Antonín Libický

O dvojných součinech vektorových. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 48 (1919), No. 1-2, 59--65

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121115`

$M'S_3$ a $A''S_2$, $M''S_3$ zjednáme si další body M_1' a M_1'' kuželosečky K. Tím je dána kuželosečka K pěti body. Střed křivosti v bodě M_1 sestrojíme tak, že sestrojíme tečnu v bodě M_1 a pak použijeme opět Sobotkovy konstrukce středu křivosti, dána-li kuželosečka čtyřmi body a tečnou v jednom z nich.

O dvojných součinech vektorových.

Napsal Ph. Dr. **Vlad. Libický.**

W. Gibbs pojednává ve své „Vector Analysis" (pag. 306) o zvláštních součinech dvou dyad, jež nazývá *dvojnými* (*double products*); rozeznává pak dva druhy těchto součinů: *double dot product* a *double cross product*. První z nich jest definován vzorcem:

$$\mathbf{al} : \mathbf{bm} = (\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b})(\mathbf{l} \,.\, \mathbf{m}), \tag{1}$$

v němž dyady $\mathbf{al}$ a $\mathbf{bm}$ jsou činitelé součinu a dvojtečka : znaménkem jeho.*) Výsledek jest součin skalárních součinů $\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b}$ a $\mathbf{l} \,.\, \mathbf{m}$, tedy veličina skalární; i může tento dvojný součin vhodně býti nazván *skalárním.***)

Druhý ze zmíněných dvojných součinů jest definován vzorcem:

$$\mathbf{al} \overset{\times}{\times} \mathbf{bm} = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] [\mathbf{l} \times \mathbf{m}]; \tag{2}$$

znaménko jeho jest $\overset{\times}{\times}$ a výsledek dyadický součin vektorů $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ a $\mathbf{l} \times \mathbf{m}$. Zoveme pak tento dvojný součin *vektoriálním.****)

Jest zřejmo, že k těmto dvěma druhům dvojných součinů lze připojiti ještě třetí, jehož výsledkem jest (alespoň v trojroz-

---

*) Ježto se ve vektorové analysi neužívá tohoto znaménka pro výkon dělení, není se obávati, že bude dvojné násobení zaměněno s dělením.

**) Analytický tvar jeho jest:

$$\mathbf{al} : \mathbf{bm} = a_1 b_1 l_1 m_1 + a_1 b_1 l_2 m_2 + a_1 b_1 l_3 m_3 + a_2 b_2 l_1 m_1 + a_2 b_2 l_2 m_2 + \\ + a_2 b_2 l_3 m_3 + a_3 b_3 l_1 m_1 + a_3 b_3 l_2 m_2 + a_3 b_3 l_3 m_3, \tag{1a}$$

je-li $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$ atd.

***) Složitějšího analytického tvaru jeho tuto neuvádím. Poznamenávám, že součiny skalární kladu do závorek tvaru ( ), vektorové [ ], dyadické { }; kde by se však tyto závorky hromadily, vynechávám je.

měrném prostoru) vektor; definován jest vzorcem:

$$\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm} = (\mathbf{a} \, . \, \mathbf{b}) \, [\mathbf{l} \times \mathbf{m}] \, {}^{*)} \qquad (3)$$

aneb

$$\mathbf{al} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm} = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \, (\mathbf{l} \, . \, \mathbf{m}). \qquad (3^a)$$

Mezi oběma těmi součiny jest jednoduchý vztah; poněvadž totiž dle tohoto posledního vzorce:

$$\mathbf{la} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{mb} = [\mathbf{l} \times \mathbf{m}] \, (\mathbf{a} \, . \, \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \, . \, \mathbf{b}) \, [\mathbf{l} \times \mathbf{m}],$$

platí

$$\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm} = \mathbf{la} \dot{\times} \mathbf{mb}.$$

Dyady **al** a **la** nazýváme jak známo *sdruženými***) a znamenáme $\mathbf{la} = \mathbf{al}_C$, pročež

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm} &= \mathbf{al}_C \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm}_C \\ \text{a podobně} \quad \mathbf{al} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm} &= \mathbf{al}_C \dot{\times} \mathbf{bm}_C. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Též platí, jak se snadno přesvědčíme, vzorce:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm}_C &= \mathbf{al}_C \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm} \\ \mathbf{al} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm}_C &= \mathbf{al}_C \dot{\times} \mathbf{bm}. \end{aligned}\right\} \qquad (4^a)$$

Dle těchto vzorců můžeme tedy proměniti násobení $\dot{\times}$ v násobení $\underset{\cdot}{\times}$ a naopak; jest jen třeba položiti za oba činitele dyady sdružené.

