Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička
O kvaternionech. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 23 (1894), No. 4, 209--217

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121051

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1894

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

O kvaternionech.

Sepsal

Dr. F. J. Studnička.

(Dokončení.)

Nežli přejdeme dále, vraťme se ještě ke vzorci (6), stanovícímu součin dvou ideálí. A tu poznáváme, majíce na zřeteli známou poučku,*) že norma součinu se rovná součinu norem, relaci

$$\begin{aligned}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &+ (a_1b_2{}^2 + (a_2b_3)^2 + (a_3b_1)^2,\end{aligned} \tag{29}$$

poněvadž ze vzorce (4) a (5) přímo se norma součinu dá stanoviti.

Relace tato představuje pak známou identičnost *Lagrange*-ovu, ukazujíc zároveň, jak možná součin dvou součtů tří čtverců vyjádřiti součtem čtyř čtverců. Se zřetelem pak ke vzniku těchto faktorů vychází na jevo, že těchto spůsobů jest 24 a sice podlé toho, jak tu permutujeme koëfficienty ideálních jednotek i_1, i_2, i_3.

Jestiť na př.

$$\begin{aligned}(1^2 + 3^3 + 7^2)(2^2 + 3^2 + 4^2) &= 1^2 + 9^2 + 27^2 + 30^2, \\ &= 2^2 + 7^2 + 17^2 + 37^2, \\ &= 3^2 + 9^2 + 10^2 + 39^2, \\ &= 5^2 + 13^2 + 19^2 + 34^2, \\ &= 7^2 + 19^2 + 25^2 + 26^2, \\ &= 9^2 + 15^2 + 26^2 + 27^2, \\ &= 10^2 + 17^2 + 19^2 + 31^2, \\ &= 13^2 + 22^2 + 23^2 + 23^2, \\ &= 14^2 + 19^2 + 25^2 + 26^2, \\ &= 15^2 + 15^2 + 19^2 + 30^2 \text{ atd.}\end{aligned}$$

---

*) Viz *Studnička* „O kvaternionech" Časop. pro pěstov. math. a fys. V. pag. 102.

A poněvadž možná poučku, na níž tuto založeno odvození identičnosti Lagrange-ovy; rozšířiti na n faktorů, takže platí

$$\prod_{k=1}^{n} n(u_k) = n(\Pi u_k)\,, \tag{30}$$

značí-li tu všeobecně u_k libovolný kvaternion, tedy i jeho ideale jako případ zvláštní, obdržíme i všeobecnější poučku o součinu součtu tří čtverců, totiž

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2 + c_k^2) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \tag{31}$$

takže na př. na zřeteli majíce součin čtyř ideali, zde na str. 151 podaný, obdržíme z něho přímo

$$(1^2 + 2^2 + 3^2)(2^2 + 3^2 + 4^2)(3^2 + 4^2 + 5^2)(4^2 + 5^2 + 6^2)$$
$$= 1234^2 + 86^2 + 164^2 + 86^2.$$

Kdybychom pak chtěli tuto Lagrange-ovu identičnost rozšířiti na tři faktory, obdrželi bychom

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)$$
$$= n\,[\mathrm{R}_{1.3} + \mathrm{R}_{12}\,.\,\mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_{1.3}]\,,$$

kdež pravou stranu podlé vzorců (4), (13) a (15) sestaviti lze, zejména uváží-li se, že

$$n\,[\mathrm{R}_{1.3} + \mathrm{R}_{12}\,.\,\mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_{1.3}) = \mathrm{R}_{1.3}^2 + n\,[\mathrm{R}_{1.2}\,\mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_{1.3}]$$

a podlé vzorce (5) vyjde

$$\mathrm{R}_{1.3} = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix}.$$

Aniž bychom pak stopovali dále relace sem patřící*), přejděme ještě ke zvláštnímu případu, kterýž ze vzorce (30) se obdrží, redukuje-li se tam kvaternion u_k na pouhé číslo soujemné

$$u_k = a_k + b_k i\,;$$

povstaneť z něho

*) Viz *Studnička:* „Neue Lehrsätze, Summen von Quadratzahlen betreffend," Sitzb. d. k. böhm. Ges. d. Wiss. 1894, XV.

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)=a^2+b^2, \tag{32}$$

což znamená, že součin složený z n faktorů, představujících součty libovolných dvou čtverců, vyjádřiti lze opět součtem dvou čtverců, poučka to, již pro

$$n=2$$

znal již *Diofantos* z Alexandrie.*)

Uvážíme-li pak, že podlé *Fermatova* objevu**) možná kmenné číslo tvaru $(4n+1)$ vyjádřiti součtem dvou čtverců, obdržíme ze vzorce (32) i relaci

$$\prod_{k=1}^{n}(4n_k+1)=a^2+b^2, \tag{33}$$

značí-li $(4n_k+1)$ číslo kmenné pro

$$k=1,2,3,\ldots,n.$$

Podlé toho jest na př.

$$5.13.17.29.37=64^2+1087\ ^{***})\ \text{a p. d.}$$

Z poslední relace této (33) plyne dále, jsou-li kmenná čísla stejná a počet jich vyjádřen číslem m,

$$(4n+1)^m=a^2+b^2, \tag{34}$$

což znamená, že m-tá mocnina kmenného čísla $(4n+1)$ představuje součet dvou čtverců.

Podlé toho jest na př.

$$5^5=10^2+55^2=25^2+50^2.$$

A ze vzorce (34) plyne pak ve zvláštním případě, kde

---

*) *Studnička* „Základové nauky o číslech" pag. 17.

**) Ibid. pag. 19.

***) Srovnej *Lejeune-Dirichlet* „Vorlesungen über Zahlentheorie", III. Aufl. pag. 165. Mimo to stran Fermatova objevu *J. Smith* „De compositione numerorum primorum formae $(4\lambda+1)$ ex duobus quadratis" Crelle's J. Bd. 50, pag. 91, (1854), kdež se vede důkaz pomocí řetězcového determinantu.

$$m = 2,$$

poučka *Pythagorova* zvláštního znění

$$(4n + 1)^2 = a^2 + b^2,$$

takže tu dán výraz postulatu racionálních trojúhelníků pravoúhlých,*) pro něž podal již *Plato* jednoduchý vzorec obecný

$$(n^2 + 1)^2 = (n^2 - 1)^2 + (2n)^2.$$

Zároveň tu poznáváme, že možná si zjednati

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots p_n^{\alpha_n} = a^2 + b^2, \tag{35}$$

značí-li všeobecně p_k číslo kmenné tvaru

$$p_k = 4n_k + 1, \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n),$$

z čehož patrno, že složené číslo

$$N = 2^\alpha \prod_{k=1}^{n} p_k^{\alpha_k} = a^2 + b^2, \tag{36}$$

vyjádřiti možná součtem dvou čtverců, při čemž nejmenší číslo kmenné 2, o němž platí taktéž

$$2 = 1^2 + 1^2,$$

nečiní žádné výjimky.

Podlé toho jest na př.

$$109850 = 2^1 . 5^2 . 13^3 = 17^2 + 331^2.$$

Abychom konečně ukázali řešením úkolu geometrického vhodné upotřebení kvaternionových ideálí, stanovme vzorce, podlé nichž se přechází od prostorové soustavy souřadnicové k soustavě jiné, taktéž orthogonální, mající však týž počátek.

Určíme-li na připojeném obrazci polohu bodu B pravoúhlými souřadnicemi

$$OA = x, \quad AC = y, \quad CB = z,$$

---

*) Srovnej *Pánek* „O trojúhelnících racionálních" Časop. pro pěstov. math. a fys. VI. pag. 241.

v prostorové soustavě, dané osami OI_1, OI_2, OI_3, a podobně souřadnicemi

$$OA' = \xi,\quad A'C' = \eta,\quad C'B = \zeta\,,$$

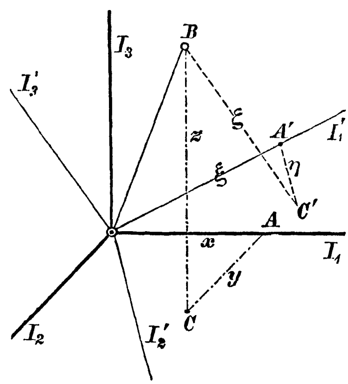
v soustavě podobné, dané osami OI'_1, OI'_2, OI'_3, obdržíme koexistentně *)

$$\begin{aligned} OB &= xi_1 + yi_2 + zi_3\,, \\ OB &= \xi i'_1 + \eta i'_2 + \zeta i'_3\,, \end{aligned}$$

jsou-li tu značeny příslušné ideální jednotky, jimiž se kvaternionové ideále řídí, i'_1, i'_2, i'_3, onde pak i_1, i_2, i_3. A při tom platí pak přímo

$$x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2\,, \tag{37}$$

což jest i výměrem orthogonální substituce vůbec.



