Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Sucharda

O některých plochách polárných plochy posouvání kruho-kruhové. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 13 (1884), No. 3, 161--178

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120931

O některých plochách polárných plochy posouvání kruho-kruhové.

Napsal **Ant. Sucharda.**

(Dokončení.)

6. Obraťme se ku Hessianě pro případ, že $R = r$.

Zavedeme-li k tomu cíli do determinantu (10) hodnoty z rovnice (9), položivše všade $R = r$, obdržíme vyčíslením jeho po náležité redukci, píšeme-li zase x, y, z místo m, n, p, rovnici Hessiany jak následuje:

$$x^2\,[x^6 - y^6 - z^6 + x^4 y^2 + y^4 z^2 - x^2 y^4 - x^2 z^4 + y^2 z^4 - 6 x^2 y^2 z^2 + 2 r^2 x^4 - 6 r^2 y^4 - 6 r^2 z^4 + 4 r^2 x^2 y^2 + 4 r^2 x^2 z^2 + 12 r^2 y^2 z^2] = 0. \qquad (14)$$

Poznáváme z toho: *Hessiana plochy kruho-kruhové stejných poloměrů skládá se z dvojné roviny $\overline{YZ}$ (je to rovina dvojných přímek té plochy) a ze zvláštní plochy stupně šestého.*

Abychom poznali pronik s rovinou $\overline{YZ}$, položme v rovnici (14) $x = o$, načež obdržíme, náležitě rozložíce:

$$x^2\,(y^2 - z^2)^2\,(y^2 + z^2 + 6 r^2) = 0,$$

což dí: *Hessiana proniká onu rovinu dvojnou v dvojných přímkách, dvojnou hyperbolu zastupujících, a v imaginárné křivce kruhové.*

Položíce $y = o$, obdržíme z rovnice (14) po náležitém upravení:

$$x^2\,(x^2 - z^2)\,(x^4 + 2 x^2 z^2 + z^4 + 2 r^2 x^2 + 6 r^2 z^2) = 0,$$

z čehož patrno, že *Hessiana proniká $\overline{XZ}$ v ose $\overline{Z}$, jakožto přímce dvojné, dále ve dvou přímkách, úhel os $\overline{XZ}$ rozpolujících, obsahujících počátek soustavy, mimo to v jisté křivce stupně čtvrtého.*

Křivka ta skládá se z realného bodu dvojného (střed plochy kruho-kruhové, počátek soustavy) a z imaginárné větve stupně druhého.

Pro $p = o$, obdržíme z rovnice (14) po náležitém rozkladu:

$$x^2\,(x^2 - y^2)\,(x^4 + 2 x^2 y^2 + y^4 + 2 r^2 x^2 + 6 r^2 y^2) = 0,$$

což praví, že *Hessiana proniká $\overline{XY}$ ve dvojné přímce $\overline{Y}$, pak ve dvou přímkách, úhly os $\overline{XY}$ rozpolujících a počátek soustavy obsahujících, mimo to pak v křivce stupně čtvrtého, jež skládá se z realného bodu dvojného (totožného se středem plochy uvažované) a z imaginárné větve druhého stupně.*

Vložíce do ozávorkované části rovnice (14) předně $y = \pm r$, podruhé $z = \pm r$, shledáváme:

Hessiana v rovinách, rovnicemi těmi vyznačených, má v každé po křivce kruhové poloměru r. Jsou to křivky bodů parabolických naší plochy posouvání.

Vložíme-li $y = -z$ do rovnice (14), obdržíme, jestliže zároveň náležitě rozložíme,

$$r^2 x^4 (2 y^2 - x^2 - 2 r^2)(x^2 + 4 y^2) = 0,$$

což praví: *Hessiana proniká rovinu ku $\overline{YZ}$ kolmou, jež dvojnou přímku roviny té obsahuje, ve křivce stupně osmého, jež skládá se kromě z přímky dvojné, již zmíněné, ještě z hyperboly stejnoramenné, jež v kuspidalných bodech plochy posouvání má realné vrcholy; a z realného bodu dvojného, obsaženého ve středu plochy posouvání.*

Obdobné platí arci pro rovinu ku $\overline{YZ}$ kolmou, jež obsahuje druhou dvojnou přímku.

Položme dále $z = x - y$ do rovnice (14), načež obdržíme po krátké redukci a náležitém rozložení:

$$x^4 y (x + y)(x^2 + 2 x y + 2 y^2 + 2 r^2) = 0,$$

z čehož poznáváme: *Hessiana má v rovině, obsahující její střed a k rovinám $\overline{XY}$, $\overline{XZ}$, $\overline{YZ}$ stejně nakloněné, kromě přímky dvojné a dvou přímek úhly os $\overline{XY}$ a $\overline{XZ}$ rozpolujících, imaginárnou ellipsu.* Jest patrno, že zcela obdobné platí i pro ostatní tři roviny, jež od $\overline{XY}$, $\overline{XZ}$ a $\overline{YZ}$ stejně jsou odchýleny.