Součin $\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm}$ lze nazvati *skalárovektoriálním,* součin $\mathbf{al} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm}$ *vektoroskalárním.*

Z rovnic (3) a (3^a) odvodíme vztah mezi všemi uvedenými druhy dvojných součinů. Násobením jich totiž obdržíme:

$$\begin{aligned} [\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm}] \, [\mathbf{al} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm}] &= (\mathbf{a} \, . \, \mathbf{b}) \, [\mathbf{l} \times \mathbf{m}] \, [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \, (\mathbf{l} \, . \, \mathbf{m}) \\ &= (\mathbf{a} \, . \, \mathbf{b}) \, (\mathbf{l} \, . \, \mathbf{m}) \, [\mathbf{l} \times \mathbf{m}] \, [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]. \end{aligned}$$

Dle rovnic (1) a (2) položme na pravé straně této rovnice za $(\mathbf{a} \, . \, \mathbf{b}) \, (\mathbf{l} \, . \, \mathbf{m})$ dvojný součin skalární $\mathbf{al} : \mathbf{bm}$ a za $[\mathbf{l} \times \mathbf{m}] \, [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$ dvojný součin vektoriální $\mathbf{la} \overset{\times}{\times} \mathbf{mb} = \mathbf{al}_C \overset{\times}{\times} \mathbf{bm}_C$: tudíž bude

$$\left.\begin{aligned} [\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm}] \, [\mathbf{al} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm}] &= (\mathbf{al} : \mathbf{bm}) \, \{\mathbf{al}_C \overset{\times}{\times} \mathbf{bm}_C\} \\ \text{a podobně} \, [\mathbf{al} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm}] \, [\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm}] &= (\mathbf{al} : \mathbf{bm}) \, \{\mathbf{al} \overset{\times}{\times} \mathbf{b} \quad \}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

---

*) Součin $\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm}$ uvádí, pokud mi známo, po prvé *Jaumann* ve svém pojednání „Elektromagnetische Theorie" (Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, 1908) pag. 13 a nazývá jej (vzhledem k výsledku součinu) *vektorovým*. To platí však jen v trojrozměrném prostoru; v prostorech vícerozměrných mohl by výsledek tohoto součinu býti též dyadou.

**) *Ant. Libický,* Vektorová analysis, pag. 14.

Pro dvojné součiny skalárovektoriální a vektoroskalární lze odvoditi ještě jiné výrazy.

Dle známého vzorce pro skalární součin vektoru a dyady

$$\mathbf{a} \,.\, \mathbf{bc} = (\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b})\, \mathbf{c}\ ^{*)}$$

obdržíme, kladouce za $\mathbf{c}$ vektoriální součin $\mathbf{l} \times \mathbf{m}$,

$$\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b}\,[\mathbf{l} \times \mathbf{m}] = (\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b})\,[\mathbf{l} \times \mathbf{m}] = -\,(\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b})\,[\mathbf{m} \times \mathbf{l}],$$

tedy dle (3)

$$\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm} = -\,\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b}\,[\mathbf{m} \times \mathbf{l}], \qquad (5^a)$$

kde $\mathbf{b}\,[\mathbf{m} \times \mathbf{l}]$ jest dyada. Použijeme-li na pravé straně vzorce pro vektoriální součin dyady a vektoru, totiž $\mathbf{bm} \times \mathbf{l} = \mathbf{b}\,[\mathbf{m} \times \mathbf{l}]$,**) nabudeme rovnice

$$\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm} = -\,\mathbf{a} \,.\, \mathbf{bm} \times \mathbf{l}. \qquad (5^b)$$

Obdobně nalezneme

$$\mathbf{al} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm} = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]\, \mathbf{m} \,.\, \mathbf{l}.$$

Jiný výraz pro dvojný součin vektorový obdržíme, vycházejíce ze známé definice skalárního součinu dvou dyad;***) dle ní jest

$$\mathbf{la} \,.\, \mathbf{bm} = (\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b})\, \mathbf{lm}.$$

