Karel Zahradník

Příspěvek k upotřebení determinantů

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 8 (1879), No. 1, 32--33

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121144`

$$p^2\left(1-\varepsilon^2-\frac{2a}{r}\right)=-a^2.$$

Jestiť

$$a=\frac{4C^2}{k},\quad \frac{1-\varepsilon^2}{a}=\frac{2k}{r_0}-v^2$$

Myslíme-li si ve veličinách v_0, r_0 rychlost a vzdálenost v okamžiku, ve kterém hmota m, tedy na př. planeta do pohybu se dostala, poznáme, že jen tyto o formě kuželosečky rozhodují. Vyžadujeť ellipsa, aby $\varepsilon^2 < 1$, kdežto k hyperbole a parabole $\varepsilon^2 > 1$ a $\varepsilon^2 = 1$ přináleží.

Pohyb hmoty m bude se tedy díti v *ellipse*, *parabole* nebo *hyperbole*, platí-li po sobě podmínky

$$\frac{2k}{r_0}-v_0^2 \gtreqless 0,$$

z čehož zároveň patrno, že podmínka pro parabolu jest přesně vymezena a tato dráha tedy ve skutečnosti skoro nemožna.

Příspěvek k upotřebení determinantů.

Podal

Dr. K. **Zahradník**, prof. v Záhřebě.

Podmínku, by ležely tři body a_k (x_k, y_k) $k=1, 2, 3$, na téže přímce, vyjadřuje, jak známo, determinant[1])

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

Determinant tento můžeme přeměniti, i psáti:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_2 & y_3-y_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2-x_1, & y_2-y_1 \\ x_3-x_2, & y_3-y_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Označíme-li projekci délky $\overline{a_m a_n}$ na osu T krátce $P_t\,(a_m a_n)$ můžeme vzorec (3) psáti

[1]) Viz: *Studnička*: „Geometrické upotřebení některých pouček o determinantech. Časopis díl II. pg. 70.

$$\begin{vmatrix} P_x(a_1 a_2) & P_y(a_1 a_2) \\ P_x(a_2 a_3) & P_y(a_2 a_3) \end{vmatrix} = 0.$$

anebo

$$P_x(a_1 a_2) \,.\, P_y(a_2 a_3) = P_y(a_1 a_2)\, P_x(a_2 a_3),$$

což podává známou větu planimetrie:

Vedeme-li bodem uhlopříčky daného obdélníku rovnoběžky se stranami, obdržíme dva obdélníky, jimiž ona uhlopříčka neprochází, a jež se plochou sobě rovnají. (Viz obr. 10., kdež a_1 můžeme vzíti za počátek souřadnic, a strany $a_1 b_3$, $a_1 c_3$ za osy souřadnic, takže tu plyne ihned: $b_1 p \,.\, b_1 m = b_3 n \,.\, b_3 q$). Naopak můžeme říci, že body uvedené vlastnosti leží na uhlopříčce.

2. Podmínku (2) můžeme i tím transformovati, že ji uvedeme na druhou mocnost, čímž obdržíme napřed

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1, & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_2, & y_3 - y_2 \end{vmatrix}^2 =$$

$$\begin{vmatrix} (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 & , (x_2-x_1)(x_3-x_2) + (y_2-y_1)(y_3-y_2) \\ (x_2-x_1)(x_3-x_2) + (y_2-y_1)(y_3-y_2), & (x_3-x_2)^2 + (y_3-y_2)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

a nahradíme-li rozdíly tyto příslušnými veličinami,

$$\begin{vmatrix} \overline{a_1 a_2}^2 & , P_x(a_1 a_2) P_x(a_2 a_3) + P_y(a_1 a_2) P_y(a_2 a_3) \\ P_x(a_1 a_2) P_x(a_2 a_3) + P_y(a_1 a_2) P_y(a_2 a_3), & \overline{a_2 a_3}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Rozvineme-li determinant tento, obdržíme po krátké transformaci,

$$\overline{a_1 a_2} \,.\, \overline{a_2 a_3} = P_x(a_1 a_2)\, P_x(a_2 a_3) + P_y(a_1 a_2)\, P_y(a_2 a_3). \quad (4)$$

Jelikož můžeme $P_x(a_m a_n)$, $P_y(a_m a_n)$ považovati co složky délky $a_m a_n$, můžeme i rovnici (7) vyjádřiti následovně:

Součin dvou délek téhož směru se společným bodem rovná se součtu součinů jejich složek pravoúhlých.

Jeli $\qquad a_1 a_2 = a_2 a_3$

plyne ze vzorce (4)

$$\overline{a_1 a_2}^2 = [P_x(a_1 a_2)]^2 + [P_y(a_1 a_2)]^2, \qquad (5)$$

což nám podává známou větu *Pythagorovu.* Třeba pouze bodem a_1 vésti rovnoběžku s osou *X,* a bodem a_2 rovnoběžku s osou *Y*, průsek těch rovnoběžek budiž *b,* načež obdržíme $\Delta\, a_1 a_2 b$, v němž je:

$$P_x(a_1 a_2) = a_1 b, \; P_y(a_1 a_2) = a_2 b,$$

a za tou příčinou

$$\overline{a_1 a_2}^2 = \overline{a_1 b}^2 + \overline{a_2 b}^2.$$

Poznámka: Jak souvisí rovnice (4) větou Ptolemëovou?