodem. Zbývá tedy jediná možnost, že všechny komplexní nullové body funkce $\zeta(s)$ leží na té přímce.

Konvergenci řady (51) pro $s = 1$, t. j. rovnici

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0,$$

dokázali Mangoldt (*42*) a Valèe-Poussin (*72*) různými methodami. Důkaz, že řada (51) konverguje ještě, je-li r. č. $s > \frac{1}{2}$, redukuje Stieltjes (4[me] lettre à M. Leffler, *26*) na větu, že

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{n=1}^{m} \mu(n)$$

zůstává v konečných mezích pro libovolně veliké $m$. Kdyby se podařilo dokázati tuto větu, byla by dokázána Riemannova hypothesa, že všechny kořeny rovnice $\xi(t) = 0$ jsou reálné, i Kochova věta (50).

---

## Literatura.

V následujícím seznamu jsou uvedeny citované spisy a několik prací (*1, 6, 12, 13, 15, 17, 53, 54, 59, 62, 63, 68, 73, 75*), které obsahují kommentáře k Riemannovu pojednání *61*. Velké pojednání Torelliovo (*68*) podává výborný přehled všech prací z theorie prvočísel (nejen ve směru Riemannově) až do r. 1902.

Do seznamu nejsou pojaty práce z blízkých oborů (vlastnosti funkce $F(x)$ na základě jiných theorií; rozdělení prvočísel v arithm. řadách a asymptotické vzorce pro počet primideálů; theorie funkcí, jež vznikají generalisací funkce $\zeta(s)$; theorie integrallogarithmu a j.), pokud se nevztahují bezprostředně k Riemannově theorii funkce $F(x)$.

*1.* *Bachmann P.* Die analytische Zahlentheorie. Lipsko, 1894.

*2.* *Borel E.* Leçons sur les fonctions entières. Paříž, 1900.

*3.* *Burckhardt J. Ch.* Tables des diviseurs pour tous les nombres des 1[er], 2[e] et 3[e] million. Paříž, 1814—1817.

*4.* *Cahen E.* Sur la somme des logarithmes des nombres premiers qui ne dépassent pas $x$. Comptes Rendus t. 116. ($1893_{\mathrm{I}}$) p. 85—88.

*5.* — Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et sur les fonctions analogues. Ann. de l'Ec. Norm. Sup. 3[me] sér. t. 11. (1894) p. 75—161.

6. *Cantor G.* Zur Theorie der zahlentheoretischen Functionen. Göttinger Nachr., 1880 p. 161—169 = Math. Ann. Bd. 16. (1880) p. 583—588.

7. *Cauchy A. L.* Sur les fonctions réciproques. Anciens exercices IIe année (1827); Oeuvres 2. sér. t. 7. p. 177—194.

*Čebyšev P. L.* viz *67.*

8. *Chernac L.* Cribrum arithmeticum. Daventry, 1811.

9. *Dase Z.* Factoren-Tafeln für alle Zahlen der siebenten, achten, neunten Million. Hamburk, 1862, 1863, 1865.

10. *Dirichlet G. L.* Werke Bd. I. Druhá poznámka na str. 372. (1838).

11. *Euler L.* Introductio in Analysin infinitorum T. I. cap. 15. Lausanne, 1748.

12. *Franel J.* Sur la fonction $\xi(t)$ de Riemann et son application à l'arithmétique. Vierteljahrsschrift d. naturf. Ges. in Zürich Bd. 41. 2. T. (1896) p. 7—19.

13. — Sur une formule de Riemann et son application à l'arithmétique. Curich, 1896.

14. *Gauss C. F.* Brief an Encke. Werke Bd. 2. p. 444—447 (1849).

15. *Genocchi.* Formola per determinare quanti siano i numeri primi fino ad un dato limite. Annali di mat. t. 3. (1860) p. 52—59.

16. *Glaisher J.* Factor table for the fourth, fifth, sixth Million. Londýn, 1879, 1880, 1883.

17. *Gram J. P.* Undersögelser angaaende Maengden af Primtal under en given Graense*). Det kong. Danske Videnskab. Selsk. Skrifter. Naturv. og mat. Afd. Kodaň, 6. ser. 2. sv. (1884) p. 185—308.

18. — Rapport sur quelques calculs entrepris par M. Bertelsen et concernant les nombres premiers. Acta math. t. 17. (1893) p. 301—314.

19. — Note sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. Oversigt over det Kong. Danske Videnskab. Selskabs Forh. Kodaň, (1902) p. 3—16.

20. — Note sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. Acta math. t. 27. (1903) p. 289—304.

21. *Hadamard J.* Etude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann. Journ. de math. 4me sér. t. 9. (1893) p. 171—215.

22. — Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. Comptes Rendus t. 122. ($1896_I$) p. 1470—1473.

---

*) S francouzským výtahem.

23. — Sur la fonction $\zeta(s)$. C. R. t. 123. ($1896_{II}$) p. 93.

24. — Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques. Bull. de la soc. math. de France t. 24. (1896) p. 199—220.

25. *Hermite Ch.* Note au sujet de la communication de M. Stieltjes »sur une fonction uniforme«. C. R. t. 101. ($1885_{II}$) p. 112—115.

26. — Correspondance d'Hermite et de Stieltjes. Paříž, T. I. (Lettres 1 - 226) 1905, T. II. (Lettres 227—432; 4 lettres de Stieltjes à Mittag-Leffler) 1905.

27. *Hilbert D.* Sur les problèmes futurs des Mathématiques. Compte rendu du 2ième congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900. Paříž, 1902 p. 58—114.

28. *Holmgreen E.* Un primtalens fördeling. Öfversigt af kongl. vetenskaps akad. Förh. Stockholm, t. 59. (1902) p. 221—225

29. *Jensen J. L. W. V.* Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. C. R. t. 104. ($1887_{I}$) p. 1156—1159.

30. *Koch H. von.* Sur la distribution des nombres premiers. C. R. t. 130. ($1900_{I}$) p. 1243—1246.

31. — Sur la distribution des nombres premiers. Compte rendu du deuxième congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900. Paříž, 1902, p. 195—198.

32. — Sur la distribution des nombres premiers. Acta math. t. 24. (1901) p. 159—182. — Článek téhož názvu i obsahu jest v Öfversigt. of kongl. Svenska Vetenskaps Ak. Förh. Stockholm t. 57. (1900) p. 669—674.

33. — Über die Riemann'sche Primzahlfunction. Math. Ann. Bd. 55. (1902) p. 441—464.

34. *Landau E.* Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes. M. Ann. Bd. 56. (1903) p. 645—670.

35. — Über einen Satz von Tschebyscheff. Math. Ann. Bd. 61. (1905) p. 527—550.

36. — Neuer Beweis der Riemann'schen Primzahlformel. Sitzb. d. kön. preuss. Ak. d. Wiss. $1908_{II}$ p. 737—745.

37. — Zwei neue Herleitungen für die asymptotische Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze. Sitzb. d. kön. preuss. Ak. d. Wiss. $1908_{II}$ p. 746—764.

38. *Lindelöf L.* Sur une formule sommatoire générale. Acta math. t. 27. (1903) p. 305—312.

39. *Lorenz L.* Analytiske Undersögelser over Primtalmängderne. Det Kong. Danske Videnskab. Selsk. Skrifter. Naturv. oq mat. Afd. Kodaň, 6. ser. 5. sv. (1891) p. 427—450.

40. *Mangoldt H. von.* Auszug aus einer Arbeit unter dem Titel: Zu Riemann's Abh. »Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegeb. Grenze.« Sitzb. d. kön. preuss. Ak. d. Wiss. 1894, p. 883—896.

— Extrait d'un travail etc. Traduit par M. Laugel. Ann. d'Ec. Norm. Sup. 3me sér. t. 13. (1896) p. 61—78. (Překlad předešlého.)

41. — Zu Riemann's Abhandlung »Über die Anzahl etc.« Journ. für Math. Bd. 114. (1895) p. 258—305.

42. — Beweis der Gleichung $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0$. Sitzb. d. kön. preuss. Ak. d. Wiss. 1897, p. 835—852.

— Démonstration etc. Traduit par M. Laugel. Ann. d'Ec. Norm. Sup. 3me sér. t. 15. (1898) p. 431—454. (Překlad předešlého.)

43. — Über eine Anwendung der Riemann'schen Formel über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze. Journ. für Math. Bd. 119. (1898) p. 65—71.

44. — Zur Verteilung der Nullstellen der Riemann'schen Function $\xi(t)$. Math. Ann. Bd. 60. (1905) p. 1—19.

45. *Meissel E.* Ueber die Bestimmung der Primzahlmengen innerhalb gegebener Grenzen. Math. Ann. Bd. 2. (1870) p. 636—642.

46. — Berechnung der Menge von Primzahlen, welche innerhalb der ersten Hundert Millionen natürlicher Zahlen vorkommen. Math. Ann. Bd. 3. (1871) p. 523—525.

47. — Über Primzahlmengen. Math. Ann. Bd. 21. (1883) p. 304.

48. — Ueber einige Fehler der Burckhardt'schen Factortafeln. Math. Ann. Bd. 23. (1884) p. 600.

49. — Berechnung der Menge von Primzahlen, welche innerhalb der ersten Milliarde natürlicher Zahlen vorkommen. Math. Ann. Bd. 25. (1885) p. 251—257.

