Václav Jeřábek

Poznámka o obalové křivce hyperbolické

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 16 (1887), No. 4, 164--165

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121081`

Poznámka o obalové křivce hyperbolické.

Pro žáky středních škol napsal

V. Jeřábek,
professor v Brně.

Pohyblivá přímka AB, která omezuje s dvěma pevnými přímkami OX, OY trojúhelník stálého obsahu, obaluje hyperbolu, jež dotýká se hybné strany AB ve středu jejím.

Známou tuto vlastnosť bez použití differencialního počtu lze dokázati takto:

Budiž C bodem průsečným dvou libovolných tečen AB, A′B′ křivky obalové, a úhel XOY nazveme ω.

Protože trojúhelníky ABO, A′B′O jsou si obsahem rovny, máme podmínku

$$\mathrm{OA}\,.\,\mathrm{OB} = \mathrm{OA}'\,.\,\mathrm{OB}',$$

ze které obdržíme

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OA}'} = \frac{\mathrm{OB}'}{\mathrm{OB}},$$

z čehož plyne, že AB′ || A′B; a proto jest

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}} = \frac{\mathrm{AB}'}{\mathrm{A'B}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OA}'}.$$

Považujeme-li dotyčný bod tečny AB za mezní polohu bodu C, ve kterém hybná tečna A′B′ pevnou tečnu AB seče, předpokládáme, že úhel ACA′ mezi těmito tečnami blíží se nulle. I jest

$$\lim\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}} = \lim\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OA}'} = 1,$$

neboť $\lim \mathrm{OA}' = \mathrm{OA}$.

Je-li tedy C bodem dotyčným, jest

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}} = 1 \quad \text{čili} \quad \mathrm{AC} = \mathrm{CB},$$

což bylo dokázati.

Abychom ještě dokázali, že obalovou křivkou jest hyperbola, považujme přímky OX a OY za osy souřadnic a $\mathrm{OM} = x$, $\mathrm{ON} = y$ za souřadnice bodu dotyčného C. Značí-li k^2 stálý obsah trojúhelníka ABO, který obsahem svým rovná se dvojnásobnému rovnoběžníku $\mathrm{OMCN} = xy \sin\omega$, obdržíme

$$2\,xy \sin\omega = k^2$$

čili

$$xy = \frac{k^2}{2 \sin \omega},$$

křivkou obalovou jest tedy hyperbola, mající osy OX a OY za asymptoty.

Differencialná rovnice čáry libovolného stupně.

Referuje dr. A. S.

Konečné rovnice čar obsahují konstanty, jichž počet roste s rostoucím stupněm čáry, a jejichž *různými* hodnotami se různé čáry téhož stupně od sebe rozeznávají. *Identickou* pro všechny čáry téhož stupně rovnici obdržíme eliminováním oněch konstant; differencialná rovnice takto zjednaná vyjadřuje charakteristickou vlastnost *všech* čar téhož stupně. Pro přímé čáry jest rovnicí tou (při známém označení):

$$y'' = 0.$$

Pro čáry 2. stupně vyžadující eliminaci 5 konstant nalezl *Monge* rovnici 5. řádu:

$$9y''^2y^{\mathrm{V}} - 45y''y'''y^{\mathrm{IV}} + 40y'''^3 = 0,$$

o níž *Boole* ve svém Treatise on diff. equations (1859) poznamenává: „Než zde opouští nás možnost geometrické interpretace, a výsledky podobné těmto sotva mohou býti jinak užitečnými, nežli co záznamy tvarů integrace schopných.“

Tento pessimistický výrok neodstrašil na štěstí mathematiky, zanášeti se i na dále s přítomným problemem; nyní setkáváme se v *Nature* (sv. 34. str. 365.) se zajímavou poučkou, objevenou *J. Sylvesterem.*

Nazveme symbolicky $m \cdot \mu$ koefficient veličiny h^m v rozvedeném výrazu:

$$\left(\frac{1}{2!}y''h^2 + \frac{1}{3!}y'''h^3 + \frac{1}{4!}y^{\mathrm{IV}}h^4 + \frac{1}{5!}y^{\mathrm{V}}h^5 + \ldots\right)^{\mu},$$

a sestavme si schema: