Alois Ždímal

Centrovaná soustava čoček

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 37 (1908), No. 2, 193--197

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121095`

Centrovaná soustava čoček.

Napsal **Al. Ždímal**, prof. reálky v Telči na Moravě.

Centrovanou soustavou čoček rozumíme řadu několika čoček postavených za sebou tak, že středy křivosti mezných ploch jednotlivých členův a tedy i optické jich středy a ohniska leží na jedné přímce, společné to optické ose.

Dejme tomu, že stojí za sebou m čoček spojných, jichž ohniskové dálky jsou po řadě $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_m$ a optické mohutnosti $\frac{1}{f_1}, \frac{1}{f_2}, \frac{1}{f_3}, \ldots, \frac{1}{f_m}$, a že soustava tato je centrována. Vzájemné postavení buď tak voleno, aby reálný obraz předmětu, jenž se nachází před první spojkou, byl předmětem pro druhou čočku, reálný obraz, jejž vytvořuje tato, předmětem pro třetí čočku atd., reálný obraz daný předposlední čočkou předmětem pro čočku poslední. Při tomto uspořádání budiž vzdálenost první a druhé čočky d_1, druhé a třetí d_2, předposlední a poslední d_{m-1}.

Úlohou naší jest vyhledati vztah mezi polohou předmětu stojícího před čočkou první a polohou výsledného obrazu stojícího za čočkou poslední. Pro jednotlivé čočky platí patrně:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1},$$

$$\frac{1}{d_1 - b_1} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2},$$

$$\frac{1}{d_2 - b_2} + \frac{1}{b_3} = \frac{1}{f_3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{d_{m-1} - b_{m-1}} + \frac{1}{b_m} = \frac{1}{f_m}. \tag{1}$$

Žádaný vztah dostaneme, vyloučíme-li z těchto m rovnic, v nichž veličiny $a_1, b_1, b_2, \ldots, b_m$ mají obvyklý význam, veličiny $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{m-1}$ počtem $(m - 1)$. Ve výsledku vedle konstant $d_1, d_2, d_3 \ldots d_{m-1}, f_1, f_2, f_3 \ldots f_m$ zůstanou nám jenom délky a_1 a b_m. Výsledek je v tomto všeobecném případě poměrně složitý a dá se psáti ve formě:

$$F\left[1 : d_{m-1},\ -\frac{1}{f_{m-1}},\ d_{m-2},\ -\frac{1}{f_{m-2}},\ \ldots,\ d_2,\ -\frac{1}{f_2},\ d_1,\ -\left(\frac{1}{f_1}-\frac{1}{a_1}\right)\right]+\frac{1}{b_m}=\frac{1}{f_m}\,.^{*)} \tag{2}$$

Značně však se zjednoduší, předpokládáme-li, že čočkou jdou těsně za sebou, že tedy $d_1 = d_2 = d_3 = \ldots = d_{m-1} = 0$. Tu pak soustava (1) pozmění se takto:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}&=\frac{1}{f_1},\\
-\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}&=\frac{1}{f_2},\\
-\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}&=\frac{1}{f_3},\\
\ldots\ldots&\ldots\ldots\\
-\frac{1}{b_{m-1}}+\frac{1}{b_m}&=\frac{1}{f_m};
\end{aligned} \tag{3}$$

eliminace veličin $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{m-1}$ provede se rázem tím způsobem, že poslední tyto rovnice sečteme. Tak obdržíme:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_n}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}+\frac{1}{f_3}+\ldots+\frac{1}{f_m}$$

čili po vynechání indexů při a_1 a b_m, kteréžto délky udávají polohy předmětu a výsledného obrazu,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{f_k}. \tag{4}$$

---

*) Symbol $F[\ldots]$ představuje řetězový zlomek:

$$\cfrac{1}{d_{m-1}+\cfrac{1}{-\cfrac{1}{f_{m-1}}+\cfrac{1}{d_{m-2}+\cfrac{1}{-\cfrac{1}{f_{m-2}}+\ldots+\cfrac{1}{d_2+\cfrac{1}{-\cfrac{1}{f_2}+\cfrac{1}{d_1+\cfrac{1}{-\cfrac{1}{f}+\cfrac{1}{a}}}}}}}}}.$$

Tato jednoduchá rovnice nám praví: Centrovaná soustava spojek chová se tak, jako jediná spojka, jejíž optická mohutnost

$$\frac{1}{f}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{f_k},$$

t. j. rovná se součtu optických mohutností jednotlivých částí.

Je li soustava smíšená, t. j. je-li tam vřaděno několik čoček rozptylných, jichž optické mohutnosti mají opačná znamení (záporná), pak ovšem nutno vzorec (4) psáti:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=alg.\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{f_k}. \tag{5}$$

Centrovaná soustava čoček vůbec má optickou mohutnost rovnou algebraickému součtu mohutností jednotlivých svých členů, které jsou pro spojky kladné, pro rozptylky záporné.

