Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Čeněk Dvořák

O obráceném kyvadle

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 48 (1919), No. 1-2, 65--70

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121117

Součiny ty nemění však ani potom své hodnoty zaměníme-li první dyadu s poslední

$$\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{cn} = \mathbf{cn} \dot{\times} \mathbf{bm} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{al}, \qquad (10')$$

neboť pravá strana rovná se též součinu $(\mathbf{abc})(\mathbf{lmn})$. Položíme-li ve výraze $(\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b})(\mathbf{l} \,.\, \mathbf{m})$ pro dvojný součin skalární $\mathbf{al} : \mathbf{bm}$ (vz. 1) vektor $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ místo $\mathbf{b}$ a vektor $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ místo $\mathbf{m}$, obdržíme součin $\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b} \times \mathbf{c} \;\; \mathbf{l} \,.\, \mathbf{m} \times \mathbf{n}$, což jest dle (10) hodnota skalárovektoriálního součinu $\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{cn}$. Tudíž lze psáti

$$\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{cn} = \mathbf{al} : [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]\,[\mathbf{m} \times \mathbf{n}]$$

čili vzhledem k (2)

$$\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{cn} = \mathbf{al} : \mathbf{bm} \overset{\times}{\underset{\times}{}} \mathbf{cn}, \qquad (11)$$

kde pravou stranu zoveme dvojným *skalárním součinem tří dyad.*

Součin ten rovná se nulle, jsou-li dva jeho činitelé rovnoběžny; z toho poznáváme, že ze skalárovektoriálních součinů tří základních dyad, utvořených z $\mathbf{ii}$, $\mathbf{ij}$, $\mathbf{ik}$ atd., mají hodnoty od nully rozdílné jen součiny, jichž všechny přední neb všechny zadní vektory jsou k sobě vzájemně kolmé; hodnota těchto součinů jest pak ± 1, na př.

$$\mathbf{ii} \dot{\times} \mathbf{jj} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{kk} = \mathbf{ij} \dot{\times} \mathbf{jk} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{ki} = \mathbf{ik} \dot{\times} \mathbf{ji} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{lj} = 1,$$
$$\mathbf{ik} \dot{\times} \mathbf{jj} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{ki} = \mathbf{ii} \dot{\times} \mathbf{kj} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{jk} = -1.$$

(Dokončení.)

O obráceném kyvadle.

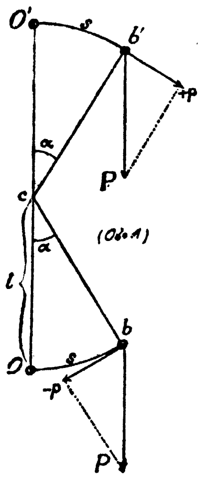
Napsal prof. Dr. **Čeněk Dvořák** v Záhřebě.*)

Obrácené kyvadlo se ve vyučování mechanice docela zanedbává bezpochyby proto, že nenachází upotřebení (vyjma u nynějších seismografů). Chci poukázati tímto článkem na to, že zasluhuje obrácené kyvadlo více pozornosti.

U obyčejného kyvadla cO (obr. 1.) je síla úměrna vyšinutí $Ob = s$ z polohy rovnovážné, dokud je toto velmi malé. Síla p ve směru pohybu je totiž $-p = P \sin \alpha = P \,.\, \alpha$; síla p smě-

---

*) O tomto předmětu jsem též pojednával chorvatsky v časopisu „Nastavni vjesnik“ 1910 a potom německy v „Zeitschr. für physik. und chem. Unterr. 1912, 1. Heft.



Obr. 1.

řuje k O, má tedy znaménko —. Totéž platí pro obrácené kyvadlo (obr. 1., horní díl), ale síla p má znaménko $+$. Síla je všeobecně $= m \,.\, a$, kde m je hmota, a zrychlení, takže $\pm p = m \frac{d^2s}{dt^2} = P \frac{s}{l}$, čili kratčeji

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \mp c^2 s. \qquad (1)$$

Znaménko — platí pro obyčejné, znaménko $+$ pro obrácené kyvadlo. Snadno se dokáže, že tuto rovnici pro obrácené kyvadlo dostaneme, *je-li rychlost úměrna vyšinutí*. Nechť jest totiž $v = cs = \frac{ds}{dt}$, to je

$$\frac{dv}{dt} = c \frac{ds}{dt} = c^2 s = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Poslední dva členy dají rovnici (1).

Má-li člen na pravé straně této rovnice znamení záporné (obyčejné kyvadlo), jest

$$s = C_1 \sin ct + C_2 \cos ct,$$

což znamená jednoduchý harmonický kyv (oba členy vpravo se snadno mohou svésti na jeden).

