Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 31 (1902), No. 4, 351--376

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120958

Proto můžeme FG sestrojiti jako čtvrtou úměrnou k daným třem délkám, odtud potom i tětivu EG, jež do kruhu se středem D může od bodu E býti nanesena. Bod F určíme nanesouce délku $r.\frac{b}{a}$ na GE od bodu E. Vlastní trojúhelník nalezneme nyní tím, že přeneseme známé už jeho úhly D a E (z podobného trojúhelníka) na úsečku a. [Ferrari.]

(Známou délku (zde EG) naneseme do kruhu jako tětivu tím, že sestrojíme napřed trojúhelník se základnou EG a rameny r, úhel tohoto trojúhelníka při vrcholu naneseme potom jako středový v oné kružnici.)

Takto vidíme, že kružítko s jedním rozevřením stačí ve spojení s pravítkem na všechny konstrukce; ale lze provésti, jak už Ferrari učinil, ještě více, totiž vybudovati celou geometrii Euklidovu, tedy provésti i důkazy pouček týmiž omezenými prostředky.

(Dokončení.)

Úlohy.

Řešení úloh.

Úloha 1.

Čísla přirozené řady napsána jsou vedle sebe, aniž jedno od druhého odděleno. Kterak lze ustanoviti číslici stojící na určitém místě této řady? Na př. číslici 74892hou?

Ing. C. *Vladimír Ibl.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Navrátil*, stud. VI. tř. r. v Uh. Brodě.)

Píšeme-li v přirozenou řadu čísla 1—99, neoddělujíce jich, tedy

123456789101112 . . . 979899,

dostaneme celkem $9 + 2 . 90 = 189$ číslic. Píšíce dále čísla 100—999 dostaneme $3 . 900 = 2700$ číslic, v mezích 1000—9999 číslic $4 . 9000 = 36000$ atd. Vyžaduje tedy řada čísel

1—99 číslic 189
1—999 „ 2889
1—9999 „ 38889
1—99999 „ 488889 atd.

Přihlédneme-li k tomuto počtu číslic pro interval od 1 do $10^n - 1$, shledáváme:

Na místě jednotek stojí číslice 9, před ní $n - 1$ osmička a před touto číslice $n - 1$, ovšem pokud $n < 10$.

Abychom napsali na př. čísla od 1 do 999999 ($n = 6$), jest zapotřebí 5888889 číslic.

Mějme nyní v řadě takto psané najíti číslici na určitém místě stojící, na př. číslici 74892tou. Jelikož hledaná číslice leží mezi 38889tou a 488889tou, náleží číslu obsaženému mezi 10^4 a 10^5. Jde tedy o to, v řadě

100001000110002100003 . . . 999979999899999

vyhledati číslici (74892 — 38889)tou, t. j. číslici 36003tí. Abychom dostali číslic 36000, zapotřebí jest 720 čísel pětimístních; tímto 720tým číslem jest patrně 10719 a poslední jeho číslice, t. j. 9, jest číslicí 36000cí.

Píšeme-li tedy daným způsobem přirozenou řadu čísel od 10719 počínajíce, máme

$$\underbrace{10719}_{36000}\underbrace{10720}\underbrace{10721}_{3}\ldots,$$

i vidíme, že 36003tí číslicí v onom intervalu 10000—99999 jest číslice 7; tato jest v přirozené řadě čísel bez oddělování psaných hledanou číslicí 74892hou.

Jiné řešení. (Zaslal p. *Arthur Kohn*, stud. VI. tř. g. v Roudnici.)

Od 1 do 9999 jest 38889 číslic, tedy do čísla 74892 schází 36002 číslice. Tyto tvoří skupiny pěticiferní 10000, 10001, 10002, . . . atd., a jest takových skupin 36002 : 5 = 7200 (2). Poslední ze skupin těch jest 17199, po níž následuje 17200; jest tudíž 7 číslicí 74892hou.

Úloha 2.

Značí-li $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, a_j, \ldots, a_n$ *řadu kmenných čísel od 1 počínajíc, jest dokázati, že rektangulárná rovnice tvaru*

$$xy = \left(\prod_{k=1}^{i} a_k\right) x + \left(\prod_{k=j}^{n} a_k\right) y + 1$$

nemůže míti ani více ani méně než dvě celistvá kladná řešení.

Posl. fil. *Innocenc Hanzlík.*

Řešení. (Zaslal p. *Vilém Lochmann*, stud. VIII. tř. g. v Žitné ul. v Praze.)

Rektangulárná rovnice tvaru

$$xy = ax + by + c$$

řeší se dle pravidla*): Rozlož číslo $ab + c$ v činitele m a n, pak jest

$$x_1 = m + b, \quad y_1 = n + a,$$
$$x_2 = n + b, \quad y_2 = m + a.$$

V naší úloze jest

$$a = \prod_{k=1}^{i} a_k, \qquad b = \prod_{k=j}^{n} a_k, \qquad c = 1,$$

tedy $\mathrm{N} = ab + c = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n + 1.$

Číslo N rovnajíc se součinu přirozené řady čísel kmenných zvětšenému o 1 jest — jak známo — opět číslem kmenným; lze je tedy rozložiti pouze v součin 1 . N. Proto má daná rovnice pouze dvé řešení:

$$x_1 = 1 + b, \quad y_1 = \mathrm{N} + a,$$
$$x_2 = \mathrm{N} + b, \quad y_2 = 1 + a,$$

kdež a, b, N mají hodnoty svrchu udané.

Dána-li na př. rovnice (pro $n = 7$)

$$xy = a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \,.\, a_4\, x + a_5 \,.\, a_6 \,.\, a_7\, y + 1$$

čili $$xy = 30x + 1001y + 1,$$

jest $$\mathrm{N} = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, | \, 7 \,.\, 11 \,.\, 13 + 1 = 30031$$

a řešení rovnice jsou:

$$x_1 = 1002, \qquad y_1 = 30061,$$
$$x_2 = 31032, \qquad y_2 = 31.$$

Poznámka redakce. Jest patrno, že úsudky svrchu činěné zůstávají platnými, je-li a součin r různých čísel kmenných a b

---

*) Viz Studnička, Nauka o číslech str. 13.

součin ostatních $n-r$ čísel kmenných z přirozené řady těchto čísel, tak že opět $N = \prod_{k=1}^{n} a_k + 1$.

Na př.
$a = 3 . 7 . 13 = 273, \quad b = 1 . 2 . 5 . 11 = 110, \quad N = 30031.$

Úloha 3.

