Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Simandl

Příspěvek ku geometrii dvojiny bodové I.

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 45 (1916), No. 1, 23--32

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121037

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1916

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Ellipsoidy ε', φ' jsou v poloze perspektivně kollineárné, a, b středy kollineační; konstrukce rovin kollineačních podána v odstavci „*Řešení 2.*" svrchu nadepsaném (na str. 19).

Této methody — pomocí rotačních kuželů — lze užiti při všech plochách 2. stupně; neboť i hyperbolickému paraboloidu lze opsati reálné kužele rotační, totiž z každého bodu fokální paraboly jedné i druhé. Sestrojíme-li na př. k hyperbolickému paraboloidu (jehož vrchol buď v) tečný kužel z ohniska o jedné hlavní paraboly P, bude tento kužel rotační dotýkati se paraboloidu podél hyperboly, jejíž rovina (polárná k pólu o) $\pi \perp \overline{ov}$ (vrchol v půlí vzdálenost ohniska o od roviny π), osa pak kužele rotačního jde ohniskem o rovnoběžně k vrcholové tečně paraboly P.

Dodatek

k úloze: Společné body a tečny dvou homothetických kuželoseček nerýsovaných (ročník 1914—15, str. 378).

Pokud obě homothetické křivky jsou ellipsy, možno s výhodou užiti též affinity. Sdružíme-li ellipsu E affinně s kružnicí K nad velkou osou $\overline{11}$, bude v této soustavě affinní (o též ose affinní $\overline{11}$) druhé ellipse E' odpovídati také určitá kružnice K', jíž sestrojíme snadno. Společné body a tečny kružnic K a K' promítneme pak affinně zpět. Této methody však užiti nelze, dány-li dvě homothetické hyperboly nebo paraboly.

Dr. *V. Jarolímek.*

Příspěvek ku geometrii dvojiny bodové.

Napsal Dr. **Václav Simandl**, docent české techniky v Brně.

Buďtež dány na určité přímce dvě libovolné reálné dvojiny bodové, dvojiny U, V a A_1, B_1. Buďtež λ a $\frac{1}{\lambda}$ hodnotami dvojpoměrů těchto dvou dvojin, buďtež totiž:

$$(UVA_1B_1) = \lambda, \qquad (UVB_1A_1) = \frac{1}{\lambda}$$

a budiž **J** involucí, která jest stanovena dvěma svými dvojinami

U, V a A_1, B_1. Budeme pak v následujícím hledati konstruktivně ty dvojiny $A_n B_n$ involuce J, jejichž dvojpoměr vzhledem ku dvojině U, V má hodnotu λ^n resp. $\frac{1}{\lambda^n}$, tedy:

$$(UVA_nB_n) = \lambda^n, \qquad (UVB_nA_n) = \frac{1}{\lambda^n}.$$

O čísle n předpokládáme, že jest číslem celistvým. Snadno lze pak nahlédnouti, že v dané involuci existují dvě dvojiny, které mají ku dané dvojině této involuce daný dvojpoměr, a že tyto dvě dvojiny jsou navzájem polárními vzhledem ku zmíněné dané dvojině. Bude tedy při našem dvojpoměru λ^n mimo dvojinu $A_n B_n$ hověti naší úloze ještě jedna dvojina A'_n, B'_n tak, že máme:

$$(UVA'_nB'_n) = \lambda^n, \qquad (UVB'_nA'_n) = \frac{1}{\lambda^n},$$

kde body A'_n, B'_n, jak jsme se právě zmínili, obdržíme dle vztahů:

$$(UVA_nA'_n) = -1, \qquad (UVB_nB'_n) = -1.$$

Posléze budeme se zabývati též případem, kdy:

$$(UV\,{}^0A_1{}^0B_1) = -\lambda,$$

kde ${}^0A_1{}^0B_1$ jest opět dvojinou involuce J. Řešením tohoto případu bude zároveň rozřešen případ obecnější:

$$(UV\,{}^0A_n{}^0B_n) = -\lambda^n.$$

I.

Ukážeme nyní, že ku dvojinám A_n, B_n a A'_n, B'_n dospějeme následujícím způsobem, když známe dvojiny A_{n-1}, B_{n-1} a A'_{n-1}, B'_{n-1}.