Vektorová část tohoto součinu jest

$$(\mathbf{la} \,.\, \mathbf{bm})_v = (\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b})\,[\mathbf{l} \times \mathbf{m}];$$

tudíž dle (3)

$$\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm} = (\mathbf{la} \,.\, \mathbf{bm})_v = (\mathbf{al}_C \cdot \mathbf{bm})_v \,.\, ^{\dagger)} \qquad (6)$$

Obdobně vyvodíme vzorec

$$\mathbf{al} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm} = (\mathbf{al} \,.\, \mathbf{bm}_C)_v. \qquad (6^a)$$

Geometricky lze dvojný součin vektorový $\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm}$ znázorniti dle vzorce (3) vektorem, kolmým k rovině zadních členů $\mathbf{l}$ a $\mathbf{m}$ obou daných dyad, jehož délka jest rovna $ablm \cos \widehat{\mathbf{ab}} \sin \widehat{\mathbf{lm}}$, jak plyne bezprostředně z definic skalárního a vektoriálního součinu dvou vektorů.††) Nazveme-li $\mathbf{n}_1$ jednotkový vektor, kolmý k vektorům $\mathbf{l}$ a $\mathbf{m}$, jest

$$\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm} = (ablm \cos \widehat{\mathbf{ab}} \sin \widehat{\mathbf{lm}})\, \mathbf{n}_1. \qquad (7)$$

---

*) Ibid. pag. 22.

**) Ibid. pag. 23.

***) Ibid. pag. 134.

†) Tímto výrazem definuje dvojný součin vektorový *Jaumann* ve výše uvedeném pojednání.

††) *Ant. Libický*, Vektorová analysis, pag. 7 a 9.

Podobně vyjádříme součin

$$\mathbf{al} \times \mathbf{bm} = (ablm \sin \widehat{\mathbf{ab}} \cos \widehat{\mathbf{lm}})\, \mathbf{r}_1, \qquad (7^a)$$

značí-li $\mathbf{r}_1$ jednotkový vektor kolmý k předním členům **a** a **b**.

Z těchto rovnic plyne: Dvojný součin vektorový $\left\{\begin{matrix}\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm} \\ \mathbf{al} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm}\end{matrix}\right\}$ jest roveň nulle, jsou-li buď $\left\{\begin{matrix}\text{přední} \\ \text{zadní}\end{matrix}\right\}$ vektory obou dyad k sobě kolmy, nebo jich $\left\{\begin{matrix}\text{zadní} \\ \text{přední}\end{matrix}\right\}$ vektory navzájem rovnoběžny, nebo nastanou-li oba tyto případy; neboť jen při těchto zvláštních polohách vektorů jest hodnota jedné z geometrických funkcí, vyskytujících se v rovnicích (7) a (7^a), rovna nulle.

Utvoříme-li dyadický podíl*) $\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm}$ a $\mathbf{al} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm}$, totiž

$$\frac{\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm}}{\mathbf{al} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm}} = \mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm} \frac{1}{\mathbf{al} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm}} = \frac{(\cos \widehat{\mathbf{ab}} \sin \widehat{\mathbf{lm}})\, \mathbf{n}_1}{(\sin \widehat{\mathbf{ab}} \cos \widehat{\mathbf{lm}})\, \mathbf{r}_1}$$

čili

$$\frac{\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm}}{\mathbf{al} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm}} = \frac{tg\, \widehat{\mathbf{lm}}}{tg\, \widehat{\mathbf{ab}}} \frac{\mathbf{n}_1}{\mathbf{r}_1}, \qquad (m)$$

kde $\frac{\mathbf{n}_1}{\mathbf{r}_1}$ jest dyadický podíl jednotkových vektorů $\mathbf{n}_1$ (kolmého k **l**, **m**) a $\mathbf{r}_1$ (kolmého k **a**. **b**). Hodnota tohoto podílu jest tedy nezávislá na délce vektorů **a**, **b**, **l**, **m**. Násobíme-li obě strany této rovnice dvojně a skalárně týmž podílem $\frac{\mathbf{n}_1}{\mathbf{r}_1}$, dostaneme

$$\frac{\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm}}{\mathbf{al} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm}} : \frac{\mathbf{n}_1}{\mathbf{r}_1} = \frac{tg\, \widehat{\mathbf{lm}}}{tg\, \widehat{\mathbf{ab}}} \frac{\mathbf{n}_1}{\mathbf{r}_1} : \frac{\mathbf{n}_1}{\mathbf{r}_1}.$$