Značí-li π přímý úhel, jest dokázati, že

$$\cos^2\frac{\pi}{17} + \cos^2\frac{2\pi}{17} + \cos^2\frac{3\pi}{17} + \cos^2\frac{4\pi}{17} + \ldots + \cos^2\frac{8\pi}{17} = 4 - \frac{1}{4}.$$

P. *Marian Haas*, kněz na Strahově.

Řešení. (Zaslal p. *Ladislav Bahník*, stud. VIII. tř. gym. v Příbrami.)

Přeměňme levou stranu dle vzorce $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ a dostaneme

$$4 + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{17} + \cos\frac{4\pi}{17} + \cos\frac{6\pi}{17} + \ldots + \cos\frac{16}{17}\pi\right) = 4 - \frac{1}{4}.$$

Členy od obou konců stejně vzdálené spojujeme dle vzorce

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

a obdržíme

$$\cos\frac{9\pi}{17}\left(\cos\frac{7\pi}{17} + \cos\frac{5\pi}{17} + \cos\frac{3\pi}{17} + \cos\frac{\pi}{17}\right) = -\frac{1}{4}.$$

Spojme znova členy podobným spůsobem

$$2\cos\frac{9\pi}{16}\cos\frac{4\pi}{17}\left(\cos\frac{3\pi}{16} + \cos\frac{\pi}{17}\right) = -\frac{1}{4}$$

a konečně $\quad 4\cos\frac{9\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}\cos\frac{\pi}{17} = -\frac{1}{4}.$

Násobíme-li obě strany $\sin\frac{\pi}{17}$ a píšeme

$$\cos\frac{9\pi}{17} = -\cos\left(\pi - \frac{9\pi}{17}\right) = -\cos\frac{8\pi}{17},$$

obdržíme

$$16 \sin\frac{\pi}{17} \cos\frac{\pi}{17} \cos\frac{2\pi}{17} \cos\frac{4\pi}{17} \cos\frac{8\pi}{17} = \sin\frac{\pi}{17}.$$

Ježto $2\sin\frac{\pi}{17}\cos\frac{\pi}{17} = \sin\frac{2\pi}{17}$, $2\sin\frac{2\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17} = \sin\frac{4\pi}{17}$, atd.

přijdeme posléze ku zřejmé stejnině $\sin\frac{16\pi}{17} = \sin\frac{\pi}{17}$.

J i n é ř e š e n í. (Zaslal p. *Jaroslav Seifert*, stud. VI. tř. r. v Karlíně.)

Položme $$\frac{\pi}{17} = \alpha$$

a užijme vzorce $$\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}.$$

Potom lze dané řadě uděliti tvar

$$S = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} + \frac{1+\cos 4\alpha}{2} + \frac{1+\cos 6\alpha}{2} + \ldots + \frac{1+\cos 16\alpha}{2}$$

čili $$S = 4 + \frac{1}{2}\Sigma,$$

kdež $\Sigma = \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha + \ldots + \cos 16\alpha$.

Násobíce tuto rovnici součinem $2\sin\alpha$, obdržíme

$$2\sin\alpha \,.\, \Sigma = 2\cos 2\alpha \sin\alpha + 2\cos 4\alpha \sin\alpha + \ldots + 2\cos 16\alpha \sin\alpha.$$

Avšak
$$\begin{aligned} 2\cos 2\alpha \sin\alpha &= \sin 3\alpha - \sin\alpha \\ 2\cos 4\alpha \sin\alpha &= \sin 5\alpha - \sin 3\alpha \\ 2\cos 6\alpha \sin\alpha &= \sin 7\alpha - \sin 5\alpha \\ &\vdots \\ 2\cos 16\alpha \sin\alpha &= \sin 17\alpha - \sin 15\alpha. \end{aligned}$$

Součtem rovnic těchto nabýváme

$$2\sin\alpha \,.\, \Sigma = \sin 17\alpha - \sin\alpha$$

a poněvadž $\sin 17\alpha = 0$, jest $\Sigma = -\frac{1}{2}$.

Proto jest $$S = 4 - \frac{1}{4}.$$

Úloha 4.

K logarithmování upraviti jest výrazy

$$\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos 2\beta}-\frac{\cos\alpha}{\cos\beta},\quad \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos 2\beta}-\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}.$$

i jejich součet a rozdíl.

Posl. fil. *R. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Karel Vodička,* jednoroční dobrovolník v Jindřichově Hradci.)

První z výrazů daných můžeme psáti ve tvaru zlomkovém

$$x=\frac{\cos(\alpha-\beta)\cos\beta-\cos\alpha\cos 2\beta}{\cos\beta\cos 2\beta},$$

v jehož čítateli lze vyjádřiti součiny funkcí příslušnými součty; bude pak

$$x=\frac{\cos\alpha+\cos(\alpha-2\beta)-\cos(\alpha+2\beta)-\cos(\alpha-2\beta)}{2\cos\beta\cos 2\beta}$$

$$=\frac{\cos\alpha-\cos(\alpha+2\beta)}{2\cos\beta\cos 2\beta}.$$

Přejdeme-li opět k součinům, nalezneme

$$x=\frac{\sin(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\beta}{\cos 2\beta};$$

podobně jest výraz druhý

$$y=\frac{\cos(\alpha-\beta)\operatorname{tg}\beta}{\cos 2\beta}.$$

Součet a rozdíl obou výrazů jsou

$$x+y=\frac{[\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\operatorname{tg}\beta}{\cos 2\beta},$$

$$x-y=\frac{[\sin(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]\operatorname{tg}\beta}{\cos 2\beta},$$

kteréž po úpravě dvojčlenů uzávorkovaných nabývají podoby žádoucí

$$x+y=\frac{2\sin(45^0+\alpha)\sin(45^0+\beta)\operatorname{tg}\beta}{\cos 2\beta},$$

$$x-y=\frac{2\cos(45^0+\alpha)\cos(45^0+\beta)\operatorname{tg}\beta}{\cos 2\beta}.$$

Úloha 5.

Dán jest rovnoramenný trojúhelník abc, jehož úhly při půdici ab mají po 36⁰. Budiž dokázáno, že příčka $\overline{ad}$ půlící úhel a rovná se dvojnásobné výšce $\overline{cf}$.

Frant. Jirsák, učitel v Dobřenicích.

Řešení. (Zaslal p. *Jan Růžička*, učitel v Tetíně.) Užijme tohoto označení

$$\overline{ab} = a, \quad \overline{ac} = \overline{bc} = b, \quad \overline{cf} = v, \quad \overline{ad} = p.$$

Potom jest

$$\triangle\, abc = \triangle\, abd + \triangle\, acd,$$

čili

$$ab \sin 36^0 = ap \sin 18^0 + bp \sin 18^0,$$

z čehož

$$p = \frac{2ab}{a+b} \cos 18^0.$$

Jelikož

$$a = 2b \cos 36^0,$$

jest

$$p = \frac{4b \cos 18^0 \cos 36^0}{1 + 2 \cos 36^0},$$

výška pak

$$v = b \sin 36^0.$$

Abychom stvrdili, že jest $p = 2v$, třeba dokázati, že

$$\frac{2 \cos 18^0 \cos 36^0}{1 + 2 \cos 36^0} = \sin 36^0$$

čili

$$2 \cos 18^0 \cos 36^0 = \sin 36^0 + \sin 72^0;$$

správnost této rovnice patrna jest dle známého vzorce

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

K témuž výsledku bychom dospěli, kdybychom užili hodnoty funkcí

$$\cos 18^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, \quad \cos 36^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1),$$

$$\sin 36^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Jest pak

$$p = \frac{b\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\,.(\sqrt{5} + 1)}{2(3 + \sqrt{5})} = \frac{b(\sqrt{5} - 1)}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{b}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \quad v = \frac{b}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

tudíž

$$p = 2v.$$

Poznámka redakce. Kratčeji lze výsledek ten vyvoditi takto: Rozpůlíme-li ad bodem g, jest $fg \parallel bc$, tudíž $cdfg$ lichoběžník. Jelikož jest

$$\sphericalangle\, adc = 54^0, \quad \sphericalangle\, bcf = 54^0,$$

jest lichoběžník rovnoramenným a v něm $cf = dg$.

Jest proto $\quad ad = 2 \,.\, cf$
čili $\quad p = 2v.$

Užitím trigonometrie dospějeme k témuž výsledku. Jestiť

$$p = \frac{a \sin 36^0}{\sin 54^0} = a \operatorname{tg} 36^0, \qquad v = \frac{a}{2} \,.\, \operatorname{tg} 36^0,$$

pročež $\quad p = 2v.$

Úloha 6.

Sestrojiti jest rovnoramenný trojúhelník abc, dány-li vzdálenosti vrcholů při půdici od středu o kružnice vně vepsané kteráž dotýká se ramene bc a prodloužených druhých dvou stran.

Učitel *Frant. Jirsák.*

Řešení. (Zaslal p. *Karel Fibiger,* stud. VI. tř. r. v Hradci Králové.)

Budiž $\quad \overline{ab} = x, \quad \overline{ac} = \overline{bc} = y,$
$\quad \overline{ao} = m, \quad \overline{bo} = n.$

Poloměr kružnice vně vepsané a ramene $\overline{bc}$ se dotýkající, rovná se výšce v trojúhelníku *abc.* Je-li v něm při půdici úhel α, jest

$$v = m \sin \frac{\alpha}{2} = n \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Ježto $\quad v = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4y^2 - x^2}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{2y},$

tedy $\quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2y - x}{y}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2y + x}{y}},$

nabudeme vztahů

$$\frac{1}{2}\sqrt{(2y + x)(2y - x)} = \frac{m}{2}\sqrt{\frac{2y - x}{y}},$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{(2y + x)(2y - x)} = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{2y + x}{y}},$$

z nichž vyvodíme

$$m = \sqrt{y(2y + x)}, \qquad n = \sqrt{y(2y - x)}.$$

Rovnice $\quad 2y^2 + xy = m^2,$
$\quad 2y^2 - xy = n^2$

poskytují pak hodnoty

$$x = \frac{m^2 - n^2}{\sqrt{m^2 + n^2}}, \qquad y = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2},$$

které snadně lze sestrojiti.

Budiž ještě připomenuto, že

$$\cos\alpha = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{n}{m}.$$

Jiné řešení. (Zaslal p. *Antonín Schönbaum*, stud. VIII. tř. g. v Benešově.)

Označme $\sphericalangle\, bac = \alpha$, potom jest

$$\sphericalangle\, bao = \frac{\alpha}{2}, \quad \sphericalangle\, abo = \alpha + \frac{2\mathrm{R} - \alpha}{2} = \mathrm{R} + \frac{\alpha}{2}.$$

Proto $$m : n = \sin\left(\mathrm{R} + \frac{\alpha}{2}\right) : \sin\frac{\alpha}{2},$$

z čehož $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = n : m.$$

V trojúhelníku *abo* známe tudíž mimo strany m, n též úhel $\frac{\alpha}{2}$, z čehož trojúhelník *abo* sestrojiti lze. Vrchol c určíme snadně, uváživše, že jest $oc \parallel ab$.

Úloha 7.

Sestrojiti jest čtyrúhelník, jemuž lze kružnici opsati a jehož úhlopříčky stojí na sobě kolmo. Dána jest strana a přilehlé k ní úhly.

Posl. fil. *Rud. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Antonín Hassmann*, stud. VI. tř. g na Malé Straně v Praze.)

Budiž *abcd* žádaný čtyrúhelník, v němž

$$ac \perp bd, \qquad \sphericalangle\, bad = \alpha, \qquad \sphericalangle\, abc = \beta.$$

Prodloužené strany *ad*, *bc* protínejtež se v bodě f, tvoříce úhel γ. Označíme-li

$$\sphericalangle\, cad = \sphericalangle\, cbd = \varphi,$$

jest $$\sphericalangle\, bac = \alpha - \varphi, \qquad \sphericalangle\, abd = \beta - \varphi,$$

z čehož $$\alpha - \varphi + \beta - \varphi = \mathrm{R}.$$

Odtud jde $2\varphi = \alpha + \beta - \mathrm{R} = \mathrm{R} - \gamma$.
Lze tedy úhel φ takto sestrojiti:

Veďme s vrcholu b kolmici $bm \perp af$, i jest

$$\sphericalangle fmb = \varphi.$$

Osa půlící úhel fbm stanoví tedy v straně af vrchol d. Vedeme-li podobně $an \perp bf$, půlí úhlopříčka ac úhel fan.

Úloha 8.

Do kružnice vepsán čtyrúhelník, jehož úhlopříčky stojí na sobě kolmo. Dána-li jedna strana a přilehlé k ní úhly, jest vypočítati poloměr kružnice opsané.

Posl. fil. *Rud. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Bohuslav Závada*, stud. VII. tř. r. v Lipníku.)

V čtyrúhelníku $abcd$ budiž dána strana $\overline{ab} = a$ a úhly $\sphericalangle bad = \alpha$, $\sphericalangle abc = \beta$; označme ještě

$$\sphericalangle bac = \alpha_1, \qquad \sphericalangle abd = \beta_1,$$

poloměr kružnice opsané čtyrúhelníku budiž r. Jest pak

$$\sin \alpha_1 = \frac{\overline{bc}}{2r}, \qquad \sin \beta_1 = \frac{\overline{ad}}{2r}$$

a jelikož $\quad \alpha_1 + \beta_1 = \mathrm{R}, \quad \sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \beta_1 = 1,$

tudíž $\quad 4r^2 = \overline{ad}^2 + \overline{bc}^2.$

Strany $\overline{ad}$ a $\overline{bc}$ vyjádříme takto:

$$\overline{ad} = \frac{a \sin \beta_1}{\sin(\alpha + \beta_1)}, \qquad \overline{bc} = \frac{a \sin \alpha_1}{\sin(\beta + \alpha_1)};$$

úhly pak α_1 a β_1 vyhovují podmínkám těmto

$$\alpha_1 + \beta_1 = \mathrm{R}, \qquad \alpha - \alpha_1 = \beta - \beta_1,$$

z nichž vypočítáme

$$\alpha_1 = \frac{\mathrm{R} + \alpha - \beta}{2}, \qquad \beta_1 = \frac{\mathrm{R} - \alpha + \beta}{2}.$$

Jest proto

$$\overline{ad} = \frac{a \sin \frac{\mathrm{R} - \alpha + \beta}{2}}{\sin \frac{\mathrm{R} + \alpha + \beta}{2}}, \qquad \overline{bc} = \frac{a \sin \frac{\mathrm{R} + \alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\mathrm{R} + \alpha + \beta}{2}},$$

tudíž

$$4r^2 = \frac{a^2}{\sin^2\left(\frac{R}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\left[\sin^2\left(\frac{R}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\sin^2\left(\frac{R}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right].$$

Úloha 9.

Jsou-li ve čtyrúhelníku abcd tři strany stejné

$$\overline{bc} = \overline{cd} = \overline{da} = b,$$

jest o stranách a úhlech jeho dokázati relace:

$$\sin\alpha - \sin\beta = \sin(\alpha+\delta) = -\sin(\beta+\gamma),$$

$$a : b = \sin\frac{\gamma-\delta}{2} : \sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Posl. fil. *R. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Rudolf Klíma*, stud. VII. tř. real. v Písku.)

Ku straně $\overline{ab} = a$ spusťme kolmice cc', dd'; jest pak, je-li $\overline{cc'} > \overline{dd'}$,

$$\overline{dd'} = b\sin\alpha, \quad \overline{cc'} = b\sin\beta = b\sin\alpha + b\sin(\beta+\gamma).$$

Jelikož $\qquad (\alpha+\delta) = 4R - (\beta+\gamma),$

jest $\qquad \sin(\alpha+\delta) = -\sin(\beta+\gamma);$

z toho plyne

$$\sin\alpha - \sin\beta = \sin(\alpha+\delta) = -\sin(\beta+\gamma).$$

Označíme-li úhlopříčky

$$\overline{ac} = m, \quad \overline{bd} = n,$$

jest $\qquad m^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta$

$\qquad n^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha,$

tudíž $\qquad m^2 - n^2 = 2ab(\cos\alpha - \cos\beta).$

Mimo to jest $\qquad m^2 = 2b^2 - 2b^2\cos\delta$

$\qquad n^2 = 2b^2 - 2b^2\cos\gamma,$

pročež $\qquad m^2 - n^2 = 2b^2(\cos\gamma - \cos\delta).$

Jest tedy $\qquad a(\cos\alpha - \cos\beta) = b(\cos\gamma - \cos\delta)$

čili $\qquad a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = b\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\sin\frac{\gamma-\delta}{2};$

jelikož $\frac{\alpha+\beta}{2} = 2R - \frac{\gamma+\delta}{2}$,

jest $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\gamma+\delta}{2}$,

a relace poslední přechází v jednodušší

$$a\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = b\sin\frac{\gamma-\delta}{2},$$

která je totožna s úměrou v úloze vyslovenou.

Úloha 10.

Z kterého místa dráhy zemské viděli bychom Merkura nejdále od slunce? Podáno buď řešení i odůvodnění geometrické!

P. *Marian Haas*, kněz na Strahově.

Řešení. (Zaslal p. *Robert Váňa*, bohoslovec II. ročníku v Olomouci.)

Předpokládejme dráhu zemskou jakožto kružnici, v jejímž středu jest slunce. Vedeme-li středem slunce a Merkura kružnici, protne nám tato dráhu zemskou ve dvou bodech A, B. Z obou vidíme slunce a Merkura v téže úhlové vzdálenosti. Ze všech bodů mimo kružnici vidíme tato tělesa v úhlu menším, z bodů uvnitř kružnice v úhlu větším. Na dráze zemské jest onen bod mezi A, B. Měníme-li poloměr i polohu pomocné kružnice tak, aby se vzdálenost A B zmenšovala, bude hledaný bod vždy mezi nimi. Splynou všechny tři v jediný, když se kružnice dotýká kruhové dráhy zemské. Úloha převedena tedy na sestrojení kružnice, která prochází sluncem a Merkurem dotýkajíc se dráhy zemské. Sestrojení jest snadné, uvážíme-li, že slunce jest ve středu kružnice, znázorňující nám dráhu zemskou. Sestrojení: Spojme obě tělesa přímkou, veďme k ní Merkurem kolmici, která nám protne dráhu zemskou v hledaném bodě. Jsou ovšem dva.

Úloha 11.

Úhlopříčný řez komolého čtvercového jehlanu má podobu polovice pravidelného šestiúhelníka o straně a. Jest vypočítati povrch a obsah jehlanu.

Prof. *Th. Schulz.*

Řešení. (Zaslal p. *Karel Čupr*, stud. VI tř. gym. ve Vysokém Mýtě.)

Základny daného jehlanu jsou čtverce o úhlopříčkách $2a$, a; výška jehlanu jest

$$v = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Výška pobočné stěny lichoběžníkové jest

$$v' = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{4}\sqrt{2}\right)^2} = \frac{a}{4}\sqrt{14}.$$

Jest tedy povrch jehlanu

$$P = 2a^2 + \frac{a^2}{2} + 4 \cdot \frac{3a}{4}\sqrt{2} \cdot \frac{a}{4}\sqrt{14}$$

$$P = \frac{a^2}{2}(5 + 3\sqrt{7});$$

obsah jehlanu

$$O = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\left(2a^2 + \frac{a^2}{2} + a^2\right) = \frac{7}{12}a^3\sqrt{3}.$$

Úloha 12.

Rozdělíme-li výšku kužele na n stejných dílů a vedeme dělicími body roviny rovnoběžné se základnou, rozdělí se plášť kužele na části tvořící řadu arithmetickou stupně prvního a kužel na díly tvořící řadu arithmetickou stupně druhého. Které jsou ty řady?

Prof. *Th. Schulz.*

Řešení. (Zaslal p. *Adolf Mikulášek*, stud. VI. tř. realky v Hodoníně.)

Jsou-li části pláště od vrcholu počítané P_1, P_2, P_3, ... a části kužele O_1, O_2, O_3, ...,

jest $P_1 : (P_1 + P_2) : (P_1 + P_2 + P_3) : (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) : \cdots$
$= 1 : 4 : 9 : 16 : \cdots : h^2$,

tudíž $P_1 : P_2 : P_3 : P_4 : \cdots : P_n = 1 : 3 : 5 : 7 : \cdots : (2n - 1)$.

Obsahy dílů kužele řídí se úměrou

$$O_1 : (O_1 + O_2) : (O_1 + O_2 + O_3) : (O_1 + O_2 + O_3 + O_4) : \cdots$$
$$= 1 : 8 : 27 : 64 : \cdots : n^3,$$

pročež

$$O_1 : O_2 : O_3 : O_4 : \cdots : O_n = 1 : 7 : 19 : 37 : \cdots : (3n^2 - 3n + 1).$$

Úloha 13.

V nádobu mající tvar kužele komolého, větší hranou vzhůru obráceného, vložili jsme kouli, která se dotýká kraje i dna nádoby a ponořila se do $\frac{2}{5}$ svého poloměru; 39·697 kg vody vyteklo. Kolik vody zbylo v nádobě původně zcela naplněné, je-li poloměr dna roven $\frac{2}{3}$ poloměru hořejší hrany?

Prof. *Th. Schulz.*

Řešení. (Zaslal p. *Otto Titl*, stud. VII. tř. r. v Karlíně.)

Poloměr koule budiž r, poloměr dna ϱ_1, poloměr hrany hořejší ϱ, výška kužele v. Jest pak

$$v = \frac{2}{5} r, \quad \varrho^2 = \frac{2}{5} r \cdot \frac{8}{5} r,$$

tudíž

$$\varrho = \frac{4}{5} r, \quad \varrho_1 = \frac{2}{3} \varrho = \frac{8}{15} r.$$

Poloměr koule vypočítáme ze vztahu

$$\pi \varrho^2 \frac{v}{2} + \frac{\pi v^3}{6} = 39697$$

čili

$$\frac{\pi}{3} \cdot \frac{r}{5} \left(\frac{48}{25} r^2 + \frac{4}{25} r^2\right) = 39697,$$

odkudž

$$r = \sqrt[3]{\frac{375 \,.\, 39697}{52\pi}}.$$

Logarithmicky ustanovíme $r = 45\,cm$,

z čehož $\quad v = 18, \quad \varrho = 36, \quad \varrho_1 = 24.$

Jelikož jest obsah komolého kužele

$$K = \frac{\pi}{3} \cdot v\,(\varrho^2 + \varrho\varrho_1 + \varrho_1^2) = 51571 \text{ cm}^3,$$

zbylo v nádobě vody 11874 cm^3 čili 11·874 *kg*.

Úloha 14.

Dány jsou rovnice tří kružnic:

$$K_1 \equiv 2x^2 + 2y^2 - 2 - \sqrt{3} = 0$$
$$K_2 \equiv 2x^2 + 2y^2 - 8x + 2 + 3\sqrt{3} = 0$$
$$K_3 \equiv 2x^2 + 2y^2 - 6x - 2y\sqrt{3} + 4 + \sqrt{3} = 0.$$

Jest dokázati, že kružnice tyto navzájem se dotýkají, a ustanoviti plochu mezi nimi obsaženou.

Prof. *Th. Schulz.*

Řešení. (Zaslal p. *František Vondráček*, stud. VII. tř. r. v Jičíně.)

Uveďme rovnice kružnic na normálný tvar

$$K_1 \ldots x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2$$

$$K_2 \ldots (x-2)^2 + y^2 = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$K_3 \ldots \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2.$$

Odtud poznáváme souřadnice středů s_1, s_2, s_3 i délky poloměrů r_1, r_2, r_3. Délky středných jsou

$$\overline{s_1 s_2} = 2 = r_1 + r_2$$
$$\overline{s_2 s_3} = 1 = r_2 + r_3$$
$$\overline{s_3 s_1} = \sqrt{3} = r_3 + r_1,$$

z čehož patrno, že kružnice po dvou vně se dotýkají. Trojúhelník $s_1 s_2 s_3$, jehož strany jsou 1, 2, $\sqrt{3}$, má úhly

$$\alpha = 30^0, \quad \beta = 60^0, \quad \gamma = 90^0;$$

plocha jeho $\varDelta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Odečteme-li od této plochy obsahy tří výsečí kruhových, obdržíme plochu kružnicemi omezenou:

$$P = \varDelta - \pi\left(\frac{r_1^2\alpha}{360} + \frac{r_2^2\beta}{360} + \frac{r_3^2\gamma}{360}\right)$$

$$P = \frac{\sqrt{3}}{2} - \pi\left(\frac{4+2\sqrt{3}}{48} + \frac{6-3\sqrt{3}}{12} + \frac{2-\sqrt{3}}{8}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}(5 - 2\sqrt{3}) = 0{\cdot}0629\ldots$$

Úloha 15.

Dvě kuželosečky dotýkají se svými vrcholy přímky T v jediném bodě. Tečny vedené z libovolného bodu přímky T dotýkají se kuželoseček v bodech A, B. Spojnice obou bodů prochází pevným bodem.

P. *Marian Haas*, kněz na Strahově.

Řešení. (Zaslal p. *Leopold Šrámek*, stud. VIII. tř. g. v Olomouci.)

Volme přímku T za osu Y a bod dotyčný za počátek souřadnic. Kuželosečky mají pak rovnice:

$$K_1 \cdots y^2 = 2p_1 x + q_1 x^2$$
$$K_2 \cdots y^2 = 2p_2 x + q_2 x^2.$$

Veďme k nim tečny v bodech A (x_1, y_1), B (x_2, y_2); rovnice jich jsou:

$$T_2 \cdots yy_1 = p_1 (x + x_1) + q_1 xx_1$$
$$T_2 \cdots yy_2 = p_2 (x + x_2) + q_2 xx_2.$$

Úsečky tečen na ose Y jsou, položíme-li $x = 0$,

$$m = p_1 \frac{x_1}{y_1}, \quad n = p_2 \frac{x_2}{y_2}.$$

Aby tečny procházely jediným bodem osy Y, jest nutnou a postačitelnou podmínkou $m = n$.