Stojí-li v rovnici (1) vpravo znaménko $+$ (obrácené kyvadlo), je všeobecně

$$s = Ae^{ct} + Be^{-ct}. \qquad (2)$$

Nás zajímá hlavně tento případ. Hmotný bod se nachází v b' (obr. 1.) a obdrží takovou rychlost ve směru na levo, aby právě dosáhl bodu O'; s je vzdálenost hmotného bodu od O'; pro $s = o$ je též rychlost $\frac{ds}{dt} = o$.

Podmínka $s = o$ dává $Ae^{ct} = -Be^{-ct}$
podmínka $\frac{ds}{dt} = o$ dává $Ae^{ct} = +Be^{-ct}$.

Součet $2A^{ct} = o$, aneb $A = o$; jest tedy pro tento případ

$$s = Be^{-ct}. \qquad (3)$$

Pro $t = o$ (začátek pohybu) je $s = B = O'b'$, tím je určeno i B. Vidíme, že je $s = o$ až po čase $t = \infty$; tedy dosáhne hmotný bod b' nejvyššího bod O' oblouku teprve po čase nekonečně velikém.

Když *Galilei* vyšetřoval zákon volného pádu, měl před sebou, jak sám vypravuje, dvě možnosti. Buď je rychlost úměrna uplynulému času, aneb je úměrna vykonané dráze. Tento případ by vedl, jak myslil *Galilei*, na nemožný výsledek. *Poggendorffovi* *) i *Machovi* **), kteří to vyšetřovali, ušlo, že se tento předpoklad nachází u obráceného kyvadla, kterým se teprve věc náležitě objasní.

Rovnice $\frac{ds}{dt} = cs$, která vyjadřuje, že je rychlost úměrna vykonané dráze, dá sice snadno integrál $s = Ae^{ct}$, kterého používají *Poggendorff* i *Mach*, ale podmínka, aby bylo pro $t = o$ též $s = o$ i rychlost $\frac{ds}{dt} = o$, nemůže se vyplnit. Pro $s = o$ muselo by býti $t = -\infty$ a pro $t = o$ bylo by opět $s = A$. Tato obtíž povstává tím, že je O' poloha rovnovážná (ač jen labilní). Já jsem se této obtíži vyhnul tím, že jsem vzal pohyb *obrácený*, totiž od b' do O' (jako je na příklad hod do výšky obráceným pohybem volného pádu dolů).***)

U obráceného kyvadla musí býti vyšinutí velmi malé má-li býti síla (i rychlost) úměrna vyšinutí. Ale máme ještě jeden

---

*) Geschichte der Physik, 1879, str. 225.

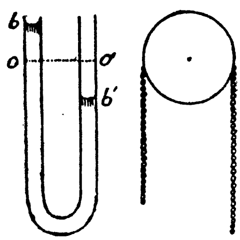
**) Die Mechanik in ihrer Entwicklung, VII. Aufl., str. 245.

***) *Mach*, který se též jako *Poggendorff* omezuje na rovnici $s = Ae^{ct}$ praví, že má-li nastati pohyb, nesmí rychlost býti na začátku pro $t = o$ rovna nulle (hmotný bod obráceného kyvadla, který je v rovnováze v poloze O', musí dostati malý impuls), což je arci pravdivé. Stanko *Hondl* (profesor záhřebské university) upozornil mne, že podobná rovnice platí pro případ, kdybychom uložili nějaký kapitál na stále nepřetržité zúročení (kde se hned v příštím okamžiku kapitál s úroky dále zúročuje). Tehdy je totiž

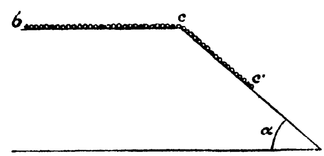
$$D = D_0 e^{\frac{p}{100}t},$$

kde je D_0 uložený kapitál, p počet procent, t čas počítán na roky (rovnice ta se dokáže snadno pomocí věty, že je $e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p$, kde $n = \infty$). Neuložíme-li nic na počátku (= nemá-li hmotný bod počáteční rychlosti), nemůžeme očekávati i dále žádný zúročený kapitál.

druh obráceného kyvadla, kde nemusí býti vyšinutí malé. K pokusům o jednoduchém kyvu bere se nyní často skleněná trubice zahnutá v podobu U (obr. 2.), naplněná tekutinou. V rovnováze stojí tekutina vpravo i vlevo stejně vysoko do O i O'. Stlačíme-li jeden povrch do b', stoupne druhý do b a síla je rovna tíži sloupce $2Ob$, tedy úměrna vyšinutí Ob. Otočíme-li trubici otvory dolů, máme obrácené kyvadlo. Tekutina by sice nevytekla, není-li trubka přespříliš široká, je-li opět O i O' v stejné výšce, ale názorněji můžeme místo ní mysliti na těžký ohebný řetízek, který jde bez tření přes kladku (obr. 2., pravá strana);



Obr. 2.