Sestrojíme si body $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$ *dle vztahů:*

$$(A_1A'_1B_{n-1}\mathfrak{A}_n) = -1; \qquad (B_1B'_1A_{n-1}\mathfrak{B}_n) = -1,$$

kde jest:

$$(UVA_1A'_1) = -1; \qquad (UVB_1B'_1) = -1$$

a pak dostáváme dvojiny:

$$A_n, A'_n; \qquad B_n, B'_n$$

jakožto samodružné dvojiny dvou involucí daných vždy dvěma následujícími svými dvojinami:

$$U,\ V; \quad A_{n-1},\ \mathfrak{A}_n$$
$$U,\ V; \quad B_{n-1},\ \mathfrak{B}_n.$$

Vidíme tedy, že, chceme-li sestrojiti dvojiny A_n, B_n; A'_n, B'_n, že jest nutno sestrojiti před tím všechny dvojiny A_k, B_k; A'_k, B'_k kde k probíhá postupně hodnotami 1, 2, 3 až $n-1$.

Proveďme nyní důkaz této konstrukce.

Především dokážeme, že dvojiny A_n, B_n; A'_n, B'_n jsou dvojinami involuce J. Důkaz ten provedeme za supposice, že A_{n-1}, B_{n-1}; A'_{n-1}, B'_{n-1} jsou dvojinami této involuce. To lze při našem důkazu, který má povahu rekurrentní, supponovati, ježto pro $n=1$ jest přímo patrno, že A_1, B_1; A'_1, B'_1 jsou dvojinami této involuce. Nejprve dokážeme, že $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$ jest dvojinou této involuce. To jest patrno ze stejnosti dvojpoměrů:

$$(A_1A'_1B_{n-1}\mathfrak{A}_n) = (B_1B'_1A_{n-1}\mathfrak{B}_n)$$

a z toho, že bodům A_1, A'_1, B_{n-1} odpovídají v involuci J postupně body $B_1B'_1A_{n-1}$.

Body A_n, A'_n oddělují, jak jsme byli při naší konstrukci vytkli, harmonicky jednak body U, V jednak body A_{n-1}, $\mathfrak{A}_n$ a body B_n, B'_n oddělují zase harmonicky jednak body U, V, jednak body B_{n-1}, $\mathfrak{B}_n$. Poněvadž pak bodům U, V, A_{n-1}, $\mathfrak{A}_n$ v naší involuci J odpovídají po řadě body V, U, B_{n-1}, $\mathfrak{B}_n$, tu jest patrno, že v této involuci též bodům A_n, A'_n odpovídají body B_n, B'_n, jak bylo dokázati.

Nyní proveďme druhou část důkazu týkající se hodnoty dvojpoměru (UVA_nB_n).

Na přímce, na které naše dvojiny bodové uvažujeme vytkněme si určitý pevný bod jakožto počátek souřadnic. Souřadnice pak bodů našich označme si vždy příslušnými malými písmenami. Tak buďtež na př. souřadnicemi bodů U, B_{n-1}, $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$ úsečky u, b_{n-1}, $\mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{b}_n$. Když máme nyní od dvojpoměru $(UVA_1B_1)=\lambda$ uvedenou konstrukcí dospěti ku dvojpoměru $(UVA_nB_n)=\lambda^n$, tu jest nutno dokázati, že konstrukce ta hoví relaci:

$$\frac{a_n-u}{b_n-u} : \frac{a_n-v}{b_n-v} = \left(\frac{a_1-u}{b_1-u} : \frac{a_1-v}{b_1-v}\right)^n,$$

což jest totéž jako dokázati, že hoví rekurrentní relaci:

$$\frac{a_n - u}{b_n - u} : \frac{a_n - v}{b_n - v} = \left(\frac{a_{n-1} - u}{b_{n-1} - u} : \frac{a_{n-1} - v}{b_{n-1} - v}\right) \left(\frac{a_1 - u}{b_1 - u} : \frac{a_1 - v}{b_1 - v}\right).$$