Na levé straně této rovnice jest dle (1)

$$\frac{\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm}}{\mathbf{al} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm}} : \frac{\mathbf{n}_1}{\mathbf{r}_1} = \mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm} \frac{1}{\mathbf{al} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm}} : \mathbf{n}_1 \frac{1}{\mathbf{r}_1} = \frac{\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm} \,.\, \mathbf{n}_1}{\mathbf{al} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm} \,.\, \mathbf{r}_1};$$

na pravé straně jest podobně

$$\mathbf{n}_1 \frac{1}{\mathbf{r}_1} : \mathbf{n}_1 \frac{1}{\mathbf{r}_1} = (\mathbf{n}_1 \,.\, \mathbf{n}_1)\left(\frac{1}{\mathbf{r}_1} \cdot \frac{1}{\mathbf{r}_1}\right) = 1,$$

*) Ibid. pag. 24.

ježto $\mathbf{n}_1$ a $\mathbf{r}_1$ mají délky rovné jednotce. Tudíž platí rovnice

$$\frac{\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm} \,.\, \mathbf{n}_1}{\mathbf{al} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm} \,.\, \mathbf{r}_1} = \frac{tg\, \widehat{\mathbf{lm}}}{tg\, \widehat{\mathbf{ab}}}. \tag{8}$$

Odvozujíce tento vzorec poznali jsme, jak lze rovnici (m), jejíž obě strany jsou dyady, přetvořiti v rovnici (8), jejíž strany jsou skaláry; bylo toliko třeba obě strany rovnice (m) násobiti dvojně a skalárně touž vhodnou dyadou; podobně můžeme z rovnice, jejíž všechny členy jsou dyady, vyvoditi rovnici vektorovou, užijeme-li skalárovektoriálního nebo vektoroskalárního násobení.

Ze vzorců (7) odvodíme snadno hodnoty dvojných součinů vektorových dyad základních (jichž činitelé jsou jednotkové vektory souřadnicové $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$); i obdržíme:

$$\begin{aligned} \mathbf{ij} \dot{\times} \mathbf{ik} &= \mathbf{jj} \dot{\times} \mathbf{jk} = \mathbf{kj} \dot{\times} \mathbf{kk} = -\mathbf{ik} \dot{\times} \mathbf{ij} = -\mathbf{jk} \dot{\times} \mathbf{jj} = \\ &= -\mathbf{kk} \dot{\times} \mathbf{kj} = \mathbf{i}, \\ \mathbf{ik} \dot{\times} \mathbf{ii} &= \mathbf{jk} \dot{\times} \mathbf{ji} = \mathbf{kk} \dot{\times} \mathbf{ki} = -\mathbf{ii} \dot{\times} \mathbf{ik} = -\mathbf{ji} \dot{\times} \mathbf{jk} = \\ &= -\mathbf{ki} \dot{\times} \mathbf{kk} = \mathbf{j}, \\ \mathbf{ii} \dot{\times} \mathbf{ij} &= \mathbf{ji} \dot{\times} \mathbf{jj} = \mathbf{ki} \dot{\times} \mathbf{kj} = -\mathbf{ij} \dot{\times} \mathbf{ii} = -\mathbf{jj} \dot{\times} \mathbf{ji} = \\ &= -\mathbf{kj} \dot{\times} \mathbf{ki} = \mathbf{k}. \end{aligned} \tag{9}$$

Zákony součinu skalárovektoriálního a vektoroskalárního jsou:

1. Tyto dvojné součiny nejsou kommutativní; jestiť dle (3)

$$\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm} = (\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b})\,[\mathbf{l} \times \mathbf{m}] = -(\mathbf{b} \,.\, \mathbf{a})\,[\mathbf{m} \times \mathbf{l}] = -\mathbf{bm} \dot{\times} \mathbf{al}$$

a podobně $$\mathbf{al} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm} = -\mathbf{bm} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{al}.$$

Tím liší se tyto dvojné součiny od dvojných součinů skalárních a vektoriálních, jichž činitele lze násobiti v libovolném pořádku.

