Antonín Libický

Úvod do vektorové analyse. [IX.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 37 (1908), No. 2, 149--156

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121105

4. Lecherovo arrangement. Tytéž formule, jež řeší případy rovnoběžných napnutých drátů, hodí se též pro dráty radiálně z jednoho bodu vycházející. Tyto považujeme za nekonečně tenké. Protnou vlnoplochu v bodech

$$a_\nu, \ \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Sdělíme jen výsledek. Funkce f a f_m (obsahující též čas!) zní pak

$$f(z) = a + bi + \sum_1^n{}^\nu T_\nu\left(\frac{1}{z - a_\nu}\right),$$

$$f_m(z) = a_m + b_m i + \sum_1^n{}^\nu T_{m\nu}\left(\frac{1}{z - a_\nu}\right).$$

Každé T jest celistvou transcendentou; žádné neobsahuje stálý člen. Jde-li o vlny kulové, jest

$$a + bi \equiv 0; \quad a_m + b_m i \equiv 0.$$

Transcendenty T_ν mají v bodě a_ν dojista podstatnou singulárnost. $T_{m\nu}$ ji míti mohou, ale bod a_ν může býti pro ně též pólem.

Toto řešení jest přibližné. Neboť průměr drátu musil by býti nullou, aby podmínka Maxwellovy theorie, že síla elektrická stojí na dokonalém vodiči kolmo, znamenala, že bod, v němž drát vlnoplochu protne, jest podstatně singulárný. Průměr drátu ale nesmí býti nullou, aby do elektromagnetického pole nenáležely body, v nichž celé transcendenty rostou nad libovolně velké číslo.

5. Lze vlnění světelné v cylindrických a kuželovitých svazcích paprsků, jež realisujeme pomocí čoček, vystihnouti pomocí soujemných funkcí, jež mají přirozené hranice?

Úvod do vektorové analyse.

Napsal řed. **Ant. Libický.**

(Pokračování.)

Položme po čtvrté

$$\mathbf{v} = uv \nabla w;$$

pak

$$div(uv \nabla w) = \nabla uv \,.\, \nabla w + uv\, div \nabla w$$
$$= u \nabla v \,.\, \nabla w + v \nabla u \,.\, \nabla w + uv \nabla^2 w.$$

Substitucí do vzorce (124^c) vychází

$$\int\int uv\nabla w\,.\,d\mathbf{p}=\int\int\int u\nabla v\,.\,\nabla w\,dS+\int\int\int v\nabla u\,.\,\nabla w\,dS$$
$$+\int\int\int uv\nabla^2 w\,dS. \qquad (126^a)$$

Vytkneme-li ve druhém a ve třetím integrálu na pravé straně $v\,dS$, obdržíme

$$\int\int uv\nabla w\,.\,d\mathbf{p}=\int\int\int u\nabla v\,.\,\nabla w\,dS$$
$$+\int\int\int v(\nabla u\,.\,\nabla w+u\nabla^2 w)\,dS;$$

ale dle (92^b)

$$\nabla u\,.\,\nabla w+u\nabla^2 w=\nabla u\,.\,\nabla w+u\,div\,\nabla w=div\,(u\nabla w),$$

pročež

$$\int\int uv\nabla w\,.\,d\mathbf{p}=\int\int\int u\nabla v\,.\,\nabla w\,dS$$
$$+\int\int\int v\,div\,(u\nabla w)\,dS. \qquad (126^b)$$

Podobně vyvodíme rovnici

$$\int\int uv\nabla w\,.\,d\mathbf{p}=\int\int\int v\nabla u\,.\,\nabla w\,dS$$
$$+\int\int\int u\,div\,(v\nabla w)\,dS. \qquad (126^c)$$

Rovnice tyto pochodí od *Thomsona* (lorda Kelvina).

Položme po páté

$$\mathbf{v}=\mathbf{t}\times\mathbf{u},$$

pak dle vzorce (102^b)

$$div\,\mathbf{v}=div\,[\mathbf{t}\times\mathbf{u}]=\mathbf{t}\,.\,curl\,\mathbf{u}-\mathbf{u}\,.\,curl\,\mathbf{t};$$

vložíme-li tyto hodnoty do (124^c), dostaneme

$$\int\int[\mathbf{t}\times\mathbf{u}]\,.\,d\mathbf{p}=\int\int\int\mathbf{t}\,.\,curl\,\mathbf{u}\,dS$$
$$-\int\int\int\mathbf{u}\,.\,curl\,\mathbf{t}\,dS; \qquad (127)$$

věty té užil po prvé *Poynting* vzhledem k poli elektrodynamickému.

Přestávajíce na těchto větách poznamenáváme ještě, že podobnými substitucemi lze vyvoditi analogické poučky z věty Stokesovy.

Druhý integrál plošný jest *vektoriální*, totiž

$$\mathbf{U} = \int\int \mathbf{v} \times d\mathbf{p}; \qquad (128)$$

vyšetříme hodnotu tohoto integrálu pro zvláštní případ, že plocha p, k níž integrace se vztahuje, jest uzavřená.

Jako při odvození vzorce (122) pro lineární integrál vektoriální násobíme opět obě strany rovnice (128) jednotkovým vektorem stálým $\mathbf{c}_1$; tím nabudeme

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{c}_1 = \int\int [\mathbf{v} \times d\mathbf{p}] \cdot \mathbf{c}_1.$$

Ježto dle známé relace $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c} = [\mathbf{c} \times \mathbf{a}] \cdot \mathbf{b}$ lze psáti

$$[\mathbf{v} \times d\mathbf{p}] \cdot \mathbf{c}_1 = [\mathbf{c}_1 \times \mathbf{v}] \cdot d\mathbf{p},$$

jest též

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{c}_1 = \int\int [\mathbf{c}_1 \times \mathbf{v}] \cdot d\mathbf{p}$$

a tudíž dle (124^c)

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{c}_1 = \int\int\int div\, [\mathbf{c}_1 \times \mathbf{v}]\, dS$$

čili vzhledem k (102^b)

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{c}_1 = \int\int\int \mathbf{c}_1 \cdot curl\, \mathbf{v}\, dS - \int\int\int \mathbf{v} \cdot curl\, \mathbf{c}_1\, dS.$$

Ale *curl* stálého vektoru $\mathbf{c}_1$ rovná se nulle, pročež

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_1 \cdot \int\int\int curl\, \mathbf{v}\, dS.$$

Má-li býti této rovnici vyhověno pro každé $\mathbf{c}_1$, musí

$$\mathbf{U} = \int\int\int curl\, \mathbf{v}\, dS$$

čili

$$\int\int \mathbf{v} \times d\mathbf{p} = \int\int\int curl\, \mathbf{v}\, dS. \qquad (129)$$

Podobnost tohoto vzorce se vzorcem (124^c) jest zřejmá.

V poli irrotationálním, kde $curl\, \mathbf{v} = 0$, jest hodnota plošného integrálu vektoriálního pro každou plochu uzavřenou právě tak rovna nulle, jako se annuluje v tomto poli hodnota lineárního integrálu skalárního pro každou uzavřenou křivku.

Pojednávajíce o poli skalarním poznali jsme integrál tvaru

$$\int\int\int \frac{v_n}{r_{0n}} dx_n dy_n dz_n \quad \text{nebo kratčeji} \quad \int\int\int \frac{v}{r} dS,$$

který jsme nazvali skalárním potenciálem a označili $Pot\, v$. Obdobný integrál zavádíme také v poli vektorovém; má pak tvar

$$\int\int\int \frac{\mathbf{v}_n}{r_{0n}} dx_n dy_n dz_n \quad \text{nebo kratčeji} \quad \int\int\int \frac{\mathbf{v}}{r} dS,$$

kde $\mathbf{v}_n$ (nebo $\mathbf{v}$) značí vektor v kterémkoli bodě $M_n(x_n, y_n, z_n)$ pole, r_{0n} (nebo r) vzdálenost tohoto bodu od pevného pólu $P(x_0, y_0, z_0)$ a $dS = dx_n dy_n dz_n$ obsah prostorového prvku u bodu M_n. Vhodně označujeme tento integrál $Pot\, \mathbf{v}$ a nazýváme jej *potenciálem vektoriálním.*

Jelikož

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k},$$

jest

$$Pot\, \mathbf{v} = \mathbf{i}\, Pot\, v_x + \mathbf{j}\, Pot\, v_y + \mathbf{k}\, Pot\, v_z\,; \tag{130}$$

lze tudíž vektoriální potenciál vyjádřiti potenciály skalárních částí v_x, v_y, v_z tří složek vektoru $\mathbf{v}$. Na základě tohoto vzorce můžeme použíti známek, odvozených v oddíle o poli skalárním, pro konvergenci potenciálů skalárních, abychom vyšetřili konvergenci potenciálů vektoriálních: jsou-li konvergentní tři potenciály $Pot\, v_x$, $Pot\, v_y$, $Pot\, v_z$, jest konvergentní též $Pot\, \mathbf{v}$. Zvláště důležitá jsou pole vektorová, jichž všem bodům příslušejí potenciály hodnot konečných a nepřetržitých; pole taková jsou obdobou skalárních polí potenciálních. V dalším chceme vždy předpokládati pole těchto vlastností, ač nebude-li jinak poznamenáno.

Použijeme-li vzorců

$$\frac{\partial\, Pot\, v}{\partial x_0} = Pot \frac{\partial v}{\partial x_n} \text{ atd.},$$

dokázaných pro pole skalární, můžeme snadno vyvoditi rovnice

$$\nabla_0 \,.\, Pot\, \mathbf{v} = Pot\, \nabla_n \,.\, \mathbf{v}, \tag{131ᵃ}$$

$$\nabla_0 \times Pot\, \mathbf{v} = Pot\, \nabla_n \times \mathbf{v}. \tag{132ᵃ}$$

Neboť dle prvního vzorce (77) a dle (78ᵇ) lze psáti

$$\nabla_0 \,.\, Pot\, \mathbf{v} = \frac{\partial\, Pot\, v_x}{\partial x_0} + \frac{\partial\, Pot\, v_y}{\partial y_0} + \frac{\partial\, Pot\, v_z}{\partial z_0},$$

čili vzhledem k uvedeným vzorcům

$$\nabla_0 \,.\, Pot\, \mathbf{v} = Pot\, \frac{\partial v_x}{\partial x_n} + Pot\, \frac{\partial v_y}{\partial y_n} + Pot\, \frac{\partial v_z}{\partial z_n}$$

$$= Pot \left(\frac{\partial v_x}{\partial x_n} + \frac{\partial v_y}{\partial y_n} + \frac{\partial v_z}{\partial z_n} \right) = Pot\, \nabla_n \,.\, \mathbf{v}.$$

Podobně dokáže se vzorec (132[a]).

Místo (131[a]) a (132[a]) píšeme také kratčeji

$$div\ Pot\ \mathbf{v} = Pot\ div\ \mathbf{v}, \qquad (131^b)$$

$$curl\ Pot\ \mathbf{v} = Pot\ curl\ \mathbf{v}, \qquad (132^b)$$

z čehož kommutativnost jednak operátorů *div* a *Pot*, jednak operátorů *curl* a *Pot* (kterou lze rozšířiti i na více činitelů) jest zřejmá.

Ze vzorce

$$Pot\, \mathbf{v} = \int\!\!\int\!\!\int \frac{\mathbf{v}_n}{\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2 + (z_n - z_0)^2}}\, dx_n\, dy_n\, dz_n$$

obdržíme differencováním

$$\frac{\partial\, Pot\, \mathbf{v}}{\partial x_0}$$

$$= \int\!\!\int\!\!\int \frac{(x_n - x_0)\, \mathbf{v}_n}{\sqrt{[(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2 + (z_n - z_0)^2]^3}}\, dx_n\, dy_n\, dz_n$$

nebo kratčeji

$$\frac{\partial\, Pot\, \mathbf{v}}{\partial x_0} = \int\!\!\int\!\!\int \frac{(x_n - x_0)\, \mathbf{v}_n}{r_{0n}^3}\, dS_n;$$

podobné výrazy vycházejí pro $\dfrac{\partial\, Pot\, \mathbf{v}}{\partial y_0}$ a $\dfrac{\partial\, Pot\, \mathbf{v}}{\partial z_0}$.