Vyjádříme-li pak ideální jednotky soustavy druhé obdobnými jednotkami soustavy první, obdržíme

$$\begin{aligned} i'_1 &= a_1 i_1 + b_1 i_2 + c_1 i_3\,, \\ i'_2 &= a_2 i_1 + b_2 i_2 + c_2 i_3\,, \\ i'_3 &= a_3 i_1 + b_3 i_2 + c_3 i_3\,, \end{aligned} \tag{38}$$

ze kteréžto soustavy se zjedná, násobí-li se tu relace, jak po sobě jdou, veličinami ξ, η, ζ, a užije-li se vzorců OB stanovících,

*) Viz *Studnička* „O kvaternionech". Časop. pro pěstov. math. a fys. V. pag. 150.

$$\xi i'_1 + \eta i'_2 + \xi i'_3 = (a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta)\, i_1 \\ + (b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta)\, i_2 \\ + (c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta)\, i_3 = x i_1 + y i_2 + z i_3 ,$$

načež porovnáváním členů stejné jakosti vznikne

$$\begin{aligned} x &= a_1\xi + a_2\eta + a_3\xi , \\ y &= b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta , \\ z &= c_1\xi + b_2\eta + c_3\zeta , \end{aligned} \tag{39}$$

kterážto soustava lineárně vyjadřuje souřadnice x, y, z pomocí hodnot souřadnicových ξ, η, ζ.

Abychom pak vyšetřili podmínky, jimž vyhovují koëfficienty a, b, c, zjednejme si z prvého vzorce soustavy (38) násobením, přihlížejíce ku podmínkám základním, relacemi známými

$$i_k^2 = -1 , \quad i_1 i_2 = i_3 \text{ a t. d.}$$

stanoveným, a stejný pořádek při kladení ideálních faktorů zachovávajícím

$$\begin{aligned} i'_1 . a_2 i_1 &= -a_2 a_1 && + a_2 b_1 i_2 i_1 && + a_2 c_1 i_3 i_1 , \\ i'_1 . b_2 i_2 &= b_2 a_1 i_1 i_2 && - b_2 b_1 && + b_2 c_1 i_3 i_2 , \\ i'_1 . c_2 i_3 &= c_2 a_1 i_1 i_3 && + c_2 b_1 i_2 i_3 && - c_2 c_1 \quad , \end{aligned}$$

načež sečtením a zjednodušením se obdrží

$$i'_1 . i'_2 = -(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) \\ + i_1 (b_1 c_2) + i_2 (c_1 a_2) + i_3 (a_1 b_2) = i'_3 ,$$

zavede-li se *Binetovo* krátké determinantů stupně druhého značení. Dosadíme-li sem pak za i'_3 hodnotu ze soustavy (38) plynoucí, obdržíme konečně porovnáním podmínky

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0 , \tag{40}$$

$$(b_1 c_2) = a_3 , \quad (c_1 a_2) = b_3 , \quad (a_1 b_2) = c_3 , \tag{41}$$

k nimž se druží kyklickou záměnou přípon ze vzorce (40) vznikající relace další

$$a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0 , \\ a_3 a_1 + b_3 b_1 + c_3 c_1 = 0 ,$$

jakož i podobně ze vzorců (41) odvozené podmínky

$$(b_2c_3)=a_1\,,\quad (c_2a_3)=b_1\,,\quad (a_2b_3)=c_1\,,$$
$$(b_3c_1)=a_2\,,\quad (c_3a_1)=b_2\,,\quad (a_3b_1)=c_2\,.$$

Z téhož součinu $i'_1 \,.\, i'_2$ obdržíme dále, učiníme-li si rovny oba faktory, a zavedeme-li taktéž záměnu kyklickou, nové podmínky

$$\begin{aligned} a_1^2+b_1^2+c_1^2&=1\,,\\ a_2^2+b_2^2+c_2^2&=1\,,\\ a_3^2+b_3^2+c_3^2&=1\,, \end{aligned} \tag{42}$$

jehož si zjednáme ze tří relac soustavy předcházející, totiž z

$$a_1=(b_2c_3)\,,\quad b_1=(c_2a_3)\,,\quad c_1=(a_2b_3)\,,$$

znásobíme-li tu postupně veličinami a_1, b_1, c_1, a užijeme-li prvého vzorce soustavy (42), podmínku

$$\begin{vmatrix} a_1\,, & b_1\,, & c_1 \\ a_2\,, & b_2\,, & c_2 \\ a_3\,, & b_3\,, & c_3 \end{vmatrix}=1\,, \tag{43}$$

vyjadřující poučku i odjinud *) známou, že modulus orthogonální substituce rovná se ± 1.

Znásobíme-li pak relace soustavy (39), jak po sobě jdou, veličinami

$$\begin{matrix} a_1\,, & b_1\,, & c_1\,, \\ a_2\,, & b_2\,, & c_2\,, \\ a_3\,, & b_3\,, & c_3\,, \end{matrix}$$

a sečteme-li pokaždé, vznikne se zřetelem ke vzorci (40) a (42) nová soustava

$$\begin{aligned} \xi&=a_1x+b_1y+c_1z\,,\\ \eta&=a_2x+b_2y+c_2z\,,\\ \zeta&=a_3x+b_3y+c_3z\,, \end{aligned} \tag{44}$$

kteráž vyjadřuje lineárně souřadnice ξ, η, ζ pomocí x, y, z a řeší tedy opačný úkol vzorci (39) daný.

---

*) Viz *Studnička* „O determinantech" pag. 38. (-1 by bylo pro

$$i'_1 \,.\, i'_2=-i'_3\,,$$

což souvisí se směrem odbočovacím).

Z této soustavy konečně plyne, znásobíme-li její relace, jak po sobě jdou, veličinami i'_1, i'_2, i'_3, a užijeme-li vzorců OB stanovících

$$\begin{aligned} xi_1 + yi_2 + zi_3 = x\,(a_1 i'_1 + a_2 i'_2 + a_3 i'_3) \\ + y\,(b_1 i'_1 + b_2 i'_2 + b_3 i'_3) \\ + c\,(c_1 i'_1 + c_2 i'_2 + c_3 i'_3)\,, \end{aligned}$$

z čehož plyne porovnáním koëfficientů veličin x, y, z nová soustava co obdoba vzorců (38)

$$\begin{aligned} i_1 &= a_1 i'_1 + a_2 i'_2 + a_3 i'_3\,, \\ i_2 &= b_1 i'_1 + b_2 i'_2 + b_3 i'_3\,, \\ i_3 &= c_1 i'_1 + c_2 i'_2 + c_3 i'_3\,, \end{aligned} \tag{45}$$

z níž vyplyne obratem, provedeným při odvození vzorců (40) a (41), napřed

$$\begin{aligned} i_1 i_2 = -\,(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \\ + i'_1\,(a_2 b_3) + i'_2\,(a_3 b_1) + i_3\,(a_2 b_2) = i_3\,, \end{aligned}$$

a porovnáním členů stejné jakosti, jakož pak i kyklickou záměnou, nová soustava

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 &= 0, \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 &= 0\,, \\ c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 &= 0\,, \end{aligned} \tag{46}$$

co obdoba vzorců (40), a vedlé toho, jako prvé,

$$c_1 = (a_2 b_3)\,, \quad c_2 = (a_3 b_1)\,, \quad \text{a t. d.}$$

jakož i zároveň co obdoba vzorců (42)

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1\,, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= 1\,, \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 1\,.\text{*)} \end{aligned} \tag{47}$$

Nehodlajíce zde dále o kvaternionech se šířiti, poukazujeme čtenáře, hledajícího poučení dalšího, k odborným spisům,

*) Jaký jest geometrický význam jednotlivých těchto relací, o tom viz *Studnička* „Úvod do analytické geometrie v prostoru" pag. 46. et seqq.

mezi něž brzy se zařadí i náš spis do tisku již uchystaný a Jednotou českých mathematiků do nákladu vzatý.

Poznámka ku sestrojení průmětu plochy hyperboloidu jednodílného.

Napsal

B. Procházka,
professor v Karlíně.

1. Projektivního vztahu přímek téže soustavy jednodílného hyperboloidu s řadou bodů, které stanoví tyto přímky na libovolné křivce rovinné této plochy,*) můžeme užíti ku řešení následní úlohy vyskytující se v deskriptivní geometrii:

Z daných průmětů A', B', C', D' (orthogonalných, klinogonalných neb centralných) čtyř přímek A, B, C, D téže soustavy jednodílného hyperboloidu a jejich bodů stopních a, b, c, d jest sestrojiti stopu S a průmět obrysové křivky O této plochy.

Křivka stopní S a průmět O' obrysové křivky plochy hyperboloidu (z nichž prvá obsahuje stopy přímek plochy této a druhá obaluje průměty jejich) jsou křivky 2. stupně, dotýkající se ve dvou bodech.**)

2. Abychom stopu S sestrojili, stačí stanoviti jeden další bod její, který ji s danými body a, b, c, d bude určovati. Za tím účelem považujeme průmět A' za průmět přímky druhé soustavy ${}^1P$ téhož hyperboloidu, kterou protínají přímky prvé soustavy B, C, D v bodech m, n, p a sestrojme stopou a přímky A a přímkami B, C, D roviny, jichž stopami jsou přímky M, N, P, spojující bod a s body b, c, d. Řada průmětů bodů m, n, p... jest projektivní se svazkem stop M, N, P...***) Stopa R, stotožňující se s průmětem A' protíná stopu S v bodu e, který jest stopou přímky první soustavy E, a zároveň stopou přímky

---

*) *„Základové vyšší geometrie“* od *Dra Emila a Eduarda Weyra,* díl III. str. 32.

**) Tamtéž, str. 35.

***) Tamtéž, 32.