Dosadíme-li $\frac{x_1}{y_1} p_1 = m$, $\frac{x_2}{y_2} p_2 = m$ do rovnic kuželoseček, obdržíme snadno

$$x_1 = \frac{2p_1}{q_1 + \frac{p_1^2}{m^2}}, \quad y_1 = \frac{2\frac{p_1^2}{m}}{q_1 + \frac{p_1^2}{m^2}};$$

$$x_2 = \frac{2p_2}{q_2 + \frac{p_2^2}{m^2}}, \quad y_2 = \frac{2\frac{p_2^2}{m}}{q_2 + \frac{p_2^2}{m^2}}.$$

To jsou souřadnice bodů, ve kterých se dotýkají tečny vedené bodem M $(0, m)$ obou kuželoseček. Spojnice bodů dotyčných má v determinantní formě tuto rovnici

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

a dosadíme-li, po krátké úpravě

$$\begin{vmatrix} x & 2p_1 & 2p_2 \\ y & 2\frac{p_1^2}{m} & 2\frac{p_2^2}{m} \\ 1 & q_1 + \frac{p_1^2}{m^2} & q_2 + \frac{p_2^2}{m^2} \end{vmatrix} = 0$$

čili ve tvaru rozvinutém

$$x\frac{2}{m}(p_1^2 q_2 - p_2^2 q_1) + y\left[2(p_2 q_1 - q_2 p_1) + \frac{2p_1 p_2}{m^2}(p_1 - p_2)\right]$$
$$+ 4p_1 p_2 \frac{p_2 - p_1}{m} = 0.$$

Průsek této přímky s osou X bude

$$x = \frac{2p_1 p_2 (p_1 - p_2)}{p_1^2 q_2 - q_1 p_2^2},$$

jest tedy nezávislý na velikosti m.

Úloha 16.

Čísly celými řešiti jest rovnici

$$\frac{x}{2} = 2^{\frac{x}{y}}.$$

Posl. fil. *R. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Antonín Schönbaum*, stud. VIII. tř. gym. v Benešově.)

Dané rovnici dejme podobu

$$x = 2^{\frac{x+y}{y}}$$

a položme
$$\frac{x+y}{y} = u.$$

Potom jest $x = 2^u$, $y = \frac{x}{u-1}$.

Poněvadž x obsahuje pouze kmenného činitele 2, musí býti při celistvém y

$$u-1=2^k, \qquad u=2^k+1,$$

tedy $$x=2^{2^k+1}, \qquad y=2^{2^k-k+1}.$$

Na př.

$$\begin{array}{llll} k=0, & u=2, & x=4, & y=4, \\ k=1, & u=3, & x=8, & y=4, \\ k=2, & u=5, & x=32, & y=8 \text{ atd.} \end{array}$$

Úloha 17.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$a+x-y-z=b+y-z-x=c+z-x-y$$
$$=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Posl. fil. *R. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Jaroslav Novák*, stud. VIII. tř. gym. v Olomouci.)

Položíme-li $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=P$,
nabudeme rovnice

$$x-y-z=P-a, \quad y-z-x=P-b, \quad z-x-y=P-c,$$

z nichž vyjádříme

$$x=\frac{b+c}{2}-P, \quad y=\frac{c+a}{2}-P, \quad z=\frac{a+b}{2}-P.$$

Jelikož dle substituce jest

$$x^2+y^2+z^2=P^2,$$

dojdeme rovnice

$$8P^2-8(a+b+c)P+(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2=0,$$

ze které stanovíme

$$P=\frac{1}{2}\left[a+b+c\pm\sqrt{ab+bc+ca}\right].$$

Tím jsou též neznámé x, y, z určeny.

Úloha 18.

Vyloučiti jest veličiny x, y, z z rovnic

$$a+x-y-z=b+y-z-x=c+z-x-y$$
$$=d+x+y+z=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Posl. fil. *R. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *C. Fiala,* stud. VII. tř. real. v Plzni.)

Jako v úloze předešlé jest i zde

$$8P^2 - 8(a+b+c)P + (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 = 0;$$

mimo to jest $\qquad 4P = a + b + c + d.$

Vložíme-li tuto hodnotu do předešlé rovnice, obdržíme

$$(a+b+c+d)^2 - 4(a+b+c)(a+b+c+d)$$
$$+ 2(a+b)^2 + 2(b+c)^2 + 2(c+a)^2 = 0.$$

Toť výsledek eliminace, který však ještě v jiné formě psáti můžeme. Dáme-li podmínce té tvar

$$d^2 - 2(a+b+c)d - 3(a+b+c)^2 + 2(a+b)^2 + 2(b+c)^2$$
$$+ 2(c+a)^2 = 0$$

čili

$$d^2 - 2(a+b+c)d + a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 0,$$

lze ji též upraviti takto

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(ab + bc + ca + ad + bd + cd)$$

aneb $\qquad (a+b+c+d)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$

Úloha 19.

Dokázati jest, že úhly spojené vztahem

$$\alpha - \beta = \beta - \gamma = \gamma - \alpha = 120^0$$

vyhovují relacím

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 0,$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{3}{2}.$$

Posl. fil. *R. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Eduard Pleva*, stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře.)

Patrně jest

$$\cos\alpha = \cos(\beta + 120^0) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos\beta - \sin\beta),$$

$$\cos\beta = \cos(\gamma + 120^0) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos\gamma - \sin\gamma),$$

$$\cos\gamma = \cos(\alpha + 120^0) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha),$$

z čehož

$$(m)\quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{1}{4}[\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$$
$$+ 3(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - \sqrt{3}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)].$$

Podobně jest

$$\sin\alpha = \sin(\beta + 120^0) = \frac{1}{2}(\cos\beta - \sqrt{3}\sin\beta),$$
$$\sin\beta = \sin(\gamma + 120^0) = \frac{1}{2}(\cos\gamma - \sqrt{3}\sin\gamma),$$
$$\sin\gamma = \sin(\alpha + 120^0) = \frac{1}{2}(\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha),$$

tudíž

$$(n)\quad \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{1}{4}[\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$$
$$+ 3(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) - \sqrt{3}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)].$$

Sečtouce rovnice (m) a (n) obdržíme

$$3 = \frac{1}{4}[3 + 9 - 2\sqrt{3}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)],$$

odkudž vyplývá relace prvá

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 0.$$

Hledíc k tomuto výsledku přechází rovnice (m) v tuto:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{1}{4}[3 + 2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)],$$

z níž dospíváme k relaci druhé

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{3}{2}.$$

Poznámka redakční.

Z rovnice (m) plyne

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -\sqrt{3}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma);$$

proto jest též

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 0.$$

Rovnice (n) poučuje nás, že jest také

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{3}{2}.$$

Budiž ještě toto připomenuto: Z podmínek

$$\alpha - \beta = \beta - \gamma = 120^0$$

plyne $\qquad \beta = \gamma + 120^0, \qquad \alpha = \gamma + 240^0,$

tudíž $\qquad \gamma - \alpha = -240^0.$

Záporný úhel -240^0 lze však nahraditi kladným úhlem $360^0 - 240^0 = 120^0$. Tím lze vysvětliti zdánlivý odpor, že součet rovnic

$$\alpha - \beta = 120^0, \quad \beta - \gamma = 120^0, \quad \gamma - \alpha = 120^0$$

vede k výsledku

$$0 = 360^0.$$

Při periodičnosti funkcí goniometrických má úhel 0^0 stejnou platnost s úhlem 360^0.

Jiné řešení. (Zaslal p. *Adolf Mikulášek,* stud. VI. tř. r. v Hodoníně.)

Z daných podmínek plyne

$$\alpha + \beta = 2\gamma, \quad \alpha - \beta = 120^0.$$

Jelikož jest obecně

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 2 \sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + \sin 2\gamma,$$

bude ve zvláštním případě našem

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 2 \sin 2\gamma \,.\, (-\frac{1}{2}) + \sin 2\gamma = 0.$$

Podobně obdržíme též

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 0.$$

Dle vzorce $\quad \cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$

jest však

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - 3,$$

pročež při daných podmínkách

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{3}{2}\,.$$

Úloha 20.

Je-li ve čtyrúhelníku ABCD bod U průsečíkem úhlopříček, a je-li

$$UA = AD, \quad UB = BC,$$

budiž dokázáno:

a) Strany čtyrúhelníka vázány jsou vztahem

$$a(b^2 + d^2) + bcd = a^3;$$

b) čtyrúhelníku lze opsati kružnici poloměru r vyhovujícího rovnici

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 4.$$

Posl. fil. *R. Hruša.*

Řešení. (Zaslal p. *Bohuslav Hostinský*, stud. VIII. tř. akad. gymn. v Praze.)

a) Strany čtyrúhelníka po řadě označme

$$\overline{AB} = a, \quad \overline{BC} = b, \quad \overline{CD} = c, \quad \overline{DA} = d;$$

mimo to buď

$$UC = x, \quad UD = y, \quad \sphericalangle AUD = 2R - \omega.$$

Z trojúhelníků ABU, CDU vysvítají relace

$$a^2 = b^2 + d^2 + 2bd \cos \omega$$
$$c^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega,$$

z rovnoramenných pak trojúhelníků BCU, ADU vyvodíme

$$x = 2b \cos \omega, \quad y = 2d \cos \omega.$$

Dosadíce tyto hodnoty do rovnice druhé a přihlížejíce k rovnici první, obdržíme

$$c^2 = 4 \cos^2 \omega \, (b^2 + d^2 + 2bd \cos \omega) = 4a^2 \cos^2 \omega;$$

jest tudíž $\qquad c = 2a \cos \omega.$

Vložíme-li hodnotu $\qquad 2\cos \omega = \frac{c}{a}$

do rovnice první, přijdeme k relaci

$$a^2 = b^2 + d^2 + \frac{bcd}{a},$$

která jest jen jinou formou relace dané.

b) Že čtyrúhelníku ABCD za daných podmínek lze kružnici opsati, vysvítá z toho, že jest

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = \omega.$$

Poloměr *r* této kružnice dán jest rovnicí

$$r = \frac{a}{2 \sin \omega};$$

jest tedy $\qquad \sin \omega = \frac{a}{2r}$

a dle vztahu dříve vyvozeného

$$\cos\omega = \frac{c}{2a}.$$

Proto jest

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 4,$$

jak bylo dokázati.

Správná řešení úloh v tomto ročníku Časopisu obsažených zaslali pp.:

Albrecht Antonín, stud. V. tř. r. na Žižkově, úl. 6.
Bahník Ladislav, stud. VIII. tř. g. v Příbrami, úl. 1. až 9., 10. až 17., 19., 20.
Barbořík Štěpán, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 2., 4. až 9., 11., 12., 13., 17., 19., 20.
Bezloja Alois, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 20.
Bohuslav František, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 4., 5., 7., 8., 9., 11., 13., 14., 17., 18.
Borovanský Vladislav, stud. VII. tř. g. v Jindř. Hradci, úl. 4., 5., 11., 13.
Bršlica J., stud. VII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 4., 5., 11., 12., 13., 17., 19.
Brzobohatý Břetislav, stud. VII. tř. r. v Lipníku, úl. 1. až 20.
Cenefels Karel, stud. V. tř. g. v Domažlicích, úl. 5., 8.
Čupr Karel, stud. VI. tř. g. ve Vysokém Mýtě, úl. 1. až 20.
Drábek Josef, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 4. až 8., 11., 17., 18., 19.
Duchek František, stud. VI. tř. r. v Plzni, úl. 3. až 8., 12., 18., 19., 20.
Erben Ladislav, stud. VIII. tř. g. v Praze (Truhlářská ul.), úl. 5., 11.
Fiala C., stud. VII. tř. r. v Plzni, úl. 1., 5. až 8., 11. až 14., 16. až 19.
Fiala František, stud. VI. tř. r. v Písku, úl. 4. až 9., 11., 12., 16. až 20.
Fibiger Karel, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové, úl. 1., 4. až 8., 11. až 20.
Grössl Václav, stud. VII. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 1., 2., 4. až 9., 11. až 20.