Souřadnice a_n, a'_n bodů A_n, A'_n obdržíme dle právě uvedené konstrukce jako samodružné body involuce dané bodovými dvojinami U, V; A_{n-1}, $\mathfrak{A}_n$, tedy involuce, jejíž rovnici jak známo můžeme psáti následovně:

$$\begin{vmatrix} xy & x + y & 1 \\ uv & u + v & 1 \\ a_{n-1}\mathfrak{a}_n & a_{n-1} + \mathfrak{a}_n & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Položíme-li v této rovnici $x = y$ a dle x řešíme tu dvěma hledanými kořeny, jsou souřadnice a_n, a'_n. Po jednoduché úpravě pak vychází:

$$a_n,\ a'_n = \frac{a_{n-1}\mathfrak{a}_n - uv \pm \sqrt{(a_{n-1} - u)(\mathfrak{a}_n - u)(a_{n-1} - o)(\mathfrak{a}_n - v)}}{a_{n-1} + \mathfrak{a}_n - u - v}.$$

Zcela analogicky dospěli bychom ku hodnotám b_n, b'_n:

$$b_n,\ b'_n = \frac{b_{n-1}\mathfrak{b}_n - uv \pm \sqrt{(b_{n-1} - u)(\mathfrak{b}_n - u)(b_{n-1} - v)(\mathfrak{b}_n - v)}}{b_{n-1} + \mathfrak{b}_n - u - v}.$$

Dále si vypočtěme:

$$a_n - u = \frac{(a_{n-1} - u)(\mathfrak{a}_n - u) + \sqrt{(a_{n-1} - u)(\mathfrak{a}_n - u)(a_{n-1} - v)(\mathfrak{a}_n - v)}}{a_{n-1} + \mathfrak{a}_n - u - v},$$

$$a_n - v = \frac{(a_{n-1} - v)(\mathfrak{a}_n - v) + \sqrt{(a_{n-1} - u)(\mathfrak{a}_n - u)(a_{n-1} - v)(\mathfrak{a}_n - v)}}{a_{n-1} + \mathfrak{a}_n - u - v},$$

$$b_n - u = \frac{(b_{n-1} - u)(\mathfrak{b}_n - u) + \sqrt{(b_{n-1} - u)(\mathfrak{b}_n - u)(b_{n-1} - v)(\mathfrak{b}_n - v)}}{b_{n-1} + \mathfrak{b}_n - u - v},$$

$$b_n - v = \frac{(b_{n-1} - v)(\mathfrak{b}_n - v) + \sqrt{(b_{n-1} - u)(\mathfrak{b}_n - u)(b_{n-1} - v)(\mathfrak{b}_n - v)}}{b_{n-1} + \mathfrak{b}_n - u - v}.$$

Utvořme si nyní výraz:

$$U = \frac{a_n - u}{b_n - u} : \frac{a_n - v}{b_n - v}.$$

Výraz ten pišme ve tvaru:

$$U = \frac{(a_n - u)(b_n - v)}{(b_n - u)(a_n - v)}$$

a dosaďme nyní do něho právě vypočtené hodnoty dvojčlenů $a_n - u$ atd.

Po tomto dosazení, když v čitateli i jmenovateli naznačené součiny roznásobíme, dostaneme po jednoduché úpravě výraz:

$$U = \frac{(a_{n-1} - u)\,(b_{n-1} - v)}{(b_{n-1} - u)\,(a_{n-1} - v)}\,V,$$

kde V znamená výraz, který lze psáti ve tvaru:

$$V = \frac{\dfrac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2\beta_1} + \dfrac{\alpha_1\beta'_1}{\alpha_2\beta'_2} + \dfrac{\alpha'_2\beta_2}{\alpha'_1\beta_1} + \dfrac{\alpha'_2\beta'_1}{\alpha'_1\beta'_1}}{\dfrac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2} + \dfrac{\alpha_2\beta'_2}{\alpha_1\beta'_1} + \dfrac{\alpha'_1\beta_1}{\alpha'_2\beta_2} + \dfrac{\alpha'_1\beta'_2}{\alpha'_2\beta'_1}},$$

kde zavedené nové veličiny mají následující význam:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \sqrt{\mathfrak{a}_n - u}, & \beta_1 &= \sqrt{\mathfrak{b}_n - u},\\
\alpha_2 &= \sqrt{\mathfrak{a}_n - v}, & \beta_2 &= \sqrt{\mathfrak{b}_n - v},\\
\alpha'_2 &= \sqrt{a_{n-1} - u}, & \beta'_1 &= \sqrt{b_{n-1} - u},\\
\alpha'_2 &= \sqrt{a_{n-1} - v}, & \beta'_2 &= \sqrt{b_{n-1} - v},
\end{aligned}$$