Položíme-li $x = y$, obdržíme po krátké redukci (hledíce pouze ku ploše šestého stupně):

$$z^2 (z^4 + 4 y^4 - 16 r^2 y^2 + 6 r^2 z^2) = 0,$$

což praví, uvážíme-li úplnou obdobu s rovinou $x = -y$:

Hessiana má v rovinách, jež úhly rovin $\overline{XZ}$ a $\overline{YZ}$ rozpolují, po přímce úhly os $\overline{XY}$ rozpolující a po centrické realné křivce stupně čtvrtého. Křivka zmíněná jest *realnou*, kdežto všechny ostatní křivky (stupně šestého), obsažené v rovinách osnovu, jehož osou jest $\overline{Z}$, záleží z realného bodu (čtyrnásobn.), obsaženého v počátku soustavy, a z větve imaginárné. Bližším vyšetřením pozná se, že se podobá lemniskatě.*)

Křivek těch jest tedy v Hessianě dvé, majících $\overline{YZ}$ za rovinu souměrnosti. Další křivka, těmto obdobná, jest v rovině $x - z = 0$. Rovnice její zní:

$$y^2 (y^4 + 4 z^4 - 16 r^2 z^2 + 6 r^2 y^2) = 0, \quad x - z = 0.$$

Patrno, že vznikla by prostou záměnou y za z a naopak. I jsou v ploše uvažované celkem čtyři křivky tvaru lemniskatového.

Přihlédněme ještě *ku křivce smíru* této Hessiany. Rovnici její obdržíme spůsobem, v odstavci 5. uvedeným, z rovnice (14),

$$x^2 [x^6 - y^6 - z^6 + x^4 y^2 + x^4 z^2 - x^2 y^4 - x^2 z^4 + y^4 z^2 + y^2 z^4 - 6 x^2 y^2 z^2] = 0.$$

Rovnice tato jak patrno na poloměru r není závislá, z čehož soudíme: *Hessiany všech homothetických ploch kruho-kruhových o stejných poloměrech křivek obou soustav mají jedinou křivku smíru, složenou z přímky a křivky stupně šestého.*

Tato křivka smíru rovinu $\overline{XY}$ proniká ve *dvou bodech realných*, určených přímkami $y^2 - x^2 = 0$; taktéž rovinu $\overline{XZ}$ ve dvou bodech určených přímkami $z^2 - x^2 = 0$. V rovině $\overline{YZ}$ má též *dva dvojné* realné body smíru, určené přímkami $(z^2 - y^2)^2 = 0$.

Z výsledků uvedených zřejmo, že hledané realné body smíru výhradně omezují se na body smíru známých nám přímek, obsažených v souřadných rovinách.

7. Přihlédněme nyní ku *Steinerianě***) plochy kruho-kruhové poloměrů různých.

Plocha tato jest geometrickým místem středů ploch kuželových polárných, jichž poly jsou body Hessiany. Poněvadž stupeň plochy té jest značné výšky***), nevidí se nám rovnici její odvozovati.

---

*) Viz mé pojednání ve výroční zprávě c. k. vyššího realného gymnasia Táborského. 1882.

**) Cremona-Curtze, pag. 137.

***) Podle Cremony-Curtze, pag. 137. vychází obecně stupeň 32.

Přihlédněme opět jen ku její křivkám v rovinách $\overline{XY}$, $\overline{XZ}$, $\overline{YZ}$; pak v rovinách křivek bodů parabolických.

Abychom poznali křivku, v níž proniká rovinu $\overline{YZ}$, vyšetřme geometrické místo středů ploch kuželových, jichž polů místem geometrickým jest dvojná hyperbola, trojnásobná to křivka Hessiany a potom jistá křivka kruhová (viz rovn. 11).

Vložíme-li, hledíce především ku hyperbole, do rovnice (9)

$$n^2 - p^2 = R^2 - r^2, \quad m = 0, \tag{15}$$

obdržíme po krátké redukci rovnici plochy polárné:

$$(R^2 - n^2)\,x^2 - n^2 y^2 - p^2 z^2 + 2\,n\,p\,y\,z + 2\,n\,(R^2 - r^2)\,y - 2p.$$
$$(R^2 - r^2)\,z - (R^2 - r^2)^2 = 0. \tag{16}$$

Plocha tato proniká rovinu $\overline{YZ}$ v křivce, jejíž rovnici obdržíme, položíce $x = 0$, ve tvaru, jejž lze psáti takto:

$$[p\,z - n\,y + (R^2 - r^2)]^2 = 0, \tag{17}$$

při čemž platí současně rovnice (15).

Z rovnice (17) poznáváme, že druhá plocha polárná libovolného bodu dvojné hyperboly jakožto polu, pronikajíc $\overline{YZ}$ v přímce dvojné, skládá se *ze dvou rovin* ku $\overline{YZ}$ souměrných.

Patrno na pohled, že přímka dvojná jest tečnou hyperboly dvojné v polu (n, p). Každému bodu této hyperboly jakožto bodu Hessiany přísluší tudíž v Steinerianě jeho tečna.

Všechny tyto tečny vyplňují, jak známo, část roviny, obsaženou v mezích hyperboly dvojné.

Steineriana plochy kruho-kruhové má v rovině $\overline{YZ}$ nekonečné množství přímek, jež, dotýkajíce se hyperboly Hessiany, vyplňují část roviny v mezích této křivky.

V bodech kuspidálných obě roviny se sjednocují.*)

Prohlédajíce ku křivce kruhové Hessiany, jež obsažena v $\overline{YZ}$, shledáme, že druhá plocha polárná jest plocha válcová, normálná k rovině $\overline{YZ}$; dále pak nalezneme:

$$z^2 \Big[(R^4 - r^4)(R^2 - r^2)(r^4 y^2 - R^2 z^2)^2 (y^2 + z^2) - \big\{R^2 z^4 (2\,R^2 + r^2) - z^2 y^2 [(R^2 + r^2)^2 + 2r^2 R^2] + r^2 y^4 (2r^2 + R^2)\big\}^2\Big] = 0 \tag{18}$$

---

*) Srovnej výsledek tento s úvahou: Cremona Curtze, pag. 141. odst. 167.

jakožto rovnici křivky Steineriany, jež přísluší zmíněné křivce kruhové Hessiany.

Jest to dvojná přímka $z^2 = 0$ t. j. osa $\overline{Y}$ a centrická křivka stupně osmého. Rovnice této poslední se nezmění, zavedeme-li místo R, r, x, y, pořadem r, R, y, x a naopak, z čehož vychází, že křivka ta, souměrná ku $\overline{Y}$ a $\overline{Z}$, má také přímky, úhly jejich rozpolující, za osy souměrnosti.

Jelikož plocha rovnicí (18) vyznačená jest plocha válcová, ku $\overline{YZ}$ normálná, májící tedy nekonečné množství středů obsažených v přímce, možno říci:

Steinerianě náleží vzhledem ku křivce kruhové rovnicí (11) *vyznačené plocha válcová, ku* $\overline{YZ}$ *normálná, určená rovnicí* (18).

V rovině $\overline{XY}$ má Hessiana hyperbolu stejnoramennou, určenou rovnicí (13).

Zavedeme-li hodnoty z této do (10) zároveň $p = 0$ položíce, poznáme, že druhé plochy polárné jsou plochy válcové k $\overline{XY}$ normálné. Obdobnou jako prve cestou obdržíme žádanou křivku Steineriany.

Užijeme-li Sylvestrovy methody dialytické, bude výsledkem vyloučení determinant stupně dvanáctého, který, s nullou srovnán, znamená křivku Steineriany, v $\overline{XY}$ obsaženou, zároveň pak plochu válcovou, ku $\overline{XY}$ normálnou, jež z příčin svrchu již uvedených náleží Steinerianě.

Obdobně obdržíme výsledky pro $\overline{XZ}$.

Další křivka Hessiany v $\overline{XY}$ jest stupně šestého. Příslušnou křivku Steineriany najdeme zase spůsobem svrchu již naznačeným.

Abychom vyšetřili křivky v rovinách křivek bodů parabolických, dosaďme do rovnice (9)

$$m^2 + n^2 = R^2, \ p = r,$$

což znamená jednu z křivek kruhových bodů parabolických.

Obdržíme takto rovnici druhé plochy polárné.

Dosadíce součinitele její do známých výrazů pro střed plochy, obdržíme po náležité redukci:

$$x = \frac{-R^2 + n^2}{2m}, \ y = \frac{3R^2 - n^2}{2n}, \ z = r.$$

Vyloučíme-li z rovnic tu uvedených m, n a p, shledáme pak

$$y^2 (R^2 - x^2) = (R^2 + 2x^2)^2, \quad z = r,$$

jakožto rovnici křivky, která je geometrickým místem středů ploch kuželových, jichž poly jsou body kruhové křivky bodů parabolických.*)

Křivce kruhové v rovině $z = -r$ patrně přísluší křivka shodná s předešlou.

Křivkám kruhovým druhé soustavy bodů parabolických přísluší každé obdobná křivka stupně čtvrtého, jejíž rovnici obdržíme z předešlé, dosadíce za $x \ldots y$ a naopak; za $r \ldots R$; za $R \ldots r$.

Z toho jde:

Steineriana uvažované plochy kruho-kruhové má v rovinách křivek kruhových bodů parabolických po zvláštní křivce centrické stupně čtvrtého o dvou realných bodech smíru.

8. Vyšetřme poměry ty pro $R = r$.

Dosadíce do rovnice (17) $R = r$, obdržíme

$$(pz - ny)^2 = 0,$$

z kteréž rovnice poznáváme, jelikož zároveň tu rovnice (15) mají tvar:

$$n^2 - p^2 = 0, \quad m = 0,$$

že druhé plochy polárné, příslušné polům, obsaženým ve dvojných přímkách roviny $\overline{YZ}$, jsou dvojice rovin, v těchto přímkách se pronikající. Rovina $\overline{YZ}$ jest každé dvojici rovinou souměrnosti.

Druhé plochy polárné tvoří dva shodné osnovy (svazky) rovin; osami jejich jsou dvojné přímky plochy kruho-kruhové.

Zavedeme-li do rovnice (16) $R = r$ a spolu $n = p = r$, obdržíme

$$y^2 + z^2 - 2yz = 0,$$

kteráž rovnice dí, že dvojice rovin, příslušná bodům kuspidálným, tvoří rovinu jedinou, normálnou ku $\overline{YZ}$.

(Výsledek to souhlasný s oním, jenž týká se kuspidálných bodů plochy kruho-kruhové různých poloměrů).

*) Bližší její vyšetření viz v mém pojednání ve výroční zprávě c. k. vyš. r. g. Táborského, 1882.

Z úvahy odst. 6. známo, že rovina $\overline{YZ}$ v celé své rozsáhlosti náleží Hessianě této plochy kruho-kruhové jakožto dvojnásobná. Z této okolnosti již souditi lze, že tato rovina jest též dvojnásobnou rovinou Steineriany.

V rovině $\overline{XY}$ jest, jak z rovnice (14) známo, kromě dvojné přímky $\overline{Y}$ ještě dvé přímek Hessiany:

$$x^2 - y^2 = 0.$$

Vyšetříce geometrické místo středů druhých ploch polárných, shledáme:

$$x \pm 2y = 0$$

jakožto rovnici žádanou. *Steineriana plochy kruho-kruhové stejných poloměrů má v rovině* $\overline{XY}$ kromě osy $\overline{Y}$ *ještě dvě přímky k ose* $\overline{X}$ *souměrné.*

Za y položíce z, obdržíme

$$x \pm 2z = 0,$$

jakožto rovnici dvou přímek Steineriany v $\overline{XZ}$ *obsažených.*

Vyšetřiti, která křivka Steineriany přísluší křivce stupně čtvrtého Hessiany, obsažené v rovinách, úhly rovin $\overline{XZ}$ a $\overline{YZ}$ rozpolujících, pro výsledků obšírnost pomíjíme.

9. Přihlédněme ku geometrickým místům polů, jimž příslušné druhé plochy polárné jsou *necentrické.*

Prohlédajíce ku známým výrazům pro střed plochy, shledáváme tu nezbytnou podmínku, že jmenovatel těchto zlomků rovná se nulle, tedy:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0. \qquad (19)$$

Dosadíme-li do tohoto determinantu známé hodnoty z rovnice (9), béřeme pak m, n, p za souřadnice plynulé, jest tvarem (19) dána rovnice žádaného místa geometrického. Plocha jí vyjádřená jest stupně šestého. Dlužno však při tom dbáti té okolnosti, že podmínce (19) vyhověno bude i pak, když čitatele zlomků uvedených budou rovny nulle. T. j.: Mezi uvedenými poly tohoto geometrického místa obsaženy jsou také ty, jimž příslušné druhé plochy polárné mají pro souřadnice hodnoty neurčité; tedy *plochy válcové.* Ve všech případech ostatních jsou to hyperbolické a elliptické paraboloidy.*)

Vyhýbajíce se zase vyšetření celé té plochy, spokojme se s nalezením křivek jejích, obsažených v rovinách $\overline{XY}$, $\overline{XZ}$, $\overline{YZ}$.

Vložíme-li do rovnice (9) $p = o$, vychází:

$$a_{23} = 0, \quad a_{31} = 0, \quad a_3 = 0.$$

Dosadíce toto do rovnice (19) obdržíme pak, rozvedeme-li spolu determinant tu obsažený, toto:

$$\int^{p=o} a_{11}\, a_{22}\, a_{33} - a_{33}\, a^2_{12} = 0.$$

Podmínce té lze vyhověti:

1. je-li $\int^{p=o} a_{33} = 0,$

2. je-li $\int^{p=o} a_{11}\, a_{22} = a^2_{12}.$

Případ 1. znamená patrně stejnoramennou hyperbolu

$$y^2 - x^2 = R^2 - r^2.$$

Čítatele zlomků, vyjádřujících souřadnice středu plochy, rovny jsou nulle. Polárné plochy mají tu pro souřadnice středů hodnoty neurčité, i jsou to *plochy válcové.* Blíže o nich zmínili jsme se jinde.

