Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Miloslav Pelíšek

O metrických relacích transversál. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 27 (1898), No. 1, 26--31

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121008`

O metrických relacích transversál.

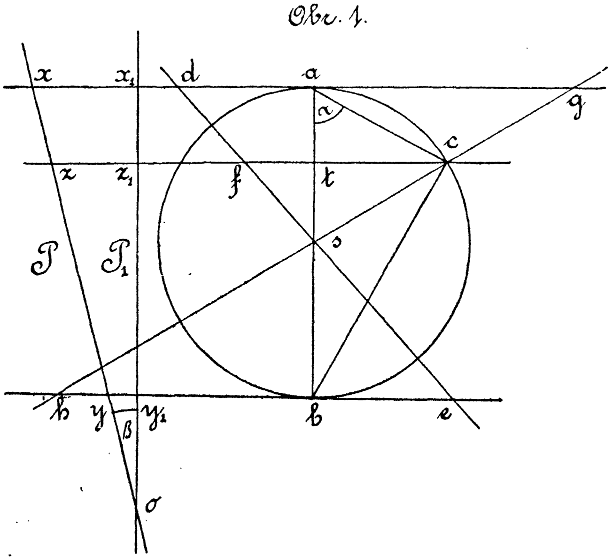
Napsal

Miloslav Pelíšek,

professor v Plzni.

Ve svém proslulém pojednání: *Mémoire sur les pinceaux de droites et les normalies contenant une nouvelle exposition de la théorie de la courbure des surfaces*" uveřejněném v Comptes rendus de l'Academie des sciences 16. května 1870 jakož i v Journal de Liouville r. 1872 používá *Mannheim* při důkazech různých vlastností jím zavedených t. zv. *normalií* čili elementů normálních ploch následující relace v kružnici, kterou v jednodušší formě vyřknul již *Hamilton* ve své *Theory of Rays*.

Obr. 1.



V následujícím si dovoluji učiniti relaci tuto východištěm svých úvah a odvoditi na jejím základě řadu jiných stejného typu, z nichž mnohé jsou pozoruhodné svou obecností; neméně zajímavou se mi zdá ona okolnost, kterak určitý princip -- zde promítání a co s ním souvisí — víže vespolek zdánlivě zcela různé vztahy a udílí jim vniterní spojitost.

Budiž (obr. 1.) s střed, ab průměr kružnice poloměru r a P_1 přímka rovnoběžná k průměru ab, a budiž ac tetiva, jež uzavírá s průměrem ab úhel α; veďme v bodech a, b tečny a bodem c rovnoběžnou sečnu, jež protínají P_1 v bodech x_1, y_1, z_1. Budiž o libovolný bod přímky P_1 a R_1, R_2, R jeho vzdálenosti od bodů x_1, y_1, z_1; pak následuje:

$$x_1 y_1 = R_1 - R_2,\ oz = R_2 + y_1 z_1 = R_2 + bc \sin \alpha$$
$$= R_2 + (R_1 - R_2) \sin^2 \alpha,$$

z čehož plyne po krátké redukci *věta Hamiltonova:*

$$(1) \qquad R = R_1 \sin^2\alpha + R_2 \cos^2\alpha.$$

Vedeme-li bodem o libovolnou přímku P, jež uzavírá s P_1 úhel β a jež protíná obě tečny a rovnoběžnou sečnu v bodech x, y, z, a jsou-li l_1, l_2, l vzdálenosti bodu o od x, y, z, platí patrně zase výše uvedený vztah, ve které formě jej užívá *Mannheim*

$$(2) \qquad l = l_1 \sin^2\alpha + l_2 \cos^2\alpha.$$

Dáme-li přímce P a na ní bodu o různé zvláštní polohy, obdržíme z rovnice (2) podrobnější vztahy.

Splyne-li na př. (obr. 1.) o se středem s a P s průměrem ab, jenž protíná sečnu v bodu t, aneb s libovolným jiným průměrem, jenž protíná tečny a sečnu v bodech d, e, f, máme následující vztahy:

$$(3) \qquad st = r (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha),\ sf = sd (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha).$$

Splyne-li však o s bodem t neb f, obdržíme

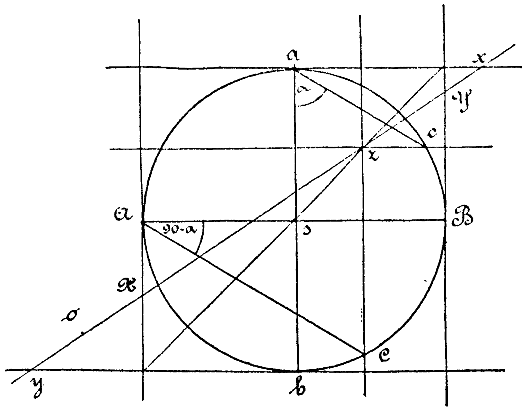
$$(4) \qquad \frac{ta}{tb} = \frac{fd}{fe} = \operatorname{cotg}^2\alpha.$$

Splyne-li P s průměrem sc a bod o s bodem c, následuje táž relace, kterou však lze proměniti v následující:

$$(5) \qquad cg = \frac{2r \cos^2\alpha}{1 - 2\cos^2\alpha}.$$

Vedeme-li dále v kružnici (obr. 2.) dva k sobě kolmé průměry ab, AB a v těchto bodech tečny, čímž obdržíme kružnici opsaný čtverec; vedeme-li dále tetivu ac, jež uzavírá s průměrem ab úhel α, pak tetivu AC || ac, jež uzavírá tedy s průměrem AB úhel 90—α; vedeme-li dále body c, C sečny rovnoběžné k oněm tečnám, protínají se tyto v bodě z, jenž jest, jak snadno seznáme, na úhlopříčně onoho čtverce. Vede-

Obr. 2.



me-li tímto bodem libovolnou přímku P, jež protíná strany opsaného čtverce v bodech x, y, X, Y, a jestli o libovolný bod přímky P, jest dle předcházejícího

$$oz = ox \sin^2\alpha + oy \cos^2\alpha = o\mathrm{X} \cos^2\alpha + o\mathrm{Y} \sin^2\alpha$$

a tedy

$$(6) \qquad oz = \frac{ox + o\mathrm{Y}}{2} \sin^2\alpha + \frac{oy + o\mathrm{X}}{2} \cos^2\alpha,$$

jakož i

$$(7) \qquad (ox - o\mathrm{Y}) \sin^2\alpha + (oy - o\mathrm{X}) \cos^2\alpha = 0.$$

Splyne-li o se z, následuje

$$(8) \qquad (zx \pm z\mathrm{Y}) \sin^2\alpha - (zy \pm z\mathrm{X}) \cos^2\alpha = 0$$

aneb

$$\frac{zx \pm zY}{zy \pm z\mathrm{X}} = \operatorname{cotg}^2\alpha.$$

* * *

Promítejme orthogonálně čáry prvního obrazce na rovinu procházející tečnou v bodě a a uzavírající s danou rovinou úhel ω. Daná kružnice s tečnami a rovnoběžnou sečnou se promítne jakožto ellipsa s tečnami ve vrcholech malé osy s rovnoběžnou sečnou. (Čtenář doplň si laskavě obr. 1. v představě.)

Buďtež a_1, b_1, c_1, s_1, t_1, o_1, ξ_1, η_1, ζ_1 průměty bodů a, b, c, s, t, o, x, y, z; α_1 průmět úhlu α, $A = r$ a B velká a malá poloosa povstalé ellipsy, ε poměr malé osy ku velké, a konečně γ, δ úhly, jež uzavírají přímky ac a P se svými průměty, pak následuje po krátkých redukcích:

$$t_1 t = a_1 t_1 \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{B}, \qquad \cos\alpha = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\omega} \,.\, \cos\gamma,$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \cos\alpha_1 \,.\, \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{B},$$

$$\cos\gamma = \frac{B}{\sqrt{B^2 \sin^2\alpha_1 + A^2\cos^2\alpha_1}}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{\varepsilon^2}{\operatorname{cotg}\alpha_1}}};$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{\operatorname{cotg}^2\alpha_1}{\varepsilon^2}}},$$

$$ox = o_1\xi : \cos\delta, \quad oy = o_1\eta : \cos\delta, \quad oz = o_1\zeta : \cos\delta.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice (2), vynecháme-li hned společného dělitele $\cos\delta$, vynecháme-li dále všechny indexy, a zavedeme-li konečně místo $o_1\xi$, $o_1\eta$, $o_1\zeta$ raději zas ox, oy, oz, obdržíme

$$oz = \frac{ox}{1 + \dfrac{\operatorname{cotg}^2\alpha}{\varepsilon^2}} + \frac{oy}{1 + \dfrac{\varepsilon^2}{\operatorname{cotg}^2\alpha}}, \tag{9}$$

velmi pozoruhodnou, souměrnou relaci platnou pro libovolnou přímku P a libovolný její bod v rovině, jež platí ovšem jen prozatím, vedeme-li tečny ve vrcholech malé osy.

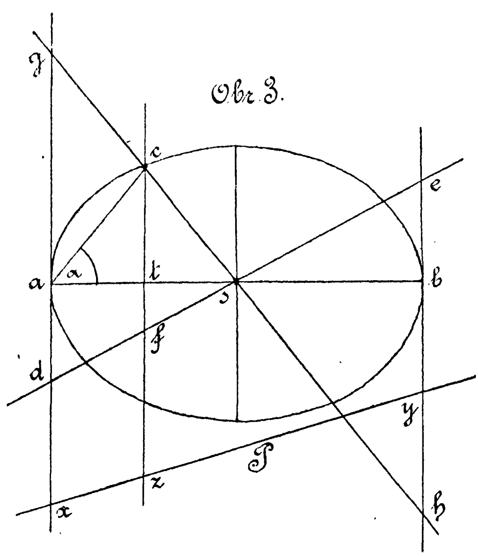
Kdybychom však promítali obrazec první šikmo na rovinu, jež prochází tečnou v bodě a a uzavírá s danou rovinou úhel ω, k vůli jednoduchosti však *kolmo* k rovině kružnice, obdrželi bychom jakožto průmět ellipsu s poloosami A, B $= r$.

Přidržíme-li se soustavně předcházejících označení, budou nyní transformace následující:

$$\cos\alpha = \frac{B \cdot \cos\alpha_1}{A} \cdot \frac{1}{\cos\gamma}, \quad \sin\gamma = \cos\alpha_1 \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A},$$

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{A^2 \sin^2\alpha_1 + B^2 \cos^2\alpha_1}}{A},$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{tg^2\alpha_1}{\varepsilon^2}}}, \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{tg^2\alpha_1}}} \quad \text{pro } \varepsilon = B : A.$$



Vzhledem k tečnám ve vrcholech velké osy obdržíme tedy, vypustíme-li indexy, následující relaci:

$$(10) \qquad oz = \frac{ox}{1 + \frac{\varepsilon^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha}} + \frac{oy}{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\varepsilon^2}} \, .$$

Relace (9) a (10) jsou jen zdánlivě různé; přidržíme-li se důsledně označení, že ε jest poměr poloosy rovnoběžné k tečnám ku poloose kolmé k tečnám, jak jest při relaci (10), přemění se (9) ihned v (10), poněvadž jest nám pak v (9) dosadit místo $\varepsilon \ldots\ldots \frac{1}{\varepsilon}$.

Přidržíme-li se relace (10), budou dle obr. 3., jenž jest úplně analogický obr. 1., v platnosti následující podrobnější vztahy:

Splyne-li o se středem ellipsy, pak jest

$$(11) \qquad st = sa \, . \frac{\operatorname{tg}^2\alpha - \varepsilon^2}{\operatorname{tg}^2\alpha + \varepsilon^2} \, , \qquad sf = sd \, . \frac{\operatorname{tg}^2\alpha - \varepsilon^2}{\operatorname{tg}^2\alpha + \varepsilon^2} \, .$$

Splyne-li o s bodem t neb f, jest

$$(12) \qquad \frac{ta}{tb} = \frac{fd}{fe} = \frac{\varepsilon^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \, .$$

Správnou jest též relace

$$\frac{cg}{ch} = \frac{\varepsilon^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \, ,$$

kterou lze však proměniti v následující, značí-li p průměr bodu c:

$$(13) \qquad cg = \frac{\varepsilon^2}{\operatorname{tg}^2\alpha - \varepsilon^2} \, . \, p.$$

(Pokračování.)