Ježto dle (63[b]) a (64)

$$\nabla\, Pot\, \mathbf{v} = \frac{\partial\, Pot\, \mathbf{v}}{\partial x_0}\, \mathbf{i} + \frac{\partial\, Pot\, \mathbf{v}}{\partial y_0}\, \mathbf{j} + \frac{\partial\, Pot\, \mathbf{v}}{\partial z_0}\, \mathbf{k},$$

jest též

$$\nabla\, Pot\, \mathbf{v}$$

$$= \int\!\!\int\!\!\int \frac{[(x_n - x_0)\, \mathbf{i} + (y_n - y_0)\, \mathbf{j} + (z_n - z_0)\, \mathbf{k}]\, \mathbf{v}_n}{r_{0n}^3}\, dS_n;$$

avšak

$$(x_n - x_0)\, \mathbf{i} + (y_n - y_0)\, \mathbf{j} + (z_n - z_0)\, \mathbf{k} = \mathbf{r}_{0n},$$

tudíž

$$\nabla\, Pot\, \mathbf{v} = \int\!\!\int\!\!\int \frac{\mathbf{r}_{0n}\, \mathbf{v}_n}{r_{0n}^3}\, dS_n. \qquad (133)$$

Z této rovnice plyne pro část skalární

$$\nabla \,.\, Pot\ \mathbf{v} = div\ Pot\ \mathbf{v} = \int\int\int \frac{\mathbf{r}_{0n} \,.\, \mathbf{v}_n}{r_{0n}^3}\, dS_n \qquad (134^a)$$

a pro část vektoriální

$$\nabla \times Pot\ \mathbf{v} = curl\ Pot\ \mathbf{v} = \int\int\int \frac{\mathbf{r}_{0n} \times \mathbf{v}_n}{r_{0n}^3}\, dS_n. \qquad (135^a)$$

Oba tyto integrály mají velkou důležitost v mathematické fysice; první z nich jmenujeme *integrálem Maxwellovým* a značíme jej *Max* **v**. Tudíž

$$Max\ \mathbf{v} = \int\int\int \frac{\mathbf{r}_{0n} \,.\, \mathbf{v}_n}{r_{0n}^3}\, dS_n. \qquad (134^b)$$

Druhý integrál nazývá se *integrálem Laplace-ovým* a značí se *Lap* **v**: pročež

$$Lap\ \mathbf{v} = \int\int\int \frac{\mathbf{r}_{0n} \times \mathbf{v}_n}{r_{0n}^3}\, dS_n. \qquad (135^b)$$

Z uvedeného vysvítá, že platí vztahy

$$div\ Pot\ \mathbf{v} = Max\ \mathbf{v} \qquad (136^a)$$

a

$$curl\ Pot\ \mathbf{v} = Lap\ \mathbf{v}. \qquad (136^b)$$

Budiž zde učiněna zmínka o významu obou zavedených integrálů v theoretické fysice. Integrál Maxwellův stanoví na př. potenciální úkon celého magnetu; pro tento úkon odvodil totiž Maxwell výraz *)

$$\int\int\int \frac{A(x_n - x_0) + B(y_n - y_0) + C(z_n - z_0)}{r^3}\, dx_n\, dy_n\, dz_n,$$

kde značí A, B, C složky intensity magnetisace, která jest vektorem **I**, v určitém bodu (x_n, y_n, z_n) magnetu; x_0, y_0, z_0 jsou souřadnice bodu zevnějšího, v němž potenciální úkon určujeme a r jest velikost průvodiče vedeného z bodu (x_0, y_0, z_0) k bodn (x_n, y_n, z_n). Integrace vztahuje se k celému prostoru, magnetem vyplněnému.

Dle vzorce (6) lze za čitatel zlomku za znamením integrace psáti $\mathbf{r} \,.\, \mathbf{I}$, tudíž zmíněný potenciální úkon jest

$$\int\int\int \frac{\mathbf{r} \,.\, \mathbf{I}}{r^3}\, dS = Max\ \mathbf{I}.$$

*) Viz Dr. A. *Seydler*: Theoretická fysika. Díl II., pag. 135, vzorec 7.