2. Skalárovektoriální a vektoroskalární součiny vyhovují zákonu distributivnímu; neboť dle (5^a) jest na př.

$$\begin{aligned} \mathbf{al} \dot{\times} \{\mathbf{bm} + \mathbf{cn}\} &= -\mathbf{a} \,.\, \{\mathbf{bm} + \mathbf{cn}\} \times \mathbf{l} = -\mathbf{a} \,.\, \mathbf{bm} \times \mathbf{l} - \\ &- \mathbf{a} \,.\, \mathbf{cn} \times \mathbf{l} = \mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm} + \mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{cn}. \end{aligned}$$

3. Dvojná násobení $\dot{\times}$ a $\underset{\cdot}{\times}$ jsou associativní vzhledem k veličinám skalárním:

$$x\,[\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm}] = \{x\, \mathbf{al}\} \dot{\times} \mathbf{bm} = \mathbf{al} \dot{\times} \{x\, \mathbf{bm}\},$$

$$x\,[\mathbf{al} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm}] = \{x\, \mathbf{al}\} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm} = \mathbf{al} \underset{\cdot}{\times} \{x\, \mathbf{bm}\}.$$

Součin tří dyad **al**, **bm**, **cn**.

Formálně jsou možny tyto případy: $\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm} \dot{\times} \mathbf{cn}$, $\mathbf{al} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{cn}$, $\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{cn}$, $\mathbf{al} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm} \times \mathbf{cn}$.

Prvé dva součiny nemají však významu. Kdybychom totiž provedli naznačený výkon, na př. v prvním výraze $\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm} \dot{\times} \mathbf{cn}$ (obdobně dle vzorce (3) pro součin $\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm}$), obdrželi bychom jako první činitel veličinu $(\mathbf{a} . \mathbf{b}) . \mathbf{c}$, skalární součin vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ násobený skalárně vektorem $\mathbf{c}$, což, jak známo, nemá významu.*)

Poslední dva z uvedených součinů zoveme *skalárovektoriálními* (nebo *vektoroskalárními*) *součiny tří dyad.* Hodnotu prvního obdržíme, utvoříme-li z předních členů skalární součin tří vektorů $\mathbf{a} . [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]$ *) a ze zadních členů součin $[\mathbf{l} \times \mathbf{m}] . \mathbf{n}$ a násobíme-li pak skalárně oba takto utvořené součiny, tudíž (vynechajíce závorky)

$$\begin{aligned} &\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{cn} = \mathbf{a} . \mathbf{b} \times \mathbf{c} \quad \mathbf{l} \times \mathbf{m} . \mathbf{n} \\ \text{a obdobně} \quad &\mathbf{al} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm} \dot{\times} \mathbf{cn} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} . \mathbf{c} \quad \mathbf{l} . \mathbf{m} \times \mathbf{n}. \end{aligned} \tag{10}$$

Poněvadž $\mathbf{a} . [\mathbf{b} \quad \mathbf{c}] = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] . \mathbf{c}$, $[\mathbf{l} \times \mathbf{m}] . \mathbf{n} = \mathbf{l} . [\mathbf{m} \times \mathbf{n}]$, jsou si pravé strany obou posledních rovnic rovny, z čehož plyne, že oba součiny $\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{cn}$ a $\mathbf{al} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm} \dot{\times} \mathbf{cn}$ jsou totožny; pročež jest jen jediný takový součin, totiž

$$\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{cn} = \mathbf{al} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm} \dot{\times} \mathbf{cn} = (\mathbf{abc})(\mathbf{lmn}). \tag{10a}$$

Hodnota tohoto součinu jest součin obsahů dvou rovnoběžnostěnů; hrany prvního jsou přední vektory daných dyad, hrany druhého jsou jejich zadní vektory.

Jest však třeba podotknouti, že v tomto součinu nelze dva činitele uzavříti v závorky vzhledem k třetímu; výraz takto utvořený, na př. $[\mathbf{al} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm}] \dot{\times} \mathbf{cn}$, neměl by žádného významu. Provedeme-li totiž výkon v závorkách $[\mathbf{al} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm}] = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \; \mathbf{l} . \mathbf{m}$, obdržíme vektor násobený skalárním součinitelem, a ten nelze skalárovektoriálně násobiti dyadou $\mathbf{cn}$.