Výraz V lze, násobíme-li čitateli i jmenovatele součinem:

$$\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\alpha'_1\alpha'_2\beta'_1\beta'_2,$$

uvésti ve tvar:

$$V = \frac{\alpha_1\beta_2\alpha'_2\beta'_1\,(\alpha_1\beta_2\alpha'_1\beta'_2 + \alpha_1\beta_1\alpha'_1\beta'_1 + \alpha_2\beta_2\alpha'_2\beta'_2 + \alpha_2\beta_2\alpha'_2\beta'_1)}{\alpha_2\beta_1\alpha'_1\beta'_2\,(\alpha_2\beta_2\alpha'_2\beta'_1 + \alpha_2\beta_2\alpha'_2\beta'_2 + \alpha_1\beta_1\alpha'_1\beta'_1 + \alpha_1\beta_2\alpha'_1\beta'_1)},$$

neboli po krácení na tvar:

$$V = \frac{\alpha_1\beta_2\alpha'_2\beta'_1}{\alpha_2\beta_1\alpha'_1\beta'_2}.$$

To jest:

$$V = \sqrt{\frac{(a_{n-1} - v)\,(b_{n-1} - u)\,(\mathfrak{a}_n - u)\,(\mathfrak{b}_n - v)}{(a_{n-1} - u)\,(b_{n-1} - v)\,(\mathfrak{a}_n - v)\,(\mathfrak{b}_n - u)}}.$$

V tomto výraze zbývá nám ještě veličiny $\mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{b}_n$ vyjádřiti veličinami a_{n-1}, a_1, b_{n-1}, b_1.

Ježto platí, jak jsme na počátku ukázali, vztahy:

$$(UVA_1A'_1) = -1, \qquad (UVB_1B'_1) = -1,$$

čili vztahy:

$$\frac{a_1 - u}{a'_1 - u} : \frac{a_1 - v}{a'_1 - v} = -1, \qquad \frac{b_1 - u}{b'_1 - u} : \frac{b_1 - v}{b'_1 - v} = -1,$$

tu vychází

$$a'_1 = \frac{a_1(u+v) - 2uv}{2a_1 - (u+v)}, \qquad b'_1 = \frac{b_1(u+v) - 2uv}{2b_1 - (u+v)}.$$

Podobně dle vztahů:

$$(A_1 A'_1 B_{n-1} \mathfrak{A}_n) = -1, \qquad (B_1 B'_1 A_{n-1} \mathfrak{B}_n) = -1$$

vychází

$$\mathfrak{a}_n = \frac{b_{n-1}(a_1 + a'_1) - 2a_1 a'_1}{2b_{n-1} - (a_1 + a'_1)}, \qquad \mathfrak{b}_n = \frac{a_{n-1}(b_1 + b'_1) - 2b_1 b'_1}{2a_{n-1} - (b_1 + b'_1)}.$$

Dosadíme-li pak do těchto posledních hodnot $\mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{b}_n$ vypočtené právě hodnoty pro a'_1, b'_1 a hned odečítáme u resp. v, tu dostaneme rovnice:

$$\mathfrak{a}_n - u = \frac{(a_1 - u)^2 (b_{n-1} - v)}{(b_{n-1} - u)(b_{n-1} - v) - (a_1 - b_{n-1})^2},$$

$$\mathfrak{a}_n - v = \frac{(a_1 - v)^2 (b_{n-1} - u)}{(b_{n-1} - u)(b_{n-1} - v) - (a_1 - b_{n-1})^2},$$

$$\mathfrak{b}_n - u = \frac{(b_1 - u)^2 (a_{n-1} - v)}{(a_{n-1} - u)(a_{n-1} - v) - (b_1 - a_{n-1})^2},$$

$$\mathfrak{b}_n - v = \frac{(b_1 - v)^2 (a_{n-1} - u)}{(a_{n-1} - u)(a_{n-1} - v) - (b_1 - a_{n-1})^2}.$$

Dosadíce pak tyto hodnoty do posledního výrazu pro V, tu dostáváme:

$$V = \frac{(a_1 - u)(b_1 - v)}{(a_1 - v)(b_1 - u)}.$$

Dosadíme-li pak tuto hodnotu V do dříve zde vytčené relace:

$$U = \frac{(a_{n-1} - u)(b_{n-1} - v)}{(b_{n-1} - u)(a_{n-1} - v)} \cdot V,$$

tu dostáváme relaci:

$$\frac{a_n - u}{b_n - u} : \frac{a_n - v}{b_n - v} = \left(\frac{a_{n-1} - u}{b_{n-1} - u} : \frac{a_{n-1} - v}{b_{n-1} - v}\right)\left(\frac{a_1 - u}{b_1 - u} : \frac{a_1 - v}{b_1 - v}\right),$$

relaci to, kterou nám bylo dokázati, aby byla dokázána správnost na počátku uvedené konstrukce bodových dvojin: A_n, B_n; A'_n, B'_n.

II.

Z úvah odstavce předešlého I. jest patrno, že konstrukce dvojin A_n, B_n resp. A'_n, B'_n jest *obecně kvadratickou.* V tomto odstavci ukážeme, kterak v případě, že n jest číslem lichým, lze tuto konstrukci zjednodušiti. Zároveň bude patrno z úvah následujících, že v případě tomto jest ona konstrukce *konstrukcí lineární.*

Budiž $n = 2l + 1$, kde l jest libovolné celé číslo, *sestrojíme pak v involuci* J *dvojinu* A_{2l+1}, B_{2l+1} *vlastnosti*:

$$(UVA_{2l+1}B_{2l+1}) = \lambda^n,$$

když jest

$$(UVA_1B_1) = \lambda,$$

pomocí rekurrentních formulí:

$$(A_{2l+1}B_{2l-1}A_1A'_1) = -1, \qquad (B_{2l+1}A_{2l-1}B_1B'_1) = -1.$$

Druhou dvojinu A'_{2l+1}, B'_{2l+1} *hovící téže rovnici*:

$$(UVA'_{2l+1}B'_{2l+1}) = \lambda^n$$

sestrojili bychom za pomoci formulí:

$$(A'_{2l+1}B'_{2l-1}A_1A'_1) = -1, \qquad (B'_{2l+1}A'_{2l-1}B_1B'_1) = -1.$$

Z konstrukce této, kterou hned dokážeme, vidíme, že jest lineární, neboť jest složena jen z konstrukcí čtvrtého harmonického bodu k určitému bodu vzhledem ku dvěma daným bodům.

Především snadno dokážeme, že touto konstrukcí nalezené dvojiny A_{2l+1}, B_{2l+1} náležejí involuci J stanovené dvěma svými dvojinami A_1, B_1; U, V. Můžeme patrně předpokládati, že též A_{2l-1}, B_{2l-1} náležejí této involuci. Potom, jelikož máme stejné dvojpoměry:

$$(A_{2l+1}B_{2l-1}A_1A'_1) = (B_{2l+1}A_{2l-1}B_1B'_1) = -1$$

a jelikož v involuci J bodům B_{2l-1}, A_1, A'_1 po řadě odpovídají body: A_{2l-1}, B_1, B'_1 jest patrno, že též A_{2l+1} musí odpovídati B_{2l+1}, jak bylo dokázati.

