Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Matyáš Lerch

Příspěvek k elementarné theorii elliptických integrálů. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 17 (1888), No. 4, 145--158

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121170

Příspěvky k elementarné theorii elliptických integrálů.

Píše

Matyáš Lerch,

docent české vysoké školy technické v Praze

(Dokončení.)

Pozn. Budeme nazývati veličiny $e_\varkappa$ *normalnými kořeny* funkce $R(x)$, funkci $4z^3 - g_2 z - g_3$ *normalným* její *tvarem*.

2. Vyšetřme nyní, jak souvisejí normalné kořeny $e_\varkappa^*$ funkce $R\left(\frac{ax'+b}{cx'+d}\right)(cx'+d)^2$ s normalnými kořeny $e_\varkappa$ funkce $R(x)$, z níž vznikne ona linearnou transformací.

Ano tu platí

$$x = \frac{ax'+b}{cx'+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx'+d)},$$

takže lze klásti

$$x = m + ny, \quad y = \frac{1}{t}, \quad t = cx'+d,$$

kde znamenáno

$$m = \frac{a}{c}, \quad n = \frac{bc-ad}{c},$$

bude lze řešiti problém tím, že ustanovíme vztah mezi normalnými kořeny funkce $R(x)$ a normalnými kořeny $e'_\varkappa$ funkce $R(m+ny)$, pak vztah mezi $e'_\varkappa$ a normalnými kořeny $e''_\varkappa$ funkce $R\left(m + n\frac{1}{t}\right) . t^4$, a posléz vztah mezi $e''_\varkappa$ a normalnými kořeny $e^*_\varkappa$ funkce

$$R\left(m + \frac{n}{cx'+d}\right)(cx'+d)^4.$$

Uvážímeli, že při $R(m+ny) = S(y)$ bude

$$R\left(m + n\frac{1}{t}\right) = S\left(\frac{1}{t}\right),$$

a při $S\left(\frac{1}{t}\right)t^4 = T(t)$ pak $R\left(m+\frac{n}{c'x+d}\right)(cx'+d)^4 = T(cx'+d)$, pak shledáme, že stačí tu vyšetřiti vztah mezi normalnými kořeny funkcí $\overline{R}(x)$, $\overline{R}(m+nx)$, $\overline{R}\left(\frac{1}{x}\right)x^4$.

Klademeli do rovnice

$$R(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)$$

hodnotu

$$x = m + ny,$$

bude

$$R(m+ny) = a_0 n^4 (y-\beta_1)(y-\beta_2)(y-\beta_3)(y-\beta_4),$$

kde

$$\beta_\varkappa = \frac{\alpha_\varkappa - m}{n}, \quad (\varkappa = 1, 2, 3, 4).$$

Normalné kořeny $e'_\varkappa$ funkce $R(m+ny)$ ustanoví se dle (5), t. j.

$$-\frac{4e'_1}{a_0 n^4} = \beta_1\beta_4 + \beta_2\beta_3 - \frac{1}{3}\sum_{\mu<\nu\leqq 4}\beta_\mu\beta_\nu$$

čili

$$-\frac{4e'_1}{a_0 n^2} = (\alpha_1 - m)(\alpha_4 - m) + (\alpha_2 - m)(\alpha_3 - m)$$
$$-\frac{1}{3}\sum_{\mu,\nu}(\alpha_\mu - m)(\alpha_\nu - m).$$

Poněvadž tu

$$\sum(\alpha_\mu - m)(\alpha_\nu - m) = \sum\alpha_\mu\alpha_\nu - 3m\sum\alpha_\varkappa + 6m^2,$$

bude

$$-\frac{4e'_1}{a_0 n^2} = \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 - \frac{1}{3}\mathfrak{f}_2 = -\frac{4e_1}{a_0},$$

takže platí

$$e'_1 = n^2 e_1,$$

a podobně

$$e'_2 = n^2 e_2, \quad e'_3 = n^2 e_3.$$

Položímeli však $x = \frac{1}{y}$, máme

$$R\left(\frac{1}{y}\right)y^4 = a_0\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\left(y-\frac{1}{\alpha_1}\right)\left(y-\frac{1}{\alpha_2}\right)\left(y-\frac{1}{\alpha_3}\right)\left(y-\frac{1}{\alpha_4}\right)$$
$$= a_4\left(y-\frac{1}{\alpha_1}\right)\left(y-\frac{1}{\alpha_2}\right)\left(y-\frac{1}{\alpha_3}\right)\left(y-\frac{1}{\alpha_4}\right),$$