Případ 2., zavedeme-li příslušné hodnoty, nabude tohoto tvaru:

$$3(x^2+y^2)^2 - 2x^2[2R^2-r^2] - 2y^2[2R^2+r^2] + R^4 - r^4 = 0. \quad (20)$$

I jest to křivka centrická stupně čtvrtého; osy $\overline{X}$ a $\overline{Y}$ jsou její osami souměrnosti.

Zavedeme-li pro případ 2. do rovnic pro souřadnice středu plochy za jednotlivé prvky determinantů tam se vyskytujících

$$a_{23} = 0, \quad a_{31} = 0, \quad a_3 = 0,$$

obdržíme $\quad x = \infty, \quad y = \infty, \quad z = \frac{0}{0},$

z čehož jest zřejmo:

Křivka rovnicí (20) vyjádřená jest geometrickým místem polů elliptických a hyperbolických paraboloidů v rovině $\overline{XY}$.

Pro plochu posouvání kruho-kruhovou poloměrů stejných vychází z případu 1.:

---

*) Pro všechny ostatní body prostoru jsou to ellipsoidy a hyperboloidy jedno- a dvojdílné.

$$y^2 - x^2 = 0,$$

známá v této vlastnosti již od jinud křivka polů, jimž přisluší druhé plochy polárné válcové. Z případu 2. vychází tu pak po krátké redukci:

$$3(x^2 + y^2)^2 - 2r^2(x^2 + 3y^2) = 0, \tag{21}$$

jakožto místo polů v rovině $\overline{XY}$, jimž přisluší jakožto druhé plochy polárné elliptické a hyperbolické paraboloidy.

Křivka tato jest inversní křivkou jisté ellipsy, pro střed svůj (počátek soustavy) jako střed inverse, jestliže křivkou kruhovou inverse jest křivka kruhová poloměru r. (Geometrické místo středů křivek kruhových plochy posouvání, ku $\overline{XY}$ normálných).*)

10. Vyšetřujme podobně jako v odstavci 9., jaká křivka jest v rovině $\overline{YZ}$. Vložme k tomu cíli do rovnice (9) $m = o$.

Vychází tu $a_{31} = 0$, $a_{12} = 0$, $a_1 = 0$,

takže determinant (19) nabývá tvaru tohoto:

$$a_{11}\, a_{22}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}{}^2 = 0.$$

Podmínce té se vyhoví, jestliže

$$1. \quad a_{11} = 0,$$

nebo

$$2. \quad a_{22}\, a_{33} - a_{23}{}^2 = 0.$$

Vyšetřujíce případ 1. shledáváme, že $a_{11} = 0$ znamená

$$y^2 + z^2 = R^2 + r^2,$$

dále pak, že x, y, z mají hodnoty neurčité.

I jsou tehdy druhé plochy polárné, jichž poly jsou v křivce kruhové

$$y^2 + z^2 = R^2 + r^2,$$

veskrze plochy válcové, k $\overline{YZ}$ normálné.

V případu 2. shledáváme po náležitém dosazení a přiměřeném upravení, že křivka skládá se ze dvou hyperbol stejnoramenných

$$y^2 - z^2 = R^2 - r^2, \quad 3(y^2 - z^2) = R^2 - r^2.$$

Druhé plochy polárné, které první z nich přisluší, jsou dvojice rovin (srovnej 17.) *v tečnách dvojné hyperboly se pronikající.*

*) Bližší vyšetření viz v pojednání mém ve výroční zprávě c. k. vyššího r. gymn. Táborského, 1882.

Druhé plochy polárné, příslušné druhé hyperbole, mají pro střed souřadnice následující:

$$x = \frac{0}{0}, \; y = \infty, \; z = \infty. \qquad (22)$$

I jest patrno: *Druhé plochy polárné polů hyperboly* $3(y^2 - z^2) = R^2 - r^2$, *v rovině* $\overline{YZ}$ *obsažené, jsou výhradně plochy paraboloidů.*

Zavedouce do výsledků roviny $\overline{YZ}$ se týkajících $R = r$, shledáváme 1. křivku kruhovou

$$y^2 + z^2 = 2r^2$$

jakož geometrické místo polů, jimž přísluší druhé plochy polárné válcové, 2. křivku stupně druhého, známé dvě dvojné přímky plochy kruho-kruhové $y^2 - z^2 = 0$ (vzniklou z $y^2 - z^2 = R^2 - - r^2$) a křivku $y^2 - z^2 = 0$ (vzniklou z $3(y^2 - z^2) = R^2 - r^2$) jakožto geometrické místo polů, jimž přísluší druhé plochy polárné, složené ze dvou rovin (srov. odst. 8.); kterýž výsledek potvrzuje též okolost ta, že pro stejné poloměry $R = r$ vycházejí z rovnice (22) pro x, y, z hodnoty neurčité.