Obr. 3.

porušíme-li rovnováhu, je síla i rychlost úměrna vyšinutí. *Mach**) má též jeden příklad, kde je rychlost úměrna vyšinutí. Na vodorovné rovině bc (obr. 3.), která je zakončena rovinou šikmou, leží těžký řetízek bez tření. Přijde-li malý díl řetízku na šikmou rovinu, začne pohyb. Dle poučky, že je živá síla rovna práci tíže, můžeme napsati

$$\frac{\mu l v^2}{2} = \mu g \sin\alpha \times \frac{s}{2},$$

a z toho následuje

$$v = s\sqrt{\frac{g \sin\alpha}{l}};$$

l je délka řetízku, $s = cc'$ vykonaná dráha, v rychlost, μ hmota jedničky délkové. Rychlost je tedy úměrna vykonané dráze s. Vidí se, že nebyl již *Mach* daleko od případu označeného

*) V díle dříve vzpomenutém str. 314.

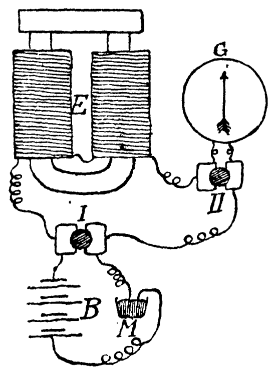
v obrazu 2. vpravo, ale přece netušil, že by vedl k obrácenému kyvadlu.

Exponenciální rovnice pro obrácené kyvadlo

$$s = Be^{-ct}$$

častěji se objevuje ve fysice.

Tak při samoindukci, jestliže proud spojíme anebo baterii vyřadíme. Tento poslední případ krátce vysvětlím, aby nepovstalo nedorozumění.*)



Obr. 4.

Nechť je B baterie (obr. 4.), E co možná veliký elektromagnet *s kotvou* (pro zvětšení samoindukce), G je poněkud citlivější galvanometr (nejlépe aperiodický s pohyblivou cívkou), I i II jsou známé kovové zátky, kterými se docílí krátkého spojení. Zátka I je vytažena, zátka II je zasazena (chrání totiž galvanometr před silným proudem; je-li v pořádku, nejde vůbec proud do galvanometru).

Proud se pustí nějaký čas elektromagnetem a potom se zátka I pevně zasadí: v tom okamžiku je účinek baterie na elektromagnet úplně přerušen. Aby se baterie zbytečně nekazila „krátkým spojením", a aby byl i začátečník úplně přesvědčen, že baterie neúčinkuje, přeruší se u M (kde se nachází rtuť) ihned spojení.**) Po zastrčení zátky I počítáme sekundy a asi

*) Možná že přijde i zde popsaný snadný školní pokus vhod.

**) Zbývá i času též druhý drát baterie odepnouti, což na začátečníka přesvědčivě působí.

za 15 neb 20 sekund (podle velikosti elektromagnetu) vytáhneme zátku *II*: galvanometr ukazuje proud. Při velikých elektromagnetech může uplynouti i několik minut. Proud, který ještě potrvá po vyloučení baterie, a který se obyčejně nazývá „extra proudem při přerušení“ („Öffnungs-Extrastrom“) (ačkoli je to název nesmyslný, jelikož se proud přerušit nesmí) rovná se dle známého vzorce

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L} t},$$

ovšem v případě, že bychom neupotřebili žádného železa; ale pak bychom museli užíti velmi velikých spirál a velmi citlivého galvanometru, kdežto zde dostačí obyčejný větší elektromagnet, jak se nacházejí v školních sbírkách; arci není potom koeficient samoindukce L konstantní, a naše rovnice vyjadřuje klesání proudu jen velmi zhruba.

S exponenciální rovnicí obráceného kyvadla setkáváme se též při vedení tepla v tyčích; tam znamená křivku temperatury na nekonečné tyči, která se zahřívá u jednoho kraje na stálou temperaturu, jsouc umístěna ve vzduchu.*)

I klesání teploty tělesa chladnoucího řídí se zákonem exponenciálním. Myslím, že by se dalo takových příkladů pro exponenciální zákon ještě najíti více.

Vidí se tedy z těchto poznámek, že se nedoporučuje úplně zanedbávati obrácené kyvadlo při vyučování, nejen proto, že je doplňkem obyčejného kyvadla, ale též proto, že to je klasický případ pro exponenciální zákon, s kterým se ve fysice častěji setkáváme.

O některých druzích manometrů.

† Dr. **Jaroslav Vránek**, bývalý assistent čes. techniky v Brně.

Při jisté práci z oboru fotochemie bylo zapotřebí měřiti tlak chloru v rozsahu 0—50 *mm Hg* s přesností alespoň 1⁰/₀. Ježto chlor porušuje rtuť a v daném případě nebylo radno pokrýti meniskus rtuťový ochrannou vrstvou na př. konc. kyseliny

*) *Strouhal*, Thermika, str. 447.