50. *Mellin Hj.* Die Dirichlet'schen Reihen, die zahlentheoretischen Functionen und die unendlichen Produkte von endlichem Geschlecht. Acta math. t. 28. (1904) p. 37—64.

51. *Möbius A. F.* Über eine besondere Art von Umkehrung von Reihen. Journ. für Math. Bd. 9. (1832) p. 105—123.

52. *Nielsen N.* Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transcendenten. Lipsko, 1906.

53. *Oppermann L.* Om vor Kundskab om Primtallenes Mongde mellem givne Grändser. Oversigt over d. Kong. Danske Videnskab. Selskabs Forh., Kodaň. (1882) p. 169—179.

54. *Petersen J.* Vorlesungen über Funktionstheorie. Kodaň, 1898.

55. *Phragmén E.* Sur le logarithme intégral et la fonction $f(x)$ de Riemann. Öfversigt af kongl. vetenskaps akademiens Förhandlingar. Stockholm, t. 48. (1891) p. 599—616.

56. — Über die Berechnung der einzelnen Glieder der Riemann'schen Primzahlformel. Ibid. p. 721—744.

57. — Sur la distribution des nombres premiers. C. R. t. 114. ($1892_I$) p. 337—340.

58. — Sur une loi de symétrie relative à certaines formules asymptotiques. Öfversigt af kongl. vet. ak. Förh. Stockholm, t. 58. (1901) p. 189-202.

59. *Piltz A.* Über die Häufigkeit der Primzahlen in arithmetischen Progressionen und über verwandte Gesetze. Dissert. Jena, 1884.

60. *Poisson D. S.* Suite du Mémoire sur les intégrales définies et sur la sommation des séries. Journ. d'Ecole polytechn. cah. 19. (1823) p. 404—509.

61. *Riemann B.* Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. Monatsb. d. Berl. Ak. 1859 (November) = Ges. Werke 1. Ausg. p. 136—144. = Ges. Werke 2. Ausg. p. 145—153.

62. *Schaper H. von.* Über die Theorie der Hadamard'schen Functionen und ihre Anwendung auf das Problem der Primzahlen. Dissert., Göttinky, 1898.

63 *Scheibner W.* Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer beliebigen Grenze. Zeitschr. f. Math. Bd. 5. (1860) p. 233—252.

64. *Schou E.* Sur la théorie des fonctions entières. C. R. t. 125. ($1897_{II}$) p. 763—764.

65. *Stieltjes T. J.* Sur une fonction uniforme. C. R. t. 101. ($1885_{II}$) p. 153—154.

— viz *Hermite.*

66. — Sur le développement de log $\Gamma(s)$. Journ. de math. 4e sér. t. 5. (1889) p. 425—444.

67. *Tchebichef (Čebyšev P. L).* Sur la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée (présenté à l'Acad. imp. de Saint-Pétersbourg en 1848). Journal de mathém. t. 17. (1852) p. 341—365.

68. *Torelli G.* Sulla totalità dei numeri primi fino ad un limite assegnato. Atti della reale acc. delle sc. fis. e mat. di Napoli. 2. ser. t. 11. (1902) p. 1—222.

69. *Vallée-Poussin Ch., de la.* Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers, 1e partie. Annales de la soc. scientif. de Bruxelles. 20me année 1895—1896, p. 183—256.

70. — Sur la théorie des nombres premiers. Verhandlungen des ersten internat. Mathematiker-Kongresses in Zürich vom 9. bis 11. August 1897. Lipsko, 1898 p. 194—195.

71. — Výňatek z dopisu H. v. Mangoldtovi. Journal für Math. Bd. 119. (1898) p. 70.

72. — Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée. Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Acad. royale de Belgique T. 59. Brussel, 1899.

73. *Vecchi.* Sulla funzione $\zeta(s)$ die Riemann. Paříž, 1899.

74. *Vivanti G.* - *Gutzmer A.* Theorie der eindeutigen analytischen Functionen. Lipsko, 1906.

75. *Williot V.* Étude sur les nombres premiers. Paříž, 1905.

Doplňky:

76. *Halphen G.* Sur l'approximation des fonctions numériques. C R. t. 96. ($1883_I$) p. 634—637.

77. *Landau E.* Der Integrallogarithmus und die Zahlentheorie. Bemerkungen zu dem gleichnamigen § 39. in H. Nielsen's »Theorie des Integrall. und verw. Transcendenten«. Rendiconti del Circolo mat. di Palermo. T. 33. (1907) p. 126—129.

---

**Poznámka:** Rukopis tohoto článku byl ukončen v listopadu 1908. Není zde tudíž zmínky o novém velikém díle Landauově (Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen), o němž budu v »Časopise« referovati.

*Bohuslav Hostinský.*

---