Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 8 (1879), No. 1, 38--43

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121152

Úlohy.

Řešení mathematické úlohy 4.

Podal *Josef Kořínek*, žák VIII. tř. gymn. v Jindř. Hradci.

Při poloročním úrokování počítá se výnos dle vzorce

$$K_n = K\left(1 + 0{\cdot}01\,\frac{p}{2}\right)^{2n},$$

znamená-li K kapital, p procenta a n počet let.

Dle dané úlohy rovná se $K = 1000$, $K_n = 2560$, $p = x$, $n = 12$, proto bude tu

$$2560 = 1000\left(1 + 0{\cdot}01\,\frac{x}{2}\right)^{24},$$

z čehož se přiměřenými obraty vypočte

$$x = 7.988 \text{ čili skoro } 8\%.\text{*)}$$

(Tutéž úlohu řešil *Jos Zvěřina* a *Josef Prouza*, z VIII. tř. real. gymn. v Chrudími, *Jan Mayer* z VIII. gymn. v Jindř. Hradci a *Bedřich Špidlén* ze VII. tř. realních škol v Praze.

Řešení mathematické úlohy 5.

Podal *Jan Mayer*, žák VIII. tř. gymn. v Jindř. Hradci.

Ukládá-li se kapital na počátku dob, vzroste ve spořitelně jistina C na C_1, kdež platí

$$C_1 = C\,\frac{100+p}{p}\left[\left(\frac{100+p}{100}\right)^n - 1\right],$$

kdežto v záložně z něho za podmínek podobných povstane

$$C_2 = C\,\frac{100+p_1}{p_1}\left[\left(\frac{100+p_1}{100}\right)^n - 1\right];$$

a ježto v případu našem platí

---

*) Obrátíme-li úlohu tuto, obdržíme z jmenovaného kapitálu po 12 letech podlé tabulky příslušné (Viz *Studnička*. „Kapesní logarithmické tabulky“ III. vyd. pag. 142) pro $p = 4$, $n = 24$ přímo 2563·30 zl.

$$C_2 = 2C_1,\ C = 100,\ p = 4,\ p_1 = 6.$$

obdržíme, porovnavše oba výnosy,

$$2 \, . \, \frac{104}{4} \, [1{\cdot}04^x - 1] = \frac{106}{6} \, [1{\cdot}06^x - 1] \, ,$$

z čehož plyne po náležitém upravení

$$1{\cdot}04^x - 0{\cdot}3397436 \, . \, 1{\cdot}06^x - 0{\cdot}66025641 = 0.$$

Kořen této transcendentní rovnice leží mezi 51 a 52 a sice jest

$$f(51) = \varphi_1 = + 0{\cdot}0970159,$$
$$f(52) = \varphi_2 = - 0{\cdot}0053667,$$

takže *první* přibližná hodnota bude

$$\alpha_1 = \frac{52\varphi_1 - 51\varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2} = 51{\cdot}947.$$

Dále jest, zvolíme-li za východisko hodnotu 51·95,

$$f(51{\cdot}95) = \varphi_3 = + 0{\cdot}00003067,$$
$$f(51{\cdot}953) = \varphi_4 = - 0{\cdot}00029198,$$

takže *druhá* přibližná bude

$$\alpha_2 = \frac{51{\cdot}953\,\varphi_3 - 51{\cdot}95\,\varphi_4}{\varphi_3 - \varphi_4} = 51{\cdot}950283.$$

Zůstaneme-li při této hodnotě státi, která udává, že v 51 letech a 11 měsících se kapitál v záložně zdvojnásobní u porovnání s kapitalem ve spořitelně, obdržíme též na zkoušku

$$C_1 = 17346{\cdot}1028 \text{ zl.}$$
$$C_2 = 34692{\cdot}2065 \text{ „}$$

rozdíl tedy $2C_1 - C_2 = - \ 0{\cdot}0009$ „ , nečiní ani $^1/_{10}$ kr.

II. Dějí-li se vklady na konci dob, což ale ve skutečnosti nepředpokládáme, jest tu řešiti rovnici

$$1{\cdot}04^x - 0{\cdot}33974359 \, . \, 1{\cdot}06^x - 0{\cdot}64102564 = 0,$$

jejíž kořen podobným spůsobem se vyšetří, an jest

$$\alpha_2 = 52{\cdot}127151\,;$$

podlé toho obdrží se co výnos

$$C_1 = 17584{\cdot}9489 \text{ zl.}$$
$$C_2 = 35169{\cdot}8937 \text{ „ ,}$$

rozdíl tedy $2C_1 - C_2 = \ 0{\cdot}0041$ „ , nečiní ani $^1/_2$ kr.