Habrich Alois, stud. VII. tř. r. v Prostějově, úl. 3. až 9., 11. až 20.
Hanosek Bohumír, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 9., 11. až 14., 16., až 20.
Hassmann Antonín, stud. VI. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 4. až 8., 11. až 14., 19.
Herman J., stud. V. tř. g. v Praze (Křemencová ul.), úl. 17., 18.
Hostinský Bohuslav, stud. VIII. tř. akad. g. v Praze, úl. 16., 17., 20.
Hujer Zdeněk, stud. VII. tř. g. na Smíchově, úl. 4., 5., 7. až 9., 11. až 13., 16., 17., 19., 20.
Hynek Rudolf, stud. VIII. tř. g. v Pelhřimově, úl. 4., 5., 11., 12., 13.
Jakubský Ot., stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 4. až 9., 11. 13., 14., 17., 18.
Janota R., stud. V. tř. r. v Rakovníku, úl. 5. až 7., 11. až 13., 16.
Jarý Josef, soukr. stud. g. ve Vysokém Mýtě, úl. 1., 2., 4. až 9., 11. až 14., 16. až 20.
Kálal František, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 1. až 20.
Klíma Rudolf, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 1. až 20.
Kneidl F., stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 4., 5., 6., 9., 11., 13., 14., 17., 19., 20.
Kohn Arthur, stud. VI. tř. g. v Roudnici, úl. 1., 5.
Kopidlanský František, stud. VII. tř. g. v Jindř. Hradci, úl. 4., 5., 11., 13.
Kordina Karel, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 11., 13.
Kostelecký Josef, stud. VI. tř. r. v Brně, úl. 4. až 9., 11., 16. až 20.
Koza František, stud. VIII. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 4., 5., 11., 13., 19.
Kulhánek Josef, stud. VII. tř. g. v Rychnově n. Kn., úl. 4. a 5.
Lochmann Vilém, stud. VIII. tř. g. v Praze (Žitná ul.), úl. 1. až 20.
Los František, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1., 2., 4. až 9., 11. až 14., 16. až 20.
z Maillardů Mořic, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 4. až 8., 11., 12., 13., 16.
Mareš František, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 4. až 8., 11.
Mikeska Alois, stud. VI. tř. g. v Místku, úl. 11., 13.
Mikulášek Adolf, stud. VI. tř. r. v Hodoníně, úl. 1., 2., 4. až 8., 11., 12., 13., 17., 19., 20.

Mohelský Karel, stud. VII. tř. g. v Třebíči, úl. 4., 5., 7., 8., 11., 13., 14., 17.
Navrátil Josef, stud. VI. tř. r. v Uh. Brodě, úl. 1. až 20.
Němec Václav, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 4. až 9., 11., 13., 14., 16., 17., 19., 20.
Novák Jaroslav, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 9., 11. až 14., 16. až 20.
Novák Josef, stud. VII. tř. g. v Jičíně, úl. 4. až 7., 11., 13., 17., 18.
Novotný Jan, stud. VI. tř. r. v Českých Budějovicích, úl. 4. až 7.
Pavelec Jaroslav, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 1., 2., 4. až 9., 11. až 20.
Pergler František, stud. V. tř. r. v Rakovníku, úl. 5., 7., 11., 12.
Petz Leopold, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1., 4. až 9., 11. až 14., 16., 17., 19., 20.
Pithard Jaroslav, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové, úl. 1., 2., 4. až 8., 11. až 20.
Pleva Eduard, stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 1. až 20.
Plicka Stanislav, stud. VII. tř. g. v Roudnici, úl. 4. až 8., 11., 13., 16., 17.
Procházka Bedřich, svob. pán, stud. VI. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 5., 6., 7., 11.
Procházka Václav, stud. VII. tř. r. na Starém Městě v Praze, úl. 1., 4. až 8., 10., 11., 13., 14.
Rataj Jan, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 1., 2., 4. až 9., 11., 12., 14., 15.
Raus František, stud. V. tř. g. v Českých Budějovicích, úl. 7.
Růžička Jan, učitel v Tetíně, úl. 5., 11., 13.
Rychlík Karel, stud. VI. tř. akad. g. v Praze, úl. 1. až 20.
Ryšlink E., stud. V. tř. r. v Rakovníku, úl. 5., 6., 7., 11. až 13., 16.
Seifert Jaroslav, stud. VI. tř. r. v Karlíně, úl. 1., 3. až 9. 11. až 20.
Schönbaum Antonín, stud. VIII. tř. g. v Benešově, úl. 1. až 20.
Skála Jan, stud. VII. tř. g. v Třebíči, úl. 4. až 9., 11., 13., 14., 17., 18.
Sklenář Methoděj, stud. VII. tř. g. v Třebíči, úl. 4. až 9., 11., 13., 14., 17., 18.
Sládek Alois, stud. VI. tř. r. v Uh. Brodě, úl. 1. až 20.
Spurný Karel, stud. VII. tř. g. v Místku, úl. 1. až 20.
Strumhaus Ladislav, stud. VII. tř. g. v Místku, úl. 1. až 20.
Surka Leopold, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 9., 11. až 17., 19., 20.

Šantroch Jaroslav, právník v Turnově, úl. 3. až 9., 11. až 14., 16. až 19.
Šebela Mikuláš, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 4., 5., 9., 11., 13.
Šilhan Ludvík, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1., 2., 4. až 8., 11. až 14., 16., 17.
Šmeral Theodor, stud. VII. tř. g. v Třebíči, úl. 4. až 9., 11., 13., 14., 17. až 19.
Špíšek Julius, stud. VI. tř. r. v Uh. Brodě, úl. 2., 4. až 9., 11., 12., 13., 16., 17., 19.
Šrámek Leopold, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 20.
Šrámek Stanislav, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 1, 2., 4. až 9., 11., 12., 13., 17., 19., 20.
Štemberg Antonín, stud. VIII. tř. g. v Příbrami, úl. 4., 11., 13.
Titl Otto, stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 4., 5., 11., 13.
Valach František, bohoslovec v Olomouci, úl. 1. až 20.
Vališ Ignát, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1., 2., 4. až 9., 11. až 14., 16., 17., 19., 20.
Váňa Robert, bohoslovec v Olomouci, úl. 1. až 20.
Vávra Vladimír, stud. VII. tř. g. v Roudnici, úl. 5., 11.
Weissenstein Rudolf, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové, úl. 1., 4., 5., 6., 11. až 14.
Vodička Karel, jednoroč. dobrovolník u c. a k. pěšího pluku č. 75. v Jindř. Hradci, úl. 4. až 9., 11. až 14., 16. až 20.
Vondráček František, stud. VII. tř. r. v Jičíně, úl. 4. až 9., 11., 13. až 15, 17. až 20.
Závada Bohuslav, stud. VII. tř. r. v Lipníku, úl. 1. až 20.
Závada František, stud. VI. tř. r. v Lipníku, úl. 1., 3. až 9., 11., 12., 13., 17., 18.
Zavadil Stanislav, stud. VII. tř. r. v Lipníku, úl. 1. až 20.
Zelenka František, stud. VI. tř. g. v Roudnici, úl. 5., 6., 7., 11., 13.
Zlámal František, stud. VI. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 5. až 7., 11., 13.
Žáček Augustin, stud. V. tř. g. v Českých Budějovicích, úl. 5.
Nepodepsaný stud. r. v Brně, úl. 1., 4. až 9., 11., 16. až 20.