Význam integrálu Laplace-ova jest pak tento:

Elementární zákon elektromagnetického působení, nalezený Laplace-em, zní: Vzájemné působení proudové částice *ids*, kterou lze vyznačiti vektorem $d\mathbf{i}$, a magnetické částice o jednotce magnetismu jest vektor kolmý na rovinu, určenou prvkem ds a přímkou r, obě částice spojující, a stanovený výrazem

$$\frac{ids\, sin(r, ds)}{r^2} \text{*)}.$$

Výraz ten lze také psáti ve formě

$$\frac{ids\, r\, sin(r, ds)}{r^3};$$

čitatel jest patrně vektor, kterým dle vzorce (7) představen jest vektoriální součin $\mathbf{r} \times d\mathbf{i}$, tudíž vzájemné působení proudové a zmíněné magnetické částice určuje vektor

$$\frac{\mathbf{r} \times d\mathbf{i}}{r^3}.$$

Myslíme-li si nyní část prostoru, vyplněnou proudovými prvky $d\mathbf{i}\, dS$, jest vzájemné působení takového prostoru a jednotky magnetismu dáno integrálem

$$\int\int\int \frac{\mathbf{r} \times d\mathbf{i}}{r^3}\, dS,$$

což jest integrál Laplace-ův.

Poznamenati sluší, že symboly *Max* a *Lap* pokládáme za integrační operátory, jichž lze užíti vzhledem k jakékoli funkci vektorové; výsledek operace *Max* jest funkce skalární, výsledek operace *Lap* nová funkce vektorová.

O těchto operátorech, jakož i operátoru *New*, definovaném rovnici (55):

$$New\ v = \int\int\int \frac{v\mathbf{r}}{r^3}\, dS,$$

dokázati lze některé vztahy, založené na známých vzorcích o divergencích a curlech.

a) Především užijeme první z rovnic (107), totiž

$$curl \nabla v = 0;$$

položíme-li v ní místo v skalár $Pot\ v$, obdržíme

$$curl \nabla_0 Pot\ v = 0.$$

---

*) Ibid. pag 364.

Jelikož dle (54[b])

$$\nabla_0 \, Pot\ v = New\ v,$$

jest

$$curl\ New\ v = 0. \tag{137}$$

Poněvadž dle (53)

$$\nabla_0 \, Pot\ v = Pot\ \nabla_n v,$$

dostaneme

$$curl\ \nabla_0 \, Pot\ v = curl\ Pot\ \nabla_n v = 0\,;$$

položíme-li v rovnici (136[b]) za $\mathbf{v}$ vektor $\nabla_n v$, vyjde

$$curl\ Pot\ \nabla_n v = Lap\ \nabla_n v,$$

tudíž

$$Lap\ \nabla_n v = 0, \tag{138}$$

kde můžeme ukazovatel n u ∇ vynechati, není-li se obávati nedorozumění.

b) Jiné dvě relace založíme na známém vzorci (108):

$$div\ curl\ \mathbf{v} = 0.$$

Substitucí *Pot* $\mathbf{v}$ za $\mathbf{v}$ obdržíme

$$div\ curl\ Pot\ \mathbf{v} = 0,$$

čili vzhledem k (136[b])

$$div\ Lap\ \mathbf{v} = 0. \tag{139}$$

Předposlední rovnici můžeme ještě jinak přeměniti; pišme v ní dle (132[b]) *Pot curl* $\mathbf{v}$ místo *curl Pot* $\mathbf{v}$ a pak nahraďme *div Pot curl* $\mathbf{v}$ výrazem *Max curl* $\mathbf{v}$, který plyne z rovnice (136[a]), položíme-li v ní *curl* $\mathbf{v}$ za vektor $\mathbf{v}$. I bude

$$Max\ curl\ \mathbf{v} = 0. \tag{140}$$

(Pokrač.)

Věstník literární.

Recense knih.

Illustrované přednášky. Pořádá dr. *A. Batěk* v Plzni.

Již loni bylo referováno o tomto podniku dra. A. Baťka, professora na průmyslové škole v Plzni, jehož cílem jest šířiti znalost jednotlivých otázek z přírodních věd pomocí krátkých populárních pojednání o rozsahu obyčejně asi jednoho tiskového archu, které se v sešitcích po 24 hal. prodávají. V předplacení jsou ještě levnější, neboť 50 čísel (jeden sešit objímá obyčejně 2·čísla) stojí pouze 4 K 50 h.

Lze říci, že úkol svůj řeší tyto sešitky způsobem velmi šťastným. Jsou plny stručných, ale přece obsažných informací, přednášených vhodným, snadně pochopitelným a co je hlavní,