Ze známých relací $\mathbf{a} . [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = \mathbf{b} . [\mathbf{c} \times \mathbf{a}] = \mathbf{c} . [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] . \mathbf{c} = [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] . \mathbf{a} = [\mathbf{c} \times \mathbf{a}] . \mathbf{b}$ plyne, že pořad činitelů lze ve skalárovektoriálních (nebo vektoroskalárních) součinech tří dyad cyklicky měniti:

$$\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{cn} = \mathbf{bm} \dot{\times} \mathbf{cn} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{al} = \mathbf{cn} \dot{\times} \mathbf{al} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{bm}. \tag{10a}$$

---

*) *Ant. Libický*, Vektorová analysis, pag. 17. Výraz $(\mathbf{a} . \mathbf{b}) . \mathbf{c}$ nesmí býti zaměněn se součinem $(\mathbf{a} . \mathbf{b}) \mathbf{c}$, který jest ovšem možný.

*) Ibid. pag. 19.

Součiny ty nemění však ani potom své hodnoty zaměníme-li první dyadu s poslední

$$\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{cn} = \mathbf{cn} \dot{\times} \mathbf{bm} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{al}, \qquad (10^b)$$

neboť pravá strana rovná se též součinu $(\mathbf{abc})(\mathbf{lmn})$. Položíme-li ve výraze $(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})(\mathbf{l}\,.\,\mathbf{m})$ pro dvojný součin skalární $\mathbf{al}:\mathbf{bm}$ (vz. 1) vektor $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ místo $\mathbf{b}$ a vektor $\mathbf{m}\times\mathbf{n}$ místo $\mathbf{m}$, obdržíme součin $\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}\times\mathbf{c}\;\;\mathbf{l}\,.\,\mathbf{m}\times\mathbf{n}$, což jest dle (10) hodnota skalárovektoriálního součinu $\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{cn}$. Tudíž lze psáti

$$\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{cn} = \mathbf{al} : [\mathbf{b}\times\mathbf{c}]\,[\mathbf{m}\times\mathbf{n}]$$

čili vzhledem k (2)

$$\mathbf{al} \dot{\times} \mathbf{bm} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{cn} = \mathbf{al} : \mathbf{bm} \overset{\times}{\underset{\times}{}} \mathbf{cn}, \qquad (11)$$

kde pravou stranu zoveme dvojným *skalárním součinem tří dyad.*

Součin ten rovná se nulle, jsou-li dva jeho činitelé rovnoběžny; z toho poznáváme, že ze skalárovektoriálních součinů tří základních dyad, utvořených z $\mathbf{ii}$, $\mathbf{ij}$, $\mathbf{ik}$ atd., mají hodnoty od nully rozdílné jen součiny, jichž všechny přední neb všechny zadní vektory jsou k sobě vzájemně kolmé; hodnota těchto součinů jest pak ± 1, na př.

$$\mathbf{ii} \dot{\times} \mathbf{jj} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{kk} = \mathbf{ij} \dot{\times} \mathbf{jk} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{ki} = \mathbf{ik} \dot{\times} \mathbf{ji} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{lj} = 1,$$
$$\mathbf{ik} \dot{\times} \mathbf{jj} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{ki} = \mathbf{ii} \dot{\times} \mathbf{kj} \underset{\cdot}{\times} \mathbf{jk} = -1.$$

(Dokončení.)

O obráceném kyvadle.

Napsal prof. Dr. **Čeněk Dvořák** v Záhřebě.*)

Obrácené kyvadlo se ve vyučování mechanice docela zanedbává bezpochyby proto, že nenachází upotřebení (vyjma u nynějších seismografů). Chci poukázati tímto článkem na to, že zasluhuje obrácené kyvadlo více pozornosti.

U obyčejného kyvadla cO (obr. 1.) je síla úměrna vyšinutí $Ob = s$ z polohy rovnovážné, dokud je toto velmi malé. Síla p ve směru pohybu je totiž $-p = P \sin \alpha = P\,.\,\alpha$; síla p smě-

---

*) O tomto předmětu jsem též pojednával chorvatsky v časopisu „Nastavni vjesnik" 1910 a potom německy v „Zeitschr. für physik. und chem. Unterr. 1912, 1. Heft.