a tedy dle (5) bude normalný kořen e_1' funkce $R\left(\frac{1}{y}\right)y^4$ dán rovnicí

$$-\frac{4e_1'}{a_4} = \frac{1}{\alpha_1\alpha_4} + \frac{1}{\alpha_2\alpha_3} - \frac{1}{3}\sum\frac{1}{\alpha_\mu\,\alpha_\nu},$$

a odtud

$$-\frac{4e_1'}{a_0} = \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 - \frac{1}{3}\sum\frac{1}{\alpha_\mu\alpha_\nu} = -\frac{4e_1}{a_0},$$

takže pak

$$e_1' = e_1, \quad e_2' = e_2, \quad e_3' = e_3$$

jsou společné normalné kořeny funkcí $R(x)$, $R\left(\frac{1}{x}\right)x^4$.

Spojením těchto vět nacházíme, že *normalné kořeny funkce* $R\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)(cx+d)^4$ jsou

$$e_\varkappa^* = (ad-bc)^2 e_\varkappa, \quad (\varkappa = 1, 2, 3),$$

a jim odpovídající součinitelé tvaru normalního:

$$g_2^* = (ad-bc)^4 g_2, \quad g_3^* = (ad-bc)^6 g_3.$$

O funkci čili formě $R\left(\frac{ax'+b}{cx'+d}\right)(cx+d)^4 = R^*(x)$ pravíme, že vznikla z formy $R(x)$ linearnou tranformací

$$x = \frac{ax'+b}{cx'+d},$$

jejíž determinant jest

$$ad - bc.$$

Znamenámeli a_0^*, a_1^*, ... a_4^* součinitele formy $R^*(x)$, pak bude g_2^* i g_3^* celistvou racionalnou funkcí veličin $a_\varkappa^*$, která vznikne z g_2, resp. g_3, nahradímeli $a_\varkappa$ veličinami $a_\varkappa^*$. V theorii forem zovou se takové racionalné funkce koefficientů, které se přechodem k formě linearnou transformací odvozené reprodukují až na jistou mocnosť determinantu, t. j. kde

$$\varphi(a_0^*, a_1^*, \ldots a_4^*) = (ad-bc)^\mu\,\varphi(a_0, a_1, \ldots a_4),$$

racionalnými invarianty stupně μ.

Funkce g_2 a g_3 jsou tedy racionalné invarianty stupně 4., resp. 6. Rozšířímeli tento pojem i na funkce irracionalné, pak jsou e_1, e_2, e_3 *irracionalné invarianty* funkce $R(x)$, a sice stupně druhého.

Invarianty stupně nulla nemění se přechodem k formě odvozené, t. j. platí

$$\varphi(a_0^*, a_1^*, \ldots a_4^*) = \varphi(a_0, a_1, \ldots a_4);$$

i zoveme je *invarianty absolutními.*

Takovými jsou funkce $\frac{g_2^3}{g_3^2}$, $\frac{e_1}{e_2}$ a pod.

3. Linearný vztah

$$x = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} \tag{1}$$

závisí na třech stálých (poměrech koefficientů α, β, γ, δ), a bude tedy udáním tří párů hodnot sobě odpovídajících určen.

Znamenámeli totiž

$$x' = \frac{x - x_1}{x - x_2}, \quad t' = \frac{t - t_1}{t - t_2},$$

kde (x_1, t_1), (x_2, t_2) hoví relaci (1), obdržíme odtud x jakožto linearnou funkci x', t jako lin. funkci t', čehož dosazením do (1) vznikne vztah tvaru:

$$ax't' + bx' + ct' + d = 0,$$

aneb

$$x' = -\frac{ct' + d}{at' + b}.$$

Hodnotě $t' = 0$ odpovídá $t = t_1$, tedy $x = x_1$, následovně $x' = 0$, z čehož plyne $d = 0$. Hodnotě $t' = \infty$ přísluší pak též $x' = \infty$ z příčin podobných a proto musí $a = 0$, takže máme

$$x' = -\frac{c}{b} t'$$

čili

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = \alpha \cdot \frac{t - t_1}{t - t_2}.$$

Abychom určili stálou α, volme kterýkoli pár (x_3, t_3) hovící rovnici (1) a tedy také poslední, načež obdržíme vyloučením α vztah:

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} : \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{t - t_1}{t - t_2} : \frac{t_3 - t_1}{t_3 - t_2}, \tag{1^a}$$

jakožto nutnou a zároveň dostačující podmínku, aby veličiny x, t souvisely linearným vztahem daným třemi páry

$$(x_\varkappa,\, t_\varkappa;\ \varkappa = 1, 2, 3).$$

Poměr $\dfrac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}$ budeme znamenati $(x_1 x_2 x_3)$, tedy též