Tyto dvě dvojné přímky patrně dlužno tu považovati za dvojnásobnou křivku, tedy celkem za křivku stupně čtvrtého.

Uvážíce, že druhé plochy polárné křivky té (anať je dvojnou křivkou plochy kruho-kruhové) mají býti kuželové se středem v polu, můžeme konstatovati, že všem těm požadavkům plochy ty vyhovují. Jsouť dvě roviny v přímkách dvojných plochy kruho-kruhové se pronikající plochou kuželovou se středem ve vlastním polu, zároveň plochou paraboloidu hyperbolického (jak bylo v případu různých poloměrů konstatováno) konečně i plochou s nekonečně mnoha středy v přímce, jak ukazují svrchu zmíněné neurčité hodnoty.

Abychom poznali křivku příslušnou rovině $\overline{XZ}$, vložme do (9) $n = 0$ a pokračujme jako předešle.

Obdržíme dvě křivky:

$$x^2 - z^2 = R^2 - r^2 \qquad (23)$$

a

$$3(x^2 + z^2)^2 - 2r^2(x^2 + 3z^2) - R^4 + r^4 = 0 \qquad (24)$$

ve kterých plocha, rovnicí (19) vyjádřená, rovinu $\overline{XZ}$ proniká.

V případě rovnice (23) shledáváme, že x, y, z mají hodnoty neurčité, což dí, že druhé plochy polárné jsou tu *plochy válcové*;

že tyto jsou normálny k $\overline{XZ}$, plyne z analogie s případem, roviny $\overline{XY}$ se týkajícím. Podobně pro křivku (24) lze bez dalšího vyšetřování konstatovati, že příslušné její bodům jakožto polům druhé plochy polárné jsou *elliptické a hyperbolické paraboloidy.*

11. Vyšetřujme dále geometrická místa polů, jimž příslušné druhé plochy polárné mají v rovinách křivek kruhových, pak v rovinách, s rovinou hyperboly dvojné stejnosměrných, *křivky kruhové.*

Dle souvislosti objektivné, v níž plocha kruho-kruhová s rovinami souřadnými jest, budou kruhové ty křivky stejnosměrny s rovinami $\overline{XY}$, $\overline{XZ}$, $\overline{YZ}$.

Zavedeme-li do rovnice (9) $z = 0$, obdržíme rovnici proniku roviny $\overline{XY}$ s druhou plochou polárnou polu (m, n, p) pro střed plochy posouvání jakožto počátek soustavy. Z rovnice té, jíž tuto ani nevypíšeme, vychází, provedeme-li náležitou úvahu, pro niž tu místa nezbývá:

Geometrickým místem polů, jimž příslušné druhé plochy polárné mají v rovinách osnovy $\overline{XY}$ křivky kruhové, jsou

stejnoramenná hyperbola $$\left.\begin{aligned} z^2 - y^2 &= r^2 \\ x &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

a křivka kruhová $$\left.\begin{aligned} x^2 + z^2 &= r^2 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{26}$$

Z toho, že v předešlých dvou rovnicích nevyskytuje se poloměr R, zjevno jest, že geometrická tato místa zůstávají pro všechny plochy kruho-kruhové soustředné a homothetické, jichž křivky kruhové k rovině $\overline{XY}$ normálné mají poloměr $= r$, ať poloměry křivek kruhových soustavy druhé jsou jakékoli.

Hledejme geometrická místa polů druhých ploch polárných, jichž křivky kruhové jsou v rovinách osnovy $\overline{XZ}$.

Výsledky žádané odvoditi lze z výsledku (25) a (26), vložíme-li tam za y, z, a naopak, za r pak R.

Geometrickým místem polů, jichž druhé plochy polárné mají křivky kruhové v rovinách osnovy $\overline{XZ}$, jest

stejnoramenná hyperbola $$\left.\begin{aligned} y^2 - z^2 &= R^2 \\ x &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

a křivka kruhová $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=R^2 \\ z=o \end{array}\right\}.$ (28)

Shledáváme opět, že geometrická tato místa zůstanou stálými pro všechny plochy kruho-kruhové soustředné a homothetické, ať křivky kruhové v rovinách osnovy $\overline{XZ}$ mají poloměr jakýkoli, jen když se poloměr druhých nezmění.

