Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jan Sobotka

Příspěvek ku grafickému řešení rovnic 2., 3. a 4. stupně. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 34 (1905), No. 2, 97--105

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120942

Příspěvek ku grafickému řešení rovnic 2., 3. a 4. stupně.

Napsal
Jan Sobotka,

(Dokončení.)

Isoplety n jsou tedy normálami paraboly k; ony obalují proto parabolu Neil'ovu, jejíž rovnice jest

$$\frac{y^2}{4}+\frac{x^3}{27}=0 \qquad (7)$$

jak z rovnice (3) patrno, což konstrukce rovněž potvrzuje.

Neboť bod dotyčný V přímky n s h obdržíme jakožto střed křivosti paraboly k bodu H příslušný, když protneme l rovnoběžkou ku x bodem H vedenou v bodě U, načež bod V vyplývá jakožto průsečík přímky n s kolmicí z U na x spuštěnou. Značí-li V_0 patu této kolmice, obdržíme 2 podobně položené trojúhelníky KOL, UV_0L v poměru $\frac{1}{2}$.

Jest tedy $LV_0=-2z^2$, $UV_0=2z$ a proto $U_0V=2z^3$, z čehož plyne pro h parametrické vyjádření

$$x=-3z^2, \qquad y=2z^3,$$

jež vede k rovnici (7).

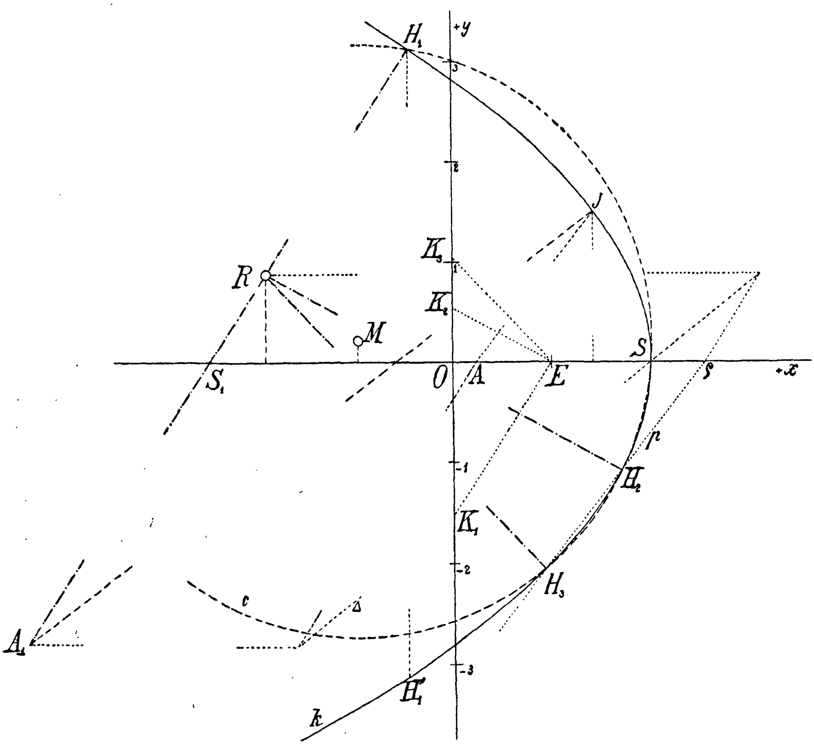
Abychom tedy řešili rovnici

$$z^3+pz+q=0, \qquad (6)$$

sestrojíme bod $R(p \mid q)$ a vedeme jím možné obecné tři normály n_1, n_2, n_3 k parabole k; pak vedeme k ním rovnoběžky ohniskem E, které nechť protnou y v bodech K_1, K_2, K_3. Zřídíme-li na y měřítko m mající za základní jednotku úsečku rovnou $\overline{OE}$, jehož bod nullový splývá s O a jehož smysl kladný jest souhlasný s oním pro y, pak udávají čísla na m příslušná bodům K_1, K_2, K_3 kořeny rovnice (6).

Obecně jest tu

$$z_i = \frac{\overline{OK_i}}{\overline{OE}}, \qquad (i = 1, 2, 3).$$



Obr. 3.

Pro paty H_1, H_2, H_3 vytčených normál obdržíme pořadnice

$$y_1 = -2z_1, \quad y_2 = -2z_2, \quad y_3 = -2z_3. \qquad (\alpha)$$

Položíme-li tudíž na přímku kolmou k x měřítko n tak, aby nullový bod jeho ležel na x, dále aby smysl kladný jeho splynul se záporným osy y a aby základní jednotka jeho rovnala se $2 . \overline{OE}$, tu udávají pořadnice pro paty H_1, H_2, H_3, měřené na tomto měřítku, rovněž kořeny rovnice (6).

Křivka h dělí rovinu ve dvě části; první z nich, jež osu y neobsahuje, obsahuje takové body, z nichž lze ku h vésti tři realné tečny, druhá pak obsahuje takové body, z nichž lze ku h vésti pouze jednu realnou tečnu; v každém přechodním bodě na h ležícím splynou dvě tečny v jednu a vyskytuje se pak ještě jedna tečna realná bod ten obsahující. Z toho plyne se zřetelem na rovnici (7), že daná rovnice (6) má tři různé realné kořeny, když

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0,$$

jeden realný, dva sdruženě imaginárné, když

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$$

a konečně dva stejné kořeny, když

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0.$$

4. Řešení rovnice (6) uvedli jsme tudíž na problém normál paraboly. Je-li parabola ta v celém svém průběhu dána, pak lze konstruktivní řešení pomocí kružidla a pravítka provésti.

Má-li bod R, z něhož se mají vésti normály k parabole o rovnici

$$y^2 = 2\,ax\,,$$

souřadnice ξ, η, tu, jak lze i syntheticky snadno odvoditi, kružnice c, jejíž střed M má souřadnice

$$\frac{\xi + a}{2}, \quad \frac{\eta}{4}$$

a která prochází vrcholem paraboly, seče parabolu tuto dále ještě v patách H_1, H_2, H_3 žádaných normál.

V našem případě má parabola k rovnici

$$y^2 = -\,4\,(x - 2). \tag{8}$$

Jest tedy $a = 2$ a bod R má souřadnice $\xi = p$, $\eta = q$, proto má bod M souřadnice

$$\xi = \frac{p}{2}, \quad \eta = \frac{q}{4},$$

a rovnice kružnice c zní

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{q}{4}\right)^2 = \varrho^2, \tag{9}$$

když značí ϱ poloměr její. Jelikož prochází c vrcholem paraboly, jest

$$\varrho^2 = \left(\frac{q}{4}\right)^2 + \left(\frac{p}{2} - 2\right)^2. \tag{10}$$

čímž se rovnice kružnice redukuje na tvar

$$x^2 - px + y^2 - \frac{q}{2} y + 2p - 4 = 0.$$

Vsadíme-li do této rovnice místo x hodnotu $-\frac{y^2}{4} + 2$ z rovnice (8) plynoucí, obdržíme po samozřejmé redukci a dělení veličinou $\frac{y}{2}$ rovnici

$$\left(\frac{y}{2}\right)^3 + p\left(\frac{y}{2}\right) - q = 0. \tag{11}$$

Srovnáme-li rovnici tuto s (6), vyhovuje jí hodnota $y = -2z$, což souhlasí s rovnostmi (α).

V skutku tedy podává kružnice c řešení problému normál, k němuž jsme se odvolali, a poskytuje řešení kubické rovnice (6).

Nyní můžeme ještě bodem E vésti rovnoběžky k normálám RH_1, RH_2, RH_3, které na $m = y$ stanoví body K_1, K_2, K_3 a tudíž i kořeny z_1, z_2, z_3.

5. Stává se, že nelze všechny průsečíky H_1, H_2, H_3 kružnice c s parabolou k s dostatečnou přesností graficky vyjádřiti, poněvadž jednotlivé úhly, v nichž se c a k sečou, jsou poměrně malé. Přesnější grafické vyjádření obdržíme tu na základě vlastnosti, že dvě tětivy, které všechny čtyři body průsečné $c . k$

spojují, jsou k ose x antiparallelní. Takové dvě tětivy nazýváme střídavými.

Obdržíme-li tedy v grafickém vyjádření sice dva body průsečné H_1, H_2 s dostatečnou přesností, nikoliv ale třetí H_3, tu vedeme vrcholem S přímku p, která jest k přímce H_1H_2, vzhledem k x, antiparallelní; pak lze H_3 s dostatečnou přesností vyjádřiti jakožto průsečík přímky r s kružnicí c aneb s parabolou k.

Obdržíme-li ale jen jediný z průsečíků $c.k$, dejme tomu H_1, přesně, mysleme si body H_1, S položen svazek kružnic (c). Střídavé tětivy ku H_1S příslušné, společné parabole k a kružnicím svazku (c), tvoří svazek přímek rovnoběžných, který jest promětný ku řadě bodové tvořené středy příslušných kružnic ve svazku. Ze vztahu toho můžeme pak ku H_1S příslušnou tětivu střídavou p pro c a k odvoditi.

Jednoduše obdržíme p, uvážíme-li, že každá kružnice c, která prochází bodem S, seče parabolu k ve třech bodech H_1, H_2, H_3, jejichž normály ku k se sečou v jediném bodě R. Neboť sestrojíme-li R jako průsečík normál ve dvou z bodů těch, na př. H_1, H_2, a řešíme-li pro tento bod R problem normál, shledáme, že řešící kružnicí jest právě zvolená kružnice c, jelikož jest body H_1, H_2, S již určena. Proto jest třetí normála RH_3, a proto leží společný průsečík normál paraboly v bodech H, v kterých libovolná kružnice v (c) obsažená parabolu protíná na normále H_1R v bodě H_1 a řada průsečíků takových jest též promětná k prve řečenému svazku přímek rovnoběžných.

Abychom žádanou tětivu p obdrželi, protneme svazek tento osou x. Obdržíme na x řadu projektivnou s řadou bodů R a bod ϱ, v němž p seče osu x, jest bod příslušný danému bodu R. Abychom ϱ obdrželi, protnuli jsme H_1R normálou ku parabole k v bodě I, vhodně na ní zvoleném v bodě A_1 a x v bodě A rovnoběžkou bodem I ku SH_1' vedenou, při čemž H_1' značí bod ku H_1 vzhledem k x souměrně položený. Značí-li dále U_1 nekonečně vzdálený bod na H_1R a U na x, kdežto S_1 značí průsek přímky H_1R s x, pak vyplývá bod ϱ ze vztahu

$$(ASU\varrho) = (A_1S_1U_1R).$$

Přeneseme tedy S_1A aequipollentně od bodu A_1 a koncový bod přenesené úsečky spojíme s S přímkou $\varDelta$; protneme dále $\varDelta$ rovnoběžkou ku x bodem R vedenou, načež průsečíkem vedeme rovnoběžku k RH_1, která protne x již v bodě ϱ přímky p.

Body H_2, H_3 lze pak s dostatečnou přesností jakožto průsečíky přímky p s c aneb s k vyjádřiti i tenkráte, kdyby přímka p tyto křivky protínala v malých úhlech.

7. Úvahy provedené lze rozšířiti pohodlně i na rovnice 4. stupně tvaru

$$z^4 + pz^2 + qz + s = 0. \qquad (12)$$

Za tím účelem protněme parabolu k, jejíž rovnice jest

$$y^2 = -4(x-2), \qquad (8)$$

kružnicí f soustřednou s c, mající tudíž rovnici

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{q}{4}\right)^2 = r^2 \qquad (13)$$

v bodech L_1, L_2, L_3, L_4.

Abychom obdrželi pořadnice bodů těch, klaďme za x hodnotu $-\frac{y^2}{4}+2$ z (8) do (13). Obdržíme tím po krátké redukci

$$\frac{y^4}{16} + \frac{py^2}{4} - \frac{qy}{2} - r^2 + \left(\frac{q}{4}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}-2\right)^2 = 0,$$

z níž se zřetelem na (10) plyne

$$\left(\frac{y}{2}\right)^4 + p\left(\frac{y}{2}\right)^2 - q\left(\frac{y}{2}\right) - r^2 + \varrho^2 = 0. \qquad (14)$$

Volíme-li poloměr r kružnice f tak, že jest

$$r^2 = \left(\frac{q}{4}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}-2\right)^2 - s, \qquad (15)$$

a tedy

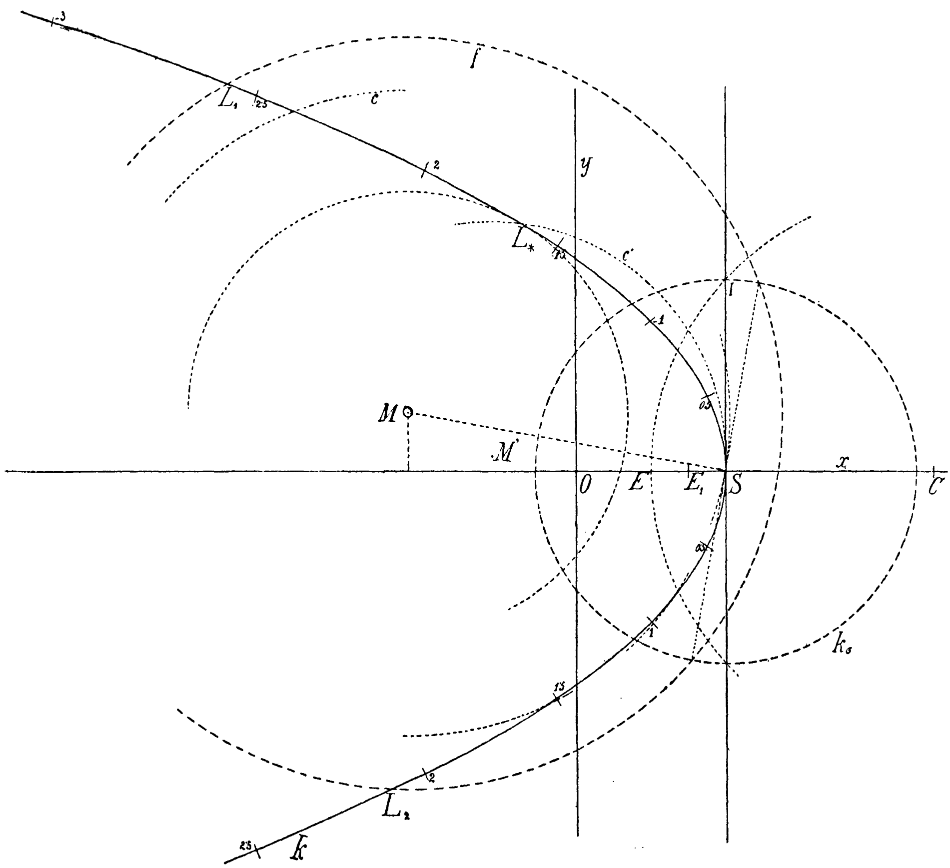
$$r^2 = \varrho^2 - s, \qquad (15')$$

obdržíme konečně pro pořadnice bodů průsečných rovnici

$$\left(\frac{y}{2}\right)^4 + p\left(\frac{y}{2}\right)^2 - q\left(\frac{y}{2}\right) + s = 0. \qquad (16)$$

Srovnáme-li tuto rovnici s (12), seznáme, že panuje mezi souřadnicemi bodů L a kořeny rovnice (12) vztah

$$y_i = -2z_i \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{17}$$



Obr. 4.

Vedeme-li bodem E rovnoběžky k normálám paraboly k v bodech L, protnou tyto y v bodech K_i $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ tak že

$$z_i = \frac{OK_i}{OE}.$$

Můžeme ale též na rovnoběžce m k y zříditi měřítko, jehož kladný smysl jest opačný onomu na y, jehož počáteční bod leží na x a jehož jednotka rovná se $2 . \overline{OE}$, pak udávají délky pořadnic pro body L_i, měřené na m kořeny rovnice (12). Můžeme ale též parabolu k samu kotovati tím, že k vyjádření jejich bodům připisujeme čísla pro délky jejich pořadnic odměřených na m (obr. 4.).

8. Shrneme-li obdržený výsledek, máme následující konstrukci pro řešení rovnic 4. stupně (12) pomocí paraboly k. (Obr. 4.)

Zvolíme za jednotku rovnou vzdálenosti ohniska E paraboly od jejího vrcholu a osu paraboly volíme za osu x, kolmici k ní vedenou středem křivosti O paraboly ve vrcholi S za osu y. Od bodu E_1 půlícího úsečku ES naneseme na x úsečku $E_1C = \frac{s}{2}$ a opíšeme kolem bodu C jakožto středu kružnici procházející bodem E; je-li I jeden její průsečík s tečnou vrcholovou paraboly, pak jest $\overline{SI}^2 = s . \overline{OE} = s$. Na to popišme poloměrem SI kružnici k_σ mající střed S.

Dále musíme rozeznávat, zdali jest s kladné nebo záporné. Pak jest f kružnice kolem bodu $M\left(\frac{p}{2} \,\middle|\, \frac{q}{4}\right)$ jakožto středu opsaná, která jest v prvém případě ku k_σ orthogonální, kdežto v druhém případě protíná k_σ diametrálně.

Kružnicí f jest žádané řešení již dáno.

9. Splynou-li dva z průsečíků L_i v L_*, pak má rovnice (12) dvojnásobný kořen; v případě tom dotýká se kružnice f paraboly k v bodě L_*, a ML_* jest normálou její jdoucí bodem $M\left(\frac{p}{2} \,\middle|\, \frac{q}{4}\right)$. Jelikož ale normály daným bodem $(x \mid y)$ vyjadřují kořeny rovnice

$$z^3 + xz + y = 0,$$

následuje z toho, že náš kořen dvojný rovnice (12) zároveň jest kořenem rovnice

$$z^3 + \frac{p}{2} z + \frac{q}{4} = 0, \tag{18}$$

jejíž ostatní kořeny by byly dány průsečíky kružnice c' středu $M'\left(\frac{p}{4}, \frac{q}{16}\right)$ a procházející body L_*, S.

Rovnice (18) dává podmínku pro dvojný kořen rovnice (12). Vyloučíme-li z (18) a (13) veličinu z, obdržíme podmínečnou rovnici, jíž musí p, q, s vyhověti, aby rovnice (12) měla kořen dvojný.

Podotknuto budiž, což na jiném místě odvozeno bylo, že z konstrukce naší lze onu podmínečnou rovnici mezi p, q, s rovněž obdržeti, čímž se zároveň zjedná její geometrický význam.

O jisté birationální kubické transformaci a jejím upotřebení v theorii křivek.

Dr. **K. Zahradník.**

Dané buďtež dvě přímky, jež zvolíme za osy souřadnic.

Rovnoběžky bodem M $(x \mid y)$ ku osám vedené protínají osy v bodech A, B. Spojnice těch bodů označme písmenem Π.

Je-li $M_1 (x_1 \mid y_1)$ pata kolmice z počátku souřadnic na přímku Π spuštěné, obdržíme *)

$$x_1 = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, \qquad y_1 = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}. \tag{1}$$

Prvou rovnici můžeme psáti:

$$x_1 (x^2 + y^2) = xy^2;$$

---

*) Kdyby byl Θ úhel přímek, jež jsme vzali za osy souřadnic, je, píšeme-li $\cos\Theta = c$

$$x_1 = \frac{(y - cx)\,xy}{x^2 + y^2 - 2cxy},$$
$$y_1 = \frac{(x - cy)\,xy}{x^2 + y^2 - 2cxy},$$

z čehož opět plyne

$$x = \frac{x_1^2 + y_1^2 + 2cx_1y_1}{x_1 + cy_1},$$
$$y = \frac{x_1^2 + y_1^2 + 2cx_1y_1}{x_1 + cx_1}.$$

V následujícím předpokládati budeme $\Theta = 90^{\circ}$, nebude-li opak toho zvlášť vytknut.