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = (x_1 x_2 x), \text{ a podíl}$$

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} : \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{(x_1 x_2 x)}{(x_1 x_2 x_3)} = (x_1\, x_2\, x\, x_3)$$

budeme nazývati *dvojpoměrem* čtyř prvků $x_1\, x_2\, x\, x_3$. Podmínku (1^a) píšeme pak v této symbolice:

$$(x_1\, x_2\, x_3\, x) = (t_1\, t_2\, t_3\, t).$$

Jeli $R(x) = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4$ celistvá funkce stupně čtvrtého neb (pro $a_0 = 0$) třetího o kořenech $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4$ (resp. $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \infty$)*), bude dvojpoměr

$$\sigma = (\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4) = \frac{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_2)}{(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_1)}$$

algebraickou funkcí veličin $a_0\, a_1 \ldots a_4$, a sice dle (5)

$$(2) \quad \sigma = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4 - (\alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3)}{\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2 - (\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4)} = \frac{e_1 - e_3}{e_2 - e_3} = (e_1 e_2 e_3),$$

takže σ jest *absolutní invariant* irracionalný formy $R(x)$. Tento výraz pro σ plyne bezprostředně odtud, že veličiny $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ a resp. $e_1 e_2 e_3 \infty$ souvisejí linearným vztahem (4) §. 1, takže musí dle posledních úvah:

$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4) = (e_1 e_2 e_3 \infty) = (e_1 e_2 e_3).$$

Veličiny $e_1 e_2 e_3$ jsou definovány jakožto sdružené hodnoty algebraické funkce dané rovnicí

$$(3) \qquad 4\varepsilon^3 - g_2\varepsilon - g_3 = 0,$$

a proto lze σ považovati za algebraickou funkci invariantů g_2, g_3, které možno pokládati za neodvisle proměnné, an jimi nevládne žádný vztah neodvislý od koefficientů a (neboť můžeme utvořiti formy R, kde g_2, g_3 jsou předepsány). Veličina $\sigma = \dfrac{e_1 - e_3}{e_2 - e_3}$ má jako irracionalná funkce proměnných g_2, g_3 šest různých hodnot sdružených

*) Úmluvou pokládáme $x = \infty$ za kořen rovnice kubické považované za rovnici stupně 4., v níž $a_0 = 0$.

$$(e_1e_2e_3) = \sigma, \quad (e_2e_3e_1) = 1 - \frac{1}{\sigma}, \quad (e_3e_1e_2) = \frac{1}{1-\sigma}$$

$$(e_1e_3e_2) = 1 - \sigma, \quad (e_2e_1e_3) = \frac{1}{\sigma}, \quad (e_3e_2e_1) = \frac{\sigma}{\sigma - 1},$$

a tudíž může pokládána býti za *galoisovskou resolventu**) rovnice (3), t. j. za veličinu, kterou se dají kořeny $e_1e_2e_3$ racionalně vyjádřiti, což tuto chceme provésti.

Násobením rovnic

$$\frac{e_1 - e_3}{e_2 - e_3} = \sigma, \quad \frac{e_1 - e_2}{e_2 - e_3} = \sigma - 1$$

máme

$$\sigma(\sigma - 1) = \frac{(e_1 - e_3)(e_1 - e_2)}{(e_2 - e_3)^2} = \frac{(e_1 + e_3)(e_1 + e_2) - 2e_1(e_2 + e_3)}{(e_2 + e_3)^2 - 4e_2e_3},$$

tedy vůči vztahu

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

$$\sigma^2 - \sigma = \frac{e_2e_3 + 2e_1^2}{e_1^2 - 4e_2e_3} = \frac{g_3 + 8e_1^3}{4e_1^3 - 4g_3} = 2 + 9 \cdot \frac{g_3}{g_2e_1 - 3g_3},$$

kde užito rovnice $4e_1e_2e_3 = g_3$, $4e_1^3 = g_2e_1 + g_3$ (dle rov. (3)).

Odtud obdržíme

$$e_1 = 3 \cdot \frac{g_3}{g_2} \frac{\sigma^2 - \sigma + 1}{\sigma^2 - \sigma - 2} = 3 \cdot \frac{g_3}{g_2} \frac{\sigma^2 - \sigma + 1}{(\sigma - 2)(\sigma + 1)}.$$

Klademeli sem za σ hodotu

$$\sigma' = (e_2e_1e_3) = \frac{1}{\sigma},$$

resp.

$$\sigma'' = (e_3e_1e_2) = \frac{1}{1-\sigma},$$

obdržíme soustavu rovnic:

$$(4) \qquad \begin{cases} e_1 = 3 \cdot \dfrac{g_3}{g_2} \cdot \dfrac{\sigma^2 - \sigma + 1}{(\sigma - 2)(\sigma + 1)} \\ e_2 = -\frac{3}{2} \cdot \dfrac{g_3}{g_2} \cdot \dfrac{\sigma^2 - \sigma + 1}{(\sigma - \frac{1}{2})(\sigma + 1)} \\ e_3 = -\frac{3}{2} \cdot \dfrac{g_3}{g_2} \cdot \dfrac{\sigma^2 - \sigma + 1}{(\sigma - \frac{1}{2})(\sigma - 2)}, \end{cases}$$

kterými dosaženo hledaného racionalného vyjádření veličin $e_\varkappa$ dvojpoměrem σ.

---

*) Nazvanou dle nejgenialnějšího algebristy *Evarista Galoisa*.

Násobením jich obdržíme:

$$(5)\qquad \frac{g_2^3}{g_3^2} = 27 \cdot \frac{(\sigma^2 - \sigma + 1)^3}{(\sigma - \frac{1}{2})^2(\sigma - 2)^2(\sigma + 1)^2},$$

kde levá strana je racionalný absolutní invariant formy $R(x)$; rovnice ta je vůči σ stupně 6., a má kořeny

$$(6)\qquad \sigma,\ 1 - \frac{1}{\sigma},\ \frac{1}{1-\sigma},\ \frac{1}{\sigma},\ 1 - \sigma,\ \frac{\sigma}{\sigma - 1}.$$

Všechny souměrné funkce těchto kořenů dají se vyjádřiti jako racionalné funkce absolutního invariantu $\frac{g_2^3}{g_3^2}$. Neboť odstranímeli v (5) jmenovatele a vynásobímeli, obdržíme rovnici stupně 6., jejíž součinitelé obsahují linearně invariant $\frac{g_2^3}{g_3^2}$, při čemž vyskytují se vedlé toho pouze celistvá čísla a čtvrtiny jakožto součinitelé.

Absolutní invariant $\frac{g_2^3}{g_3^2}$ je racionalnou funkcí proměnné σ, která obdrží tutéž hodnotu, dosadímeli za σ kteroukoli z ostatních hodnot řady (6). Každá z ostatních racionalných funkcí $F(\sigma)$, která má pro všecky hodnoty argumentu obsažené v řadě (6) společnou hodnotu, má vlastnosť

$$6F(\sigma) = F(\sigma) + F\left(\frac{1}{\sigma}\right) + F(1-\sigma) + F\left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) + F\left(\frac{1}{1-\sigma}\right) + F\left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right),$$

a je tedy souměrnou funkcí veličin (6), a jako takovou lze ji vyjádřiti jakožto racionalnou funkci invariantu $\frac{g_2^3}{g_3^2}$.

„*Každou racionalnou funkci* $F(\sigma)$ *proměnné* σ *hovící rovnicím*

$$F(\sigma) = F(1-\sigma) = F\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

lze vyjádřiti jako racionalnou funkci absolutního invariantu

$$\frac{27(\sigma^2 - \sigma + 1)^3}{(\sigma - \frac{1}{2})^2(\sigma - 2)^2(\sigma + 1)^2}.$$

Neboť hovíli funkce zmíněným třem rovnicím, hoví též rovnicím dalším:

$$F(1-\sigma)=F\left(\frac{1}{1-\sigma}\right)=F\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)=F\left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right).$$

4. Diskriminantem formy

$$4z^3-g_2z-g_3$$

zoveme součin

(1) $$\Delta=16(e_1-e_2)^2(e_1-e_3)^2(e_2-e_3)^2,$$

jenž je patrně celistvá souměrná funkce veličin e, a dá se tedy vyjádřiti jako celistvá funkce veličin g_2, g_3. Poněvadž je součinem tří (irracionalných) invariantů $(e_\varkappa-e_\lambda)^2$ stupně 4., bude invariantem stupně 12., a sice racionalným; poněvadž je celistvou funkcí veličin g_2, g_3, bude lze Δ vyjádřiti jako polynom, jehož každý člen jest invariantem stupně 12., členy ty musí býti tvaru $cg_2^\lambda g_3^\mu$, kde c je číselný činitel, a kde $4\lambda+6\mu=12$, tedy budou členy ty: $(\lambda,\mu)=(3,0)$, $(0,2)$, t. j. bude

$$\Delta=cg_2^3+dg_3^2.$$

Veličina

$$\frac{\Delta}{g_3^2}=d+c\,.\frac{g_2^3}{g_3^2}=d+27c\,.\frac{(\sigma^2-\sigma+1)^3}{(\sigma-\frac{1}{2})^2(\sigma-2)^2(\sigma+1)^2}$$

bude tedy racionalným absolutním invariantem.

Volímeli $e_1=e_3$, bude $\Delta=0$, $\sigma=0$, tudíž

$$0=d+27\,c,$$

takže bude

$$d=-27\,c,$$

$$\Delta=c(g_2^3-27\,g_3^2).$$

Pro $e_3=0$, $e_1=-e_2=1$ bude $g_3=0$, $g_2=4$, $\Delta=16.4$, a tedy máme dosazením těchto hodnot: $c=1$, takže posléz:

(2) $$\Delta=g_2^3-27\,g_3^2.$$

Dělímeli Δ na $(e_2-e_3)^6$, obdržíme z (1):

(α) $$\Delta=16\,.(e_2-e_3)^6\,.\,\sigma^2(1-\sigma)^2.$$

Veličina

(β) $$A(\sigma)=\frac{\sigma^2(1-\sigma)^2}{(\sigma^2-\sigma+1)^3}$$

hoví rovnicím

$$A(\sigma)=A(1-\sigma)=A\left(\frac{1}{\sigma}\right),$$

a proto se dá vyjádřiti jako racionalná funkce invariantu $g=\frac{g_2^3}{27\,g_3^2}$; poněvadž ale rovnice ($\beta$) je stupně 6., odpovídá každému A (σ) celkem 6 hodnot σ, jež jsou udány v řadě (6) §. 3. Následkem toho odpovídá každému A pouze jedna hodnota g, a proto bude vztah mezi A, g linearný, t. j.

$$A = \frac{\alpha g + \beta}{\gamma g + \delta}.$$

Pro $\sigma = 0$ máme $A = 0$, $g = 1$, takže musí $\beta = -\alpha$. Zmizíli $\sigma^2 - \sigma + 1$, bude $g = 0$, $A = \infty$, a tedy $\delta = 0$, takže

$$A = \frac{\alpha}{\gamma}\left(1 - \frac{1}{g}\right) = \frac{\alpha}{\gamma}\left(1 - \frac{27\, g_3^2}{g_2^3}\right),$$

kde $\frac{\alpha}{\gamma}$ je číselná stálá. Pro $\sigma = -1$ zmizí patrně $\frac{g_3^2}{g_2^3}$, A pak má hodnotu $\frac{4}{27}$, takže nacházíme $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{4}{27}$, a tedy

$$A(\sigma) = \frac{4}{27}\left(1 - 27\frac{g_3^2}{g_2^3}\right) = \frac{4}{27} \cdot \frac{\Delta}{g_2^3},$$

aneb

$$\frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{4(\sigma^2 - \sigma + 1)^3}{27\,\sigma^2(\sigma - 1)^2} = J(\sigma), \tag{3}$$

kterýžto výraz budeme nadále nazývati výhradně *normálným invariantem absolutním;* o něm platí totéž, co řečeno o absolutním invariantu $\frac{g_2^3}{g_3^2}$.

Násobímeli rovici (α) rovnicí (3), máme:

$$g_2^3 = \frac{64}{27}(e_2 - e_3)^6(\sigma^2 - \sigma + 1)^3 \tag{γ}$$

a odtud pomocí rovnice (5) §. 3:

$$g_3^2 = \frac{64}{27^2}(e_2 - e_3)^6(\sigma - \tfrac{1}{2})^2(\sigma - 2)^2(\sigma + 1)^2, \tag{δ}$$

kteréžto vzorce poskytují srovnalosť:

$$g_2^3 : g_3^2 : \Delta = 27(\sigma^2 - \sigma + 1)^3 : (\sigma - \tfrac{1}{2})^2(\sigma - 2)^2(\sigma + 1)^2 : \frac{27^2}{4}\sigma^2(1 - \sigma)^2. \tag{ε}$$

Odtud máme vůči rovnici (2)

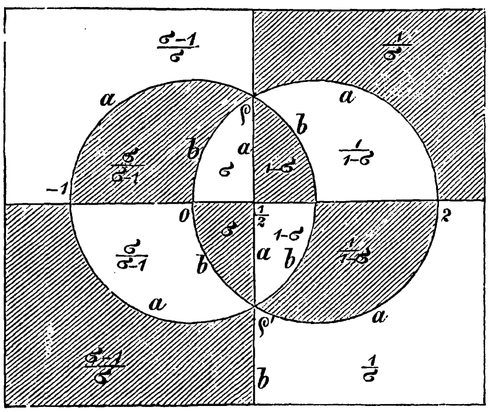
$$J = \frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{4}{27}\frac{(\sigma^2 - \sigma + 1)^3}{\sigma^2(1 - \sigma)^2} \tag{3}$$

$$J - 1 = \frac{27 g_3^2}{\Delta} = \frac{(1 - 2\sigma)^2(\sigma - 2)^2(\sigma + 1)^2}{27\,\sigma^2(1 - \sigma)^2}. \tag{3^a}$$

5. Jelikož má funkce $J(\sigma)$ na místech

$$(1)\qquad \sigma,\ 1-\sigma,\ \frac{1}{\sigma},\ 1-\frac{1}{\sigma},\ \frac{1}{1-\sigma},\ \frac{\sigma}{\sigma-1}$$

stejné hodnoty, stačí σ omeziti na obor daný (obr. 1.) úsečí kruhu $0\,\varrho'\,\frac{1}{2}\,\varrho\,0$, poněvadž probíháli σ tento obor, probíhá ostatních pět veličin řady (1) každá svůj zvláštní obor, a všecky tyto části roviny pokryjí celou rovinu úplně a to pouze jednoduše, takže pak každý bod roviny nalezá se buď na mezi dvou takých oborů, aneb uvnitř jediného z nich.



Obr. 1.

Obrazec 1. sestrojen je následovně: Ze středů $\sigma=0$ a $\sigma=1$ opsány kruhy poloměru 1, které se protnou ve dvou bodech ϱ, ϱ', jež odpovídají kořenům rovnice $\varrho^2-\varrho+1=0$, t. j. v bodech $\varrho=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}$, $\varrho'=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}$. Vedemeli pak přímku $\varrho\varrho'$, vznikne kruhová úseč $\varrho\,0\,\varrho'\,\frac{1}{2}\,\varrho$, jejíž jižní polovice je čárkována. Omezímeli proměnnou σ na tuto úseč, pak je patrno, že $1-\sigma$ naplní kruhovou úseč $\varrho'\,1\,\varrho\,\frac{1}{2}\,\varrho'$, tak sice, že bílá část v oboru $1-\sigma$ odpovídá bílé polovině oboru σ, a podobně části čárkované si odpovídají.

Abychom vyšetřili obor naplněný body danými veličinou $\frac{1}{\sigma}$, vyšetřme především jeho meze. Vychází-li σ z ϱ' pohybujíc se po přímé straně přes $\frac{1}{2}$ do ϱ, opisuje $\frac{1}{\sigma}$ oblouk kruhový $\varrho 2 \varrho'$; opisujeli pak σ oblouk $\varrho 0$, probíhá $\frac{1}{\sigma}$ jižním směrem paprsek $\varrho' \infty$; opisujeli posléz σ dráhu $\varrho' 0$, probíhá $\frac{1}{\sigma}$ směrem k severu paprsek $\varrho \infty$. Z toho soudíme, že veličina $\frac{1}{\sigma}$ probíhá nekonečný zbytek východní polouroviny, jenž povstane odejmutím kruhu $\varrho 2 \varrho'$.

Transformací tohoto oboru vzhledem ke středu symmetrie $\sigma = \frac{1}{2}$ obdržíme obor pro veličinu $1 - \frac{1}{\sigma} = \frac{\sigma - 1}{\sigma}$, jenž tedy zaujímá západní polovici roviny mimo kruh $\varrho\,(-1)\,\varrho'$, při čemž čárkovaná polovice oboru toho odpovídá čárkované polovici oboru σ. Podobně vyšetříme, že dvojúhelník kruhový (srp) $\varrho 2 \varrho' 1 \varrho$ odpovídá hodnotám $\frac{1}{1-\sigma}$, obor $\varrho\,(-1)\,\varrho'\,0\,\varrho$ pak hodnotám $\frac{\sigma}{\sigma - 1}$.

Všechny tyto obory až na dva nekonečné jsou dvojúhelníky, jichž strany jsme znamenali a, b, tak jak sobě odpovídají; obory nekonečné považovati lze rovněž za dvojúhelníky, u nichž jeden kruh má střed v konečnu a druhý v nekonečnu, a proto jsme i zde znamenali strany a, b.

Hodnoty (1) a body je znázorňující zoveme *homologickými* vespolek. Uvnitř kterékoli z šesti našich oborů neleží žádné dva body homologické. Tato věta platí také o obvodech, počítáme-li je vždy k částem čárkovaným, takže části bílé neobsahují žádných čar omezujících, které náležejí pouze částem čárkovaným. Na každé straně a, b odpovídají si body po dvou, a jsou symmetrické vůči ose realné. Mimo ϱ, ϱ' neexistuje žádný bod na čarách $a\,(b)$, jemuž by odpovídal bod homologický na $b\,(a)$.

Na ose realné má funkce

$$J(\sigma) = \frac{4}{27} \cdot \frac{(\sigma^2 - \sigma + 1)^3}{\sigma^2 (1-\sigma)^2}; \; J(\tfrac{1}{2}) = 1$$

hodnotu realnou. Na straně a základního oboru σ jest $\sigma = \frac{1}{2} + \lambda i$, kde λ je realné a $\lambda^2 < \frac{3}{4}$; pak bude

$$J = \frac{4}{27} \cdot \frac{(\frac{3}{4} - \lambda^2)^3}{(\frac{1}{4} - \lambda^2)^2 + \lambda^2}$$

realné a kladné, takže probíhá-li σ hodnoty na straně a od ϱ' přes $\frac{1}{2}$ do ϱ, probíhá J(σ) hodnoty kladné od 0 do 1 a pak od 1 do 0.

Na úsecích nekonečných $\varrho\infty$ a $\varrho'\infty$ má σ týž tvar, pouze λ^2 je tam větší než $\frac{3}{4}$ a proto má tam J(σ) hodnotu realnou a zápornou, která se mění na obou od 0 do $-\infty$.

Probíhá-li posléz σ úsek osy realné od $\frac{1}{2}$ do 0, probíhá J(σ) hodnoty realné a kladné od 1 do $+\infty$. Z toho plyne, že

„*Funkce* J(σ) *obdrží na každé* (severní a jižní) *polovici čar b každou zápornou hodnotu na jednom místě, na polovinách čar a každou kladnou hodnotu v mezích 0 a 1 a na úsecích osy realné každou kladnou hodnotu v mezích 1 a* $+\infty$."

Že tam obdrží onu hodnotu pouze jednou, plyne odtud, že máme právě šest polovicí čar a, rovněž tolik polovicí čar b a též tolik úseků osy realné $[(-\infty, -1), (-1, 0), (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 1), (1, 2), (2, \infty)]$. Z toho plyne tedy, že funkce J(σ) obdrží každou hodnotu realnou c mimo $c = 0, 1, \infty$ na šesti různých místech obvodů našich oborů, a poněvadž je rovnice (3) § 4. vůči σ stupně 6., nemůže ji obdržeti pro žádné místo σ uvnitř některého z našich oborů. Totéž platí o hodnotách $c = 0, 1, \infty$, a proto

„*Může míti* J(σ) *uvnitř čárkované* (resp. bílé) *části oboru σ pouze hodnotu komplexní, jejíž pomyslná část má stálé znamení.*"

Neboť kdyby pomyslná část veličiny J měla ve dvou místech základního oboru čárkovaného hodnotu označení protivného, pak bychom nalezli na přímce je spojující aspoň jedno místo, kde ona část mizí, takže tam jest J(σ) realné, což je dle poslední úvahy nemožno. Proto tam taková dvě místa vyskytnouti se nemohou, a platí tedy věta pronešená.

Vyšetříme nyní znamení pomyslné části veličiny J v jednom zvláštním místě čárkovaného oboru $\frac{1}{\sigma}$. Veďme paprsek $\overline{O\varrho}$ a stanovme jeho průsek σ s přímkou vedenou bodem 1 rovnoběžně s osou pomyslnou.

Veličina $\sigma - \varrho$ má pak úhel $= 60^0$, $\sigma - \varrho'$ úhel $90^0 - \alpha$, kde α je kladné a menší než 30^0; veličina σ má úhel $= 60^0$, $\sigma - 1$ pak 90^0; z toho následuje, že úhel veličiny

$$\frac{27\,J}{4} = \frac{(\sigma^2 - \sigma + 1)^3}{\sigma^2(1-\sigma)^2} = \frac{(\sigma - \varrho)^3(\sigma - \varrho')^3}{\sigma^2(\sigma - 1)^2}$$

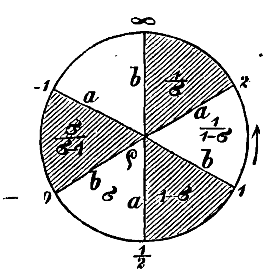
jest $3.60^0 + 3.(90^0 - \alpha) - 2(60^0 + 90^0) = 150^0 - 3\alpha$; poněvadž $\alpha < 30^0$, je $150^0 - 3\alpha$ obsaženo v mezích 150^0 a 90^0, a proto nalezá se J v severní polovici roviny:

„*V čárkovaných polovicích našich oborů má* $J(\sigma)$ *pomyslnou část kladnou, v polovicích bílých zápornou.*“

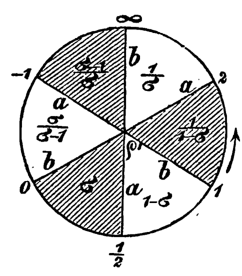
Druhá část věty plyne odtud, že $J(\sigma)$ obdrží každou předepsanou hodnotu a tedy také hodnotu se zápornou částí pomyslnou, kterou však neobdrží ani v polovicích čárkovaných ani na obvodě, a proto ji může obdržeti pouze uvnitř oborů bílých, kdež pak má pomyslná část veličiny $J(\sigma)$ hodnotu stále zápornou.

6. Sestrojme kouli o středu $\sigma = \frac{1}{2}$ poloměru $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, která tedy prochází body ϱ, ϱ'; průměr sdružený s rovinou (σ) protne kouli v bodech s, t, z nichž s buď nad rovinou, t pod rovinou (σ). Promítáme-li pak z bodu s rovinu (σ) na kouli, promítají se přímky a kruhy opět v kruhy, při čemž úhly projekcí jsou rovny úhlům originalů, takže se touto (stereografickou) projekcí velikost úhlů nemění. Osa realná promítá se v hlavní kruh kolmý na rovinu (σ), jejž nazveme *rovníkem*, vůči němuž hrají body $\varrho\varrho'$ roli *pólů*. Průměty bodů $\sigma = -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2, \infty$ nalezají se na rovníku, kdež tvoří vrcholy pravidelného šestiúhelníka, jimiž procházejí průměty kruhů a, b, které jsou hlavní kruhy vedené body $\varrho\varrho'$.

Našim dvojúhelníkům v rovině odpovídají tedy dvojúhelníky sférické vespolek shodné, svírající úhly 60^0. Těchto šest



Obr. 2. *a*.



Obr. 2. *b*.

dvojúhelníků rozděleno je rovníkem ve 12 sférických pravoúhlých trojúhelníků střídavě čárkovaných a bílých. V obr. 2. *a*. a 2. *b*. podány jsou obrazy průmětů takto rozdělených půlkoulí na rovinu rovníka, a sice představuje 2. *a*. polovici severní (která odpovídá severní polourovině a obsahuje bod ϱ), 2. *b*. pak polovici jižní.

Nyní je důležito věděti, jak sestrojiti lze body homologické k danému bodu σ uvnitř oboru základního (neb na mezích). K tomu potřebí pouze sestrojiti jeho průmět na kouli, a určiti bod, který mu v příslušném oboru odpovídá. Hledáme-li na př. bod $\frac{1}{1-\sigma}$, pak stačí otočiti kouli ve směru šipkou označeném kol průměru $\varrho\varrho'$ o úhel 120°; místo, kam bod σ na kouli takto dospěje, odpovídá stereograficky místu $\frac{1}{1-\sigma}$ v rovině. Přechod od místa σ k $\frac{\sigma-1}{\sigma}$ sprostředkuje dvojnásobné otočení poslední, t. j. otočení kol osy $\varrho\varrho'$ o úhel 240°.

Hledáme-li naproti tomu místo $1-\sigma$, stačí otočiti kouli kol průměru procházejícího bodem $\frac{1}{2}$ v jednom z obou směrů o úhel 180°. Místo, kam bod σ takto dospěje, odpovídá stereograficky bodu $1-\sigma$. K místu $\frac{1}{\sigma}$ dospějeme rotací o 180° kol průměru v bodě 1, kdežto k místu $\frac{\sigma}{\sigma-1}$ dospějeme rotací o 180° kol průměru v bodě 0.*)

*) Větší díl výsledků tohoto pojednání, po němž následovati má více článků podobného obsahu, vzat je z pojednání p. *Felixe Kleina* „Ueber die Transformation etc. Mathem. Annalen, sv. 14, str. 111, kde ovšem scházejí důkazy, na mnoze i bližší vysvětlení. Vzhledem k důležitosti i pozornosti, jaké se těší funkce elliptické v nynější analysi, není zajisté od místa dokázati některé základní věty theorie elliptických integrálů prostředky naskrze elementarnými, zvlášť pak odporučiti třeba elementárné zpracování výsledků důležitých pro theorii funkcí elliptických, kterých se analyse na jiném poli od našeho dosti vzdáleném, totiž v theorii forem, byla dodělala.