Vyšetřme ještě geometrická místa polů druhých ploch polárných, jichž křivky kruhové jsou v rovinách osnovy $\overline{YZ}$.

Poznáme cestou obdobnou:

Geometrickým místem polů, jichž druhé plochy polárné mají v rovinách osnovy $\overline{YZ}$ křivky kruhové, jsou dvě přímky v rovině $\overline{XY}$, jichž rovnice jest

$$2y^2=R^2-r^2,\ z=0. \qquad (29)$$

Pro případ *stejných* poloměrů obdržíme tu přímku jedinou $y^2=0$. Jest to při známé souvislosti objektivné osa $\overline{X}$, obecně tedy přímka, střed plochy posouvání obsahující a normálná k rovině křivky dvojné.

Vyšetřme nyní, jakého druhu jsou uvažované plochy polárné.

Máme předně poly v hyperbole, vyjadřené rovnicí (25).

Rovina $\overline{YZ}$, ve které křivka tato obsažena, patrně jest rovinou souměrnosti všech tomuto geometrickému místu příslušných druhých ploch polárných. Vyšetřme rovnici křivky, ve které libovolná z těchto ploch rovinu $\overline{YZ}$ proniká. Třeba do rovnice (9) vložiti

$$x=o,\ p^2-n^2=r^2,\ m=0.$$

Rovnici samu zde ani neuvedeme, jelikož toho nezbytně potřebí není, ale vložíme do známé podmínky pro druh křivky stupně druhého, kteráž pak zní:

$$R^2+2r^2>0,$$

z čehož patrno, že křivka uvažovaná jest tu vždy hyperbola.

Jelikož druhé plochy polárné, jichž se týká, pronikají se rovinami osnovy $\overline{XY}$ v křivkách kruhových, jsou to *hyperboloidy*.

Uveďme rovnici hyperboly, v rovině $\overline{YZ}$ obsažené, na střed, a určeme pronik její s přímkou, její střed obsahující, a s osou $\overline{Y}$ stejnosměrnou.

Jelikož hyperboloid příslušný má v rovině $\overline{XY}$ křivky kruhové, zřejmo jest, že, bude-li

pronik ten $\begin{Bmatrix} \text{realný} \\ \text{imaginárný} \end{Bmatrix}$ bude hyperboloid $\begin{Bmatrix} \text{jednodílný} \\ \text{dvojdílný} \end{Bmatrix}$.

Jestliže

$$R^2 - 2\,n^2 = 0,$$

obdržíme, jak snadně lze poznati, plochu válcovou, normálnou k rovině $\overline{YZ}$. Rovnice její jest

$$2\,(n^2 + p^2)\,z^2 - 4\,n\,p\,y\,z - 6\,n\,R^2\,y + 6\,p\,R^2\,z + 3\,R^4 = 0.$$

Touto rovnicí vyjádřena též její hyperbola, v rovině $\overline{YZ}$ obsažená. Snadně lze poznati, že jedna z asymptot její jest stejnosměrna s osou $\overline{Y}$; z toho pak vychází, že roviny osnovy $\overline{XY}$ pronikají plochu tu každá v jedné přímce: ve křivce kruhové poloměru nekonečně velkého, čímž zdánlivá neshoda s podmínkou pro křivky kruhové druhých ploch polárných se vysvětluje.

Pohlédněme k polům, jež obsaženy jsou v křivce kruhové, vyjadřené rovnicí (26).

Příslušné druhé plochy polárné mají rovinu $\overline{YZ}$ za rovinu souměrnosti. Vyšetřujíce, kterého druhu jsou jejich křivky stupně druhého, v té rovině obsažené, zaveďme do rovnice (9)

$$y = 0,\quad m^2 + p^2 = r^2,\quad n = 0,$$

čímž obdrží se rovnice žádaná, kterouž však uváděti nám se nevidí. Dosadíce z této do známé podmínky, obdržíme

$$R^2 + 2\,r^2 - 4\,m^2 \gtreqless \ldots\ldots \begin{cases} \text{hyperbolu,} \\ \text{parabolu,} \\ \text{ellipsu.} \end{cases}$$

Případ přechodný nastane, jestliže

$$\frac{R^2 + 2\,r^2}{4} = m^2. \tag{30}$$

Snadně se pozná, že toto m nejvýš může se rovnati r, i bude tehdy realným, kdy $R^2 < 2\,r^2$.

Čtyřem bodům křivky kruhové (26), jež určují se rovnicemi (26) a (30), jakožto polům jest křivkou tou parabola.