(Tutéž úlohu správně řešil *Josef Kořínek* z VIII. tř. gym. v Jindř. Hradci, *Jos. Prouza* z VIII. tř. gymn. v Chrudími.)

Řešení mathematické úlohy 6.

Podal *Josef Zvěřina,* žák VIII. tř. r. gymn. v Chrudími.

Má-li se řešiti transcendentní rovnice

$$2^x + 3^x = 4^x,$$

převeďme ji napřed na tvar

$$\left(\frac{2}{4}\right)^x + \left(\frac{3}{4}\right)^x = 1$$

a položme pak

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = sin^2\,\alpha,\ \left(\frac{3}{4}\right)^x = cos^2\,\alpha,$$

načež bude, logarithmujeme-li

$$\frac{lg\,2}{lg\,4 - lg\,3} = \frac{0\cdot30103}{0\cdot12494} = \frac{lg\,sin\,\alpha}{lg\,cos\,\alpha},$$

z čehož se vypočítá pomocný úhel

$$\alpha = 36^0\,22'\,50'',$$

kterýž vede k hodnotě hledané

$$x = 1\cdot5071.$$

Poznamenání. Podobným obratem obdržel *Bed. Špidlén* pro úhel hodnotu

$$\alpha = 36^0\,22'\,47''725$$

a podlé toho konečně

$$x = 1\cdot5071265,$$

což i *regula falsorum* dvojím přiblížením dává.

Mathematická úloha 9.*)

Jaké má kořeny rovnice stupně třetího

$$x^3 - 19x + 30 = 0.$$

Mathematická úloha 10.

Dvěma rovnoběžnými a od středu kruhu stejně vzdálenými tětivami má se vykrojiti pětina celé plochy kruhové; jak jsou tyto tětivy dlouhé a od středu vzdálené?

Mathematická úloha 11.

Jak daleko jsou od sebe středy dvou koulí položeny, činí-li společný jich obsah čočky n/m tou část koule jedné vůbec a pro $m = 4n$ zvlášť.

*) Řešení úlohy 7. a 8. nebylo dosud zasláno, pročež je do konce května budoucího roku ještě očekáváme; totéž platí o 1. úloze fysikalní.

Mathematická úloha 12.

Ze všech sférických sektorů daného obsahu má se vyšetřiti ten, jehož povrch jest nejmenší.

Řešení fysikalní úlohy 2.

Podal *Bed. Špidlén*, žák VII. tř. č. real. škol v Praze.

Značí-li c rychlost, n počet koulí a $N:M$ exponent řady geometrické, bude hledaná rychlost všeobecně vyjádřená vzorcem

$$x = c\left(\frac{2M}{M+N}\right)^{n-1};$$

a jelikož v našem případě platí

$$c = 1, \quad n = 100, \quad M = 2N,$$

obdržíme co konečnou rychlost

$$x = \left(\frac{4}{3}\right)^{99} = 2338467 \text{ millionů.}$$

(Tutéž úlohu řešil *Jos. Kořínek a J. Mayer* z VIII. třídy gymn. v Jindř. Hradci a *Jos. Zvěřina* z VIII. třídy real. gymn. v Chrudimi.

Řešení fysikalní úlohy 3.

Podal *Karel Minařík,* filosofie kandidat ve Vídni.

Položíce počátek souřadnic do počátečního bodu křivky a označíce souřadnice těžiska x_1, y_1, z_1, délku křivky až do bodu x, y, z krátce s, obdržíme podlé známých vzorců

$$s = \int_0^x dx\,(1+x) = {}^1/_2 x\,(2+x) = x + z\,,$$

$$sx_1 = \int_0^x dx\,(1+x)\,x = {}^1/_6 x^2\,(3+2x)$$

$$sy_1 = \frac{1}{3}\int_0^x dx\,(1+x)\,\sqrt{8x^3} = \frac{2\sqrt{2}}{105}\,(14+10x)\,x^{7/2}$$

$$sz_1 = \frac{1}{2}\int_0^x dx\,(1+x)\,x^2 = \frac{1}{24}\,(4+3x)\,x^3\,,$$

z čehož plyne konečně

$$x_1 = \frac{1}{3}\;\frac{(3+2x)\,x}{2+x} = \frac{z\,(1+{}^2/_3 x)}{x+z}\,,$$

$$y_1 = \frac{8\sqrt{2}}{105}\,\frac{(7+5x)\,x^{3/2}}{2+x} = \frac{2xy\,(7+5x)}{35\,(x+z)},$$

$$z_1 = \frac{1}{12}\,\frac{(4+3x)\,x^2}{2+x} = \frac{z}{2}\cdot\frac{{}^2/_3\,x+z}{x+z}.$$

Řešení fysikalní úlohy 4.

Podal *Jos. Prouza*, žák VIII. tř. r. gymn. v Chrudimi.

Podlé Newtonova zákona přítažnosti platí

$$G = M : R^2,\quad g = m : r^2,$$

takže obdržíme pro $G = g$, $R = x$, $r = d - x$

$$M : x^2 = m : (d - x)^2,$$

z čehož plyne kvadratická rovnice

$$x^2 - 2\,\frac{Md}{M-m}\,x + \frac{Md^2}{M-m} = 0;$$

značí-li tu $M = 80$, $m = 1$, $d = 60{\cdot}2$ poloměrů zemských, obdržíme pro kořen sem příslušný hodnotu

$$x = 60{\cdot}2\,(80 - \sqrt{80}) : 79 = 60{\cdot}2\,.\,71{\cdot}05573 : 70 = 54{\cdot}146,$$

totiž poloměrů zemských.*)

(Tutéž úlohu řešil *Jos. Kořínek a J. Mayer* z VIII. třídy gym. v Jindř. Hradci, *Jos. Zvěřina* z VIII. tř. gym. v Chrudimi, *Bed. Špidlén* ze VII. tř. real. v Praze a *Karel Minařík*, kandidat filosofie ve Vídni.)

Fysikalní úloha 5.

Zvětší-li se vzdálenost předmětu od sférického zrcadla, jehož ohnisko jest c^{cm} vzdáleno, o d^{cm}, přiblíží se obraz o δ^{cm} k zrcadlu; kde stojí předmět a obraz vůbec a pro ten případ, že $c = 35$, $d = 252$, $\delta = 9$, zvlášť.

Fysikalní úloha 6.

V jakém poměru musí býti tloušťka stěny k poloměru kulovité bubliny mydlinové, vodíkem naplněné, aby mohla do vzduchu vystoupiti, jest-li pro vodu mydlinovou $s_1 = 1$, pro vzduch $s_2 = 0{\cdot}0012991$ a pro vodík $s_3 = 0{\cdot}0000894$.

Fysikalní úloha 7.

Má se určiti těžisko oblouku kardioidy ($r = a + a\cos\varrho$), jdoucího od 0 do π.

---

*) Poněvadž tento poloměr země co koule měří 860 mil, vyjde tu vzdálenost asi 45700 mil od povrchu zemského, kdežto *Verne* uvádí jen 44253.

Fysikalní úloha 8.

Jak velkou rychlostí by musila býti koule z děla vystřelena, aby překonajíc přítažnost zemskou nevrátila se k zemi více?

Věstník literarní.

Na důkaz, jak členové naší Jednoty ve všech svých poměrech a postaveních mathematiku pilně pěstují, uvádíme zde pojednání, jež p. prof. *Karel J. Maška* v programech vyšší realky znojemské r. 1877 a 1878 uveřejnil *o stejnoměrných souřadnicích (Über homogene Coordinaten.)*

S potěšením vyznáváme, že nás výtečná práce tato velmi mile překvapila a že bychom si přáli, aby o sobě v jedné knize s příslušným rozšířením vyšla nejen ke cti snaživému p. spisovateli, nýbrž i k nemalému užitku mladším pěstitelům analytické geometrie v novější fasi její.

Při této příležitosti nemeškáme též subjektivní náhled svůj pronésti o algebraické formě mnohých vzorců; máme totiž za to, že by vnější stránka této práce vypadala mnohem elegantněji, kdyby se bylo přihlíželo, kde možná, k symbolice determinantní. Na str. 33. (I. část) možná užiti velmi vhodně známého determinantu

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1, & a_1, & b_1 \\ 1, & a_2, & b_2 \\ 1, & a_3, & b_3 \end{vmatrix}$$

a příslušných prvkům prvního sloupce subdeterminantů

$$A_1 = (a_2\, b_3),\ A_2 = (a_3\, b_1),\ A_3 = (a_1\, b_2),$$

takže by tu na př. vzorec (5) byl

$$D = \frac{2\,\Delta}{A_1 A_2 A_2}$$

a soustava (6) podobně se proměnila v cyklickou

$$g_1\, r_1\, A_2\, A_3 = g_2\, r_2\, A_3\, A_1 = g_3\, r_3\, A_1\, A_2 = 2\Delta$$

a t. p.*)

*) Nejspíše nechtěl p. spisovatel užiti determinantů ve spise programním, jelikož se dosud na realkách našich rakouských jen zde onde