Přistupme nyní ke zvláštnímu případu: Jaká jest optická mohutnost dvou tenkých čoček těsně za sebou postavených (dvojčočky, doubletu)?

Budiž index lomu první čočky n a poloměry mezných jejích ploch r_1 a r_2; i jest její opt. mohutnost

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right). \tag{6}$$

Podobně index lomu druhé čočky buď N a poloměry r_3 a r_4; platí pak:

$$\frac{1}{F}=(N-1)\left(\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right). \tag{7}$$

Mohutnost dvojčočky je pak

$$\frac{1}{\varphi}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)+(N-1)\left(\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right). \tag{8}$$

Rovnice této užívá se k řešení achromasie doubletu skládajícího se z čoček velice tenkých; té se dociluje přibližně tak, že se sjednotí ohniska pro krajní barvy vidmové, tedy na př. pro Fraunhoferovy čáry B a H. Pro první čáru platí

$$\frac{1}{\varphi_B}=(n_B-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)+(N_B-1)\left(\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right),$$

pro druhou pak

$$\frac{1}{\varphi_H} = (n_H - 1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + (N_H - 1)\left(\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}\right).$$

Má-li býti doublet achromatickým, nutno aspoň, aby $\varphi_H = \varphi_B$, kterážto podmínka dá se vyjádřiti jednoduchým vztahem

$$\Delta n\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + \Delta N\left(\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}\right) = 0, \qquad (9)$$

kde

$$\Delta n = n_H - n_B, \quad \Delta N = N_H - N_B$$

Jiná forma její je

$$\frac{\Delta n}{\Delta N} = -\frac{\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}},$$

která vzhledem k základním rovnicím (6) a (7) může se psáti také takto:

$$\frac{\Delta n}{\Delta N} = -\frac{f(n-1)}{F(N-1)};$$

odtud konečně plyne

$$\frac{f}{F} = -\frac{\frac{\Delta n}{n-1}}{\frac{\Delta N}{N-1}}. \qquad (10)$$

Zlomky $\frac{\Delta n}{n-1}$ a $\frac{\Delta N}{N-1}$ nazývají se dle Abbe-ho „dispersními mohutnostmi“ látek, jichž indexy lomu jsou n a N*). Proto lze poslední tvar podmínky pro achromasii interpretovati takto:

1. Ohniskové dálky čoček skládajících achromatický doublet musí k sobě státi v témž poměru, jako dispersní mohutnosti skel, z nichž jsou čočky zhotoveny.

*) Obyčejně se „dispersní mohutnost“ látky o indexu lomu n vyjadřuje zlomkem $\frac{n_H - n_B}{n_D - 1} = \frac{\Delta n}{n_D - 1}$, kdež n_D znamená t. z. střední index lomu t. j. index pro Fraunhoferovu žlutou čáru D.

2. Ohniskové dálky f a F jsou opačných znamení: je-li první spojkou, musí býti druhá rozptylkou.

Vzhledem k tomu třeba psáti

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{f} - \frac{1}{F}. \tag{11}$$

Má-li achromatická dvojčočka býti sběrnou, musí její optická mohutnost $\frac{1}{\varphi}$ býti kladná, musí tudíž ohnisková dálka spojky býti menší nežli ohnisková dálka rozptylky $(f < F)$ a se zřetelem k větě 1. dispersní mohutnost skla, z něhož je spojka, menší než dispersní mohutnost rozptylky. Tomu se vyhoví tím způsobem, že se volí spojka ze skla korunového, rozptylka pak ze skla flintového *).

Má-li naopak chovati se achromatický doublet jako čočka rozptylná, třeba vzíti spojku ze skla flintového, rozptylku z korunového.

Poznámka: Úvahy uvedené platí, jak řečeno, pro čočky nekonečně tenké; lze s odvozenými rovnicemi však skoro úplně vystačiti při sestrojování objektův astronomických dalekohledů.

Poznámka ku článku „Tečny dvou kruhů".**)

Napsal r.

V článku uvedeném v nadpise jest řešen úkol najíti rovnice dvou kruhů ve formě racionálné (t. j. takových, že souřadnice středů a poloměry jsou dány čísly racionálnými), aby souřadnice všech osmi dotyčných bodů společných tečen byla čísla racionálná. Úkol tento jest tam převeden na vyhledání čísel p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2 racionálných a takových, aby oba výrazy

$$(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2 - (r_1 - r_2)^2,$$
$$(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2 - (r_1 + r_2)^2$$

*) Že dispersní mohutnost skla korunového je menší než u skla flintového, lze se snadno přesvědčiti na základě dat uvedených v Reiss-Theurerově Fysice.

**) Viz Časopis pro pěst. math. a fysiky, ročník XXXVI., str. 315.