Pro body v obloucích, osu $\overline{X}$ pronikajících, zajisté jest

$$R^2 + 2\,r^2 - 4\,m^2 < 0,$$

tedy křivky elliptické; pro oblouky zbývající

$$R^2 + 2r^2 - 4m^2 > 0,$$

tedy křivky hyperbolické.

Uvážíme-li dále, že v rovinách osnovy $\overline{XY}$ jsou křivky kruhové, poznáme, že pro oblouky prvější máme *ellipsoidy*, pro oblouky poslednější pak *hyperboloidy*, jež od sebe čtyřmi *paraboloidy* jsou odděleny.

Jestliže $R^2 = 2r^2$, máme jen dva mezní paraboloidy, příslušné polům v ose $\overline{X}$ obsaženým; všechny ostatní plochy jsou pak hyperboloidy.

Rovněž tak, je-li $R^2 > 2r^2$, kdež pak paraboloidů není.

13. Podobně lze vyšetřovati druhé plochy polárné, jimž příslušné křivky kruhové jsou v rovinách osnovy $\overline{XZ}$.

Snadně se pozná: Druhé plochy polárné, jichž poly jsou body hyperboly (27), pronikají rovinu $\overline{YZ}$, jež jest jim rovinou souměrnosti, v hyperbolách. Jsou to vesměs *hyperboloidy*.

Druh jejich určíme v následujícím:

Uvedouce rovnici hyperboly, v $\overline{YZ}$ obsažené, na střed její a určíce pak pronik s přímkou, její střed obsahující, stejnosměrnou s osou $\overline{Z}$, obdržíme výsledek, z něhož vychází, že jest

$$\text{hyperboloid} \left\{ \begin{matrix} \text{jednodílný} \\ \text{dvojdílný} \end{matrix} \right\}, \text{ je-li } r^2 - 2p^2 \lesseqgtr 0; \quad (31)$$

pro případ pak přechodný obdržíme zase plochu válcovou, normálnou k $\overline{YZ}$.

Rovina $\overline{YZ}$ jest rovinou asymptotickou této plochy.

Z podmínečné rovnice (31), zavedeme-li za p^2 hodnotu z rovnice (27), vychází:

$$n^2 - R^2 \gtrless \frac{r^2}{2} \left\{ \begin{matrix} \text{hyperboloid jednodílný,} \\ \text{„} \quad \text{dvojdílný.} \end{matrix} \right.$$

Jelikož pro $n^2 = R^2 + \frac{r^2}{2}$ jest n větší než realná poloosa hyperboly vychází, že mezní body $i, k; i', k'$ jsou vždy realné.*) Obloukům ivk, $i'v'k'$ přisluší patrně hyperboloidy *dvojdílné*, částem ostatním pak *jednodílné*.

(Při tom v, v' značí vrcholy realné osy hyperboly uvažované).

Vzhledem k (28) lze říci:

---

*) Obraz sestrojiti laskavému čtenáři zůstavujeme.

Druhé plochy polárné, jichž poly jsou všechny body křivky kruhové, rovnicí tou určené, pronikají rovinu souměrnosti $\overline{XY}$ v křivkách stupně druhého, jež roztříditi lze podmínkou

$$2R^2 + r^2 - 4m^2 \gtreqless 0 \begin{cases} \text{hyperbola,} \\ \text{parabola,} \\ \text{ellipsa.} \end{cases}$$

Přechodný případ nastane, jelikož nejvýš může býti $m = R$, tehdy, když $r^2 < 2R^2$.

Proto, že stále předpokládáme $R > r$, platí tato podmínka vždy a máme tedy povždy křivky elliptické, parabolické a hyperbolické. Umístění obdobné jest onomu, jež poznali jsme při geometrickém místě (26).

Spolu zřejmo, že příslušné druhé plochy polárné jsou *paraboloidy elliptické*, *ellipsoidy a hyperboloidy.*

Vyšetřme ještě druhé plochy polárné, jimž příslušné křivky kruhové jsou v rovinách osnovy $\overline{YZ}$.

Geometrické místo polů dáno tu rovnicí (29).

Chtějíce vyšetřiti, jsou-li to *paraboloidy elliptické*,*) prohlédejme k rovnici (21).

Zaveďme do této rovnice za y hodnoty z (29) plynoucí, i poznáme snadně *čtyři* paraboloidy elliptické.

Pokud *ploch válcových* se týče, prohlédejme k rovnici (20).

Hyperbola stejnoramenná, jí vyjádřená, jest geometrickým místem polů roviny $\overline{XY}$, jimž příslušné druhé plochy polárné jsou plochy válcové. Pokud $R > r$, patrně křivka ta s přímkami v rovnici (29) vyjádřenými nemá realných bodů společných; pro případ různých poloměrů nemáme tudíž ploch válcových.

(Jestliže $R = r$, bude jediný bod — střed plochy posouvání — pronikem obou geometