Ladislav Fahoun

Příspěvek ku theorii a konstrukci křivek racionálných třetího stupně

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 34 (1905), No. 3, 219--224

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121163`

Volíme-li bod O ve středu kružnice opsané o trojúhelník, pak dostaneme větu duálnou ku větě p. Kariya:

Spojíme-li střed kružnice opsané o trojúhelník s jeho vrcholy a na tyto spojnice vztýčíme kolmice ve stejných vzdálenostech od bodu O, pak tyto kolmice protínají se s příslušnými stranami trojúhelníka v bodech, jež leží na téže přímce.

Mohli bychom ještě řadu speciálních vět vyvoditi, avšak upouštíme od toho, ježto úvaha naše měla za účel ukázati, že věta a bod Kariyův jsou jen velice zvláštní případy theoremu obecného.

Příspěvek ku theorii a konstrukci křivek racionálných třetího stupně.

Napsal

Dr. Ladislav Fahoun,
professor reálky v Lounech.

I. Učiníme-li dvojný bod racionálné čáry třetího stupně počátkem souřadnic, obdrží rovnice její, není-li přímka $x = 0$ rovnoběžna s její asymptotou, jak známo, tvar

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + y^3 + dx^2 + exy + fy^2 = 0. \qquad (1)$$

Vyjádříme-li úsečku x pomocí proměnného parametru u daného rovnicí

$$y = ux, \qquad (2)$$

obdržíme

$$x = -\frac{d + eu + fu^2}{a + bu + cu^2 + u^3}. \qquad (3)$$

Rozložme tuto racionálnou ryze lomenou funkci v zlomky částečné; má-li rovnice

$$a + bu + cu^2 + u^3 = 0 \qquad (4)$$

všechny kořeny realné různé, lze rozložiti x ve tvaru

$$x = \frac{A_1}{u - \alpha_1} + \frac{A_2}{u - \alpha_2} + \frac{A_3}{u - \alpha_3}, \tag{5}$$

kdež α_1, α_2, α_3 jsou realné kořeny rovnice (4).

Rovnice (5) nás poučuje, že: úsečka kteréhokoli bodu čáry rovná se algebraickému součtu z úseček průseků, které tvoří přímka (2) bodem oním procházející na přímkách

$$P_r \equiv y = \alpha_r x + A_r \qquad r = 1, 2, 3. \tag{6}$$

Neboť spojíme-li rovnici přímky P_r s rovnicí (2), bude

$$x_r = \frac{A_r}{u - \alpha_r}.$$

Pro A_r najdeme známým způsobem

$$A_r = -\frac{d + e\alpha_r + f\alpha_r^2}{b + 2c\alpha_r + 3\alpha_r^2};$$

o přímce P_r pak snadno lze dokázati, že jest asymptotou čáry (1). *)

Rovnice (6) representuje tedy tři realné asymptoty dané čáry (1), poněvadž pak místo algebraického součtu úseček na ose x lze přímo algebraicky sečíti úseky příslušné těmto na paprsku (2), možno větu svrchu vyslovenou modifikovati takto:

„Vzdálenosť kteréhokoli bodu S racionálné čáry třetího stupně, jež má tři realné asymptoty, od jejího dvojného bodu O rovná se algebraickému součtu vzdáleností dvojného bodu od průseků, jež tvoří paprsek OS na jejích asymptotách".

Této poučky lze užiti k sestrojení bodů čáry, jejíž tři realné asymptoty a dvojný bod jsou dány.

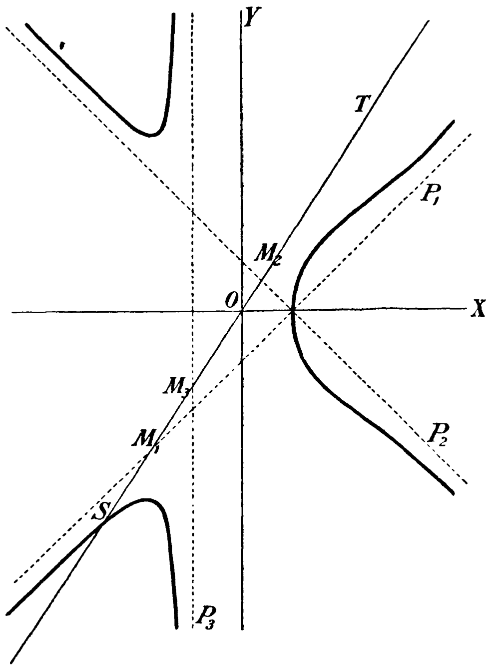
Dány-li jsou na př. asymptoty

$$P_1 \equiv x - y - a = 0,$$
$$P_2 \equiv x + y - a = 0,$$
$$P_3 \equiv x + a = 0,$$

*) Viz Č. Č. M. roč. I. č. IV. Dr. Em. Weyr: „Určování nekonečně vzdálených prvků útvarů geometrických."

a dvojný bod v počátku, protněme je libovolným paprskem T jdoucím počátkem, tím obdržíme průseky M_1, M_2, M_3.

Algebraický součet úseků $OM_1 + OM_2 + OM_3 = OS$, bod S jest bodem čáry racionální třetího stupně.



Snadno lze z rovnic assymptot odvoditi rovnici příslušné čáry třetího stupně, mající dvojný bod v počátku. Průseky paprsku s assymptotami P_1, P_1, P_3 mají úsečky

$$x_1 = \frac{a}{1-u}, \quad x_2 = \frac{a}{1+u}, \quad x_3 = -a.$$

Součet těchto úseček jest úsečkou bodu čáry i jest

$$x = a\,\frac{1+u^2}{1-u^2};$$

zavedeme-li za u hodnotu $\frac{y}{x}$, obdržíme po krátké redukci

$$x^3 - xy^2 - a(x^2 + y^2) = 0,$$

jakožto rovnici hledané čáry, u níž počátek souřadnic je bodem isolovaným. Tvar její patrný jest z obrazce.

Sloučíme-li kterékoli dva členy pravé strany rovnice (5), obdržíme

$$x = \frac{A_1}{u - \alpha_1} + \frac{Bu_1 + C}{u^2 - (\alpha_2 + \alpha_3)u + \alpha_3}.$$

Druhý zlomek jest úsečkou průseku přímky (2) s kuželosečkou

$$y^2 - (\alpha_2 + \alpha_3)xy + \alpha_2\alpha_3 - Cx - By = 0, \qquad (7)$$

kteráž jest hyperbolou, jak z kvadratického trinomu patrno, a asymptoty její jsou, jak snadno se přesvědčíme, nahradíme-li v rovnici (7) koefficienty B a C jich hodnotami

$$y = \alpha_2 x + A_2,$$
$$y = \alpha_3 x + A_3.$$

Poznáváme, že kterékoli dvě ze tří asymptot jsou asymptotami určité hyperboly, procházející dvojným bodem.

II. Má-li rovnice (4) jeden kořen realný a dva soujemné sdružené, nabude rozklad zlomku rovnice (3) tvaru:

$$x = \frac{A}{u - \alpha} + \frac{Bu + C}{u^2 - 2\beta u + \gamma}, \qquad (8)$$

kde α jest onen realný kořen rovnice (4), výraz $u^2 - 2\beta u + \gamma$ jest pak součinem kořenových činitelů soujemných téže rovnice. Rovnice (8) nás vede k poznatku, že úsečka kteréhokoli bodu čáry (1) jest rovna algebraickému součtu úsečky průsečíku přímky (2) bodem oním procházející s přímkou

$$P \equiv y = \alpha x + A$$

a úsečky průsečíku téže přímky (2) s kuželosečkou

$$K \equiv y^2 - 2\beta xy + \gamma x^2 - Cx - By = 0,$$

o čemž lze se přesvědčiti, řešíme-li rovnici (2) s rovnicí pro P a pro K.

Dále poznáváme, že přímka P jest asymptotou čáry (1) kuželosečka K jest pak ellipsou, jak z kvadratického trinomu patrno, ježto kořeny rovnice

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\beta\frac{y}{x} + \gamma = 0$$

jsou soujemné.

Dle toho lze sestrojiti body racionálné čáry, jež má jedinou assymptotu realnou, pomocí této a příslušné ellipsy (která ve zvláštním případě přechází v kružnici) užitím methody v předchozím vysvětlené.*)

Tak na př. řešíme-li rovnici Descartesova listu

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0,$$

s rovnicí (2), obdržíme:

$$x = \frac{3au}{1+u^3} = -\frac{a}{1+u} + \frac{a(1+u)}{1-u+u^2}.$$

Prvý zlomek jest úsečkou průseku přímky (2) s asymptotou této křivky

$$y = -x - a,$$

druhý zlomek udává hodnotu úsečky průseku přímky (2) s ellipsou

$$x^2 - xy + y^2 - a(x+y) = 0.$$

Konstrukce tato jest konstrukcí Zahradníkovou, k níž přichází dvorní rada prof. Zahradník jinou cestou v článku: „Descartesův list jako cissoidala“ (Č. Č. M. ročník XXXIV., č. I.).

Jiný příklad poskytuje cissoida Diokleova, jejíž rovnice jest

$$y^2 = \frac{x^3}{q-x}.$$

---

*) Tuto konstrukci způsobem podstatně stejným odvodil prof. K. Zahradník ve článku „Křivky cissoidálné“ v Č. Č. M., II. ročník, pg. 183. Tuto konstrukci lze pokládati za sevšeobecnění konstrukce cissoidy a odtud název „křivky cissoidálné“. Jak patrno z výkladu ke konci 1. odst., lze i křivky mající 3 reálné assymptoty pokládati za křivky cissoidálné, v tomto případě jest základní kuželosečka při konstrukci hyperbola (7).

Pro tuto jest rovnice assymptoty

$$x = q,$$

rovnice příslušné kuželosečky pak:

$$x^2 + y^2 - qx = 0,$$

kteráž jest v tomto případě kružnicí.

III. Má-li rovnice (4) všechny kořeny realné splývající, je-li tedy

$$a + bu + cu^2 + u^3 = (u - \alpha)^3 = 0,$$

při čemž α jest kořen této rovnice, jest

$$x = \frac{A_1}{u - \alpha} + \frac{A_2}{(u - \alpha)^2} + \frac{A_3}{(u - \alpha)^3}.$$

Význam prvého a druhého členu pravé strany jest jasný, třetí člen jest hodnotou úsečky průseku přímky (2) s křivkou:

$$(y - \alpha x)^3 = A_3 x^2,$$

kteráž jest stupně třetího. V případě tomto jest konstrukce methodou v předchozím vysvětlenou nemožna, neboť vedle útvaru linearného a kvadratického nutno použiti k sestrojení i útvaru kubického, o jehož sestrojení se však právě jedná.

O rozkladu čísel v součet deseti a dvanácti čtverců.

Napsal

Dr. Karel Petr.

Jedna ze zajímavých úloh theorie čísel jest otázka, kolikrát lze dané číslo celé jakožto součet několika čtverců čísel celistvých vyjádřiti, t. j. jinými slovy, kolik řešení v číslech celých