Zbývá nám ještě dokázati správnost vztahu:

$$\frac{a_{2l+1}-u}{b_{2l+1}-u} : \frac{a_{2l+1}-v}{b_{2l+1}-v} = \left(\frac{a_{2l-1}-u}{b_{2l-1}-u} : \frac{a_{2l-1}-v}{b_{2l-1}-v}\right)\left(\frac{a_1-u}{b_1-u} : \frac{a_1-v}{b_1-v}\right)^2.$$

Dle relace $(A_{2l+1} B_{2l-1} A_1 A'_1) = -1$ vychází:

$$a_{2l+1} = \frac{b_{2l-1}(a_1 + a'_1) - 2a_1 a'_1}{2b_{2l-1} - (a_1 + a'_1)},$$

když pak do této rovnice dosadíme dříve již uvedenou relaci:

$$a'_1 = \frac{a_1(u+v) - 2uv}{2a_1 - (u+v)},$$

tu po jednoduché úpravě dostáváme pro rozdíl $a_{2l+1} - u$ následující:

$$a_{2l+1} - u = \frac{(a_1 - u)^2 (b_{2l-1} - v)}{2a_1 b_{2l-1} - a_1^2 + uv - b_{2l-1}(u+v)}.$$

Zcela analogicky bychom dále obdrželi:

$$a_{2l+1} - v = \frac{(a_1 - v)^2 (b_{2l-1} - u)}{2a_1 b_{2l-1} - a_1^2 + uv - b_{2l-1}(u+v)},$$

$$b_{2l+1} - u = \frac{(b_1 - u)(a_{2l-1} - v)}{2a_{2l-1} b_1 - b_1^2 + uv - a_{2l-1}(u+v)},$$

$$b_{2l+1} - v = \frac{(b_1 - v)(a_{2l-1} - u)}{2a_{2l-1} b_1 - b_1^2 + uv - a_{2l-1}(u+v)}.$$

Dosazením těchto čtyř posledních hodnot do výrazu:

$$\frac{a_{2l+1} - u}{b_{2l+1} - u} : \frac{a_{2l+1} - v}{b_{2l+1} - v}$$

dostáváme již hoření vztah, který jsme měli dokázati. Tím jest tedy dokázána správnost konstrukce na počátku tohoto odstavce II. uvedené.

III.

Přistupme nyní k úloze, sestrojiti v naší involuci J dané dvěma dvojinami U, V a A_1, B_1 dvojinu ${}^0A_1$, ${}^0B_1$ té vlastnosti, že pro tuto dvojinu platí relace:

$$(UV\, {}^0A_1 {}^0B_1) = -\lambda,$$

když:

$$(UVA_1 B_1) + \lambda.$$

Úloha ta bude patrně zase dvojznačná a kromě dvojiny ${}^0A_1$, ${}^0B_1$ bude naší podmínce hověti ještě dvojina ${}^0A'_1$, ${}^0B'_1$ tak, že budeme též míti:

$$(UV\, {}^0A'_1 {}^0B'_1) = -\lambda.$$

V následujícím dokážeme pak pro dvojiny ${}^0A_1$, ${}^0B_1$ a ${}^0A'_1$, ${}^0B'_1$ správnost následující konstrukce:

Sestrojíme si nejprve body A'_1, B'_1 uvedeným již dříve způsobem:

$$(UVA_1A'_1) = -1, \qquad (UVB_1B'_1) = -1.$$

Dostáváme pak bodové dvojiny:

$${}^0A_1,\ {}^0A'_1; \qquad {}^0B_1,\ {}^0B'_1$$

jakožto samodružné dvojiny dvou involucí daných vždy dvěma následujícími svými dvojinami:

$$U,\ V; \quad A_1,\ A'_1;$$
$$U,\ V; \quad B_1,\ B'_1.$$

Patrno jest, že konstrukce tato jest kvadratická. Dále pak jest vidno, že ku reálným dvojinám A_1B_1; $A'_1B'_1$ příslušeti budou vždy imaginární dvojiny ${}^0A_1$, ${}^0B_1$; ${}^0A'_1$, ${}^0B'_1$, což vyplývá z toho, že dvojina, která současně harmonicky odděluje body dvou reálných harmonicky se oddělujících dvojin, jest imaginárnou. V daném případě oněmi harmonicky se oddělujícími dvojinami jsou právě zde uvedené dvojiny U, V; A_1, A'_1 a U, V; B_1, B'_1.

Ukážeme nyní, že touto konstrukcí nalezené dvojiny ${}^0A_1$, ${}^0B_1$; ${}^0A'_1$, ${}^0B'_1$ jsou dvojinami involuce J. Důkaz lze provésti zcela analogicky jako na počátku odst. I. byl proveden důkaz o dvojinách A_n, B_n; A'_n, B'_n. V případě daném body ${}^0A_1$, ${}^0A'_1$ oddělují harmonicky body dvojin U, V; A_1, A'_1. Těmto posledním čtyřem bodům odpovídají v naší involuci J postupně body V, U, B_1, B'_1. Ježto dvojina bodů ${}^0B_1$, ${}^0B'_1$ dělí harmonicky i dvojinu U, V i dvojinu B_1, B'_1, jest patrno, že dvojina tato jest involucí J přiřazena dvojině ${}^0A_1$, ${}^0A'_1$. Tím jest důkaz proveden.

Zbývá ještě dokázati relaci:

$$(UV\,{}^0A_1{}^0B_1) = (UV\,{}^0A'_1{}^0B'_1) = -\lambda.$$

K tomu konci uvažujme involuci o samodružných bodech U, V. Jest pak, když X, Y považujeme za libovolnou dvojinu této involuce, rovnice této involuce:

$$2xy - (x + y)(u + v) + 2uv = 0.$$

Bude výhodno vzhledem ku imaginárným bodům této involuce užíti určitého parametrického vyjádření souřadnic x, y

bodů X, Y. Máme na mysli pouze ∞^1 sdružených komplexních dvojin této involuce. Vyjádřeme si souřadnice dvou sdružených komplexních bodů X, Y této involuce následovně:

$$x = \xi - \eta i, \qquad y = \xi + \eta i.$$

Dosadíme-li za x, y tyto hodnoty do právě napsané rovnice involuce, tu lze snadno tuto rovnici uvésti na tvar:

$$\eta = i\sqrt{(u-\xi)(v-\xi)}.$$

Dosadíce pak tuto hodnotu do posledních dvou rovnic pro x a y, tu dostáváme již hledané parametrické vyjádření souřadnic x, y bodů X, Y:

$$x = \xi + \sqrt{(u-\xi)(v-\xi)}, \qquad y = \xi - \sqrt{(u-\xi)(v-\xi)}.$$

Při tomto vyjádření dvojiny X, Y pokládáme patrně ξ za proměnný parametr a dospíváme vyjádřením tímto ku všem ∞^1 reálným a ku všem ∞^1 komplexním sdruženým dvojinám involuce o samodružných bodech U, V. Za supposice hyperbolické involuce neboli za supposice reálných U, V dospíváme v případě, že současně $a > u$, $a > v$ nebo $a < u$, $a < v$ ku reálným dvojinám, a v případě, že současně $a < u$, $a > v$ nebo $a > u$, $a < v$ ku sdruženým komplexním dvojinám této involuce.

Stanovme si nyní při našem parametrickém vyjádření hodnotu dvojpoměru λ:

$$(UVA_1B_1) = (UVA'_1B'_1) = \lambda.$$

Souřadnice dvojin A_1, A'_1; B_1, B'_1 buďtež:

$$a_1 = \alpha + \sqrt{(u-\alpha)(v-\alpha)}, \qquad a'_1 = \alpha - \sqrt{(u-\alpha)(v-\alpha)},$$
$$b_1 = \beta + \sqrt{(u-\beta)(v-\beta)}, \qquad b'_1 = \beta - \sqrt{(u-\beta)(v-\beta)}.$$

Dosadíme-li pak tyto hodnoty do relace pro λ;

$$\lambda = \frac{u-a_1}{u-b_1} : \frac{v-a_1}{v-b_1},$$

tu dostaneme:

$$\lambda = \frac{\sqrt{u-\alpha}\,(\sqrt{u-\alpha}+\sqrt{v-\alpha})}{\sqrt{u-\beta}\,(\sqrt{u-\beta}+\sqrt{v-\beta})} : \frac{\sqrt{v-\alpha}\,(\sqrt{v-\alpha}+\sqrt{u-\alpha})}{\sqrt{v-\beta}\,(\sqrt{v-\beta}+\sqrt{u-\beta})},$$

čili po krácení:

$$\lambda = \sqrt{\frac{u-\alpha}{u-\beta} : \frac{v-\alpha}{v-\beta}}.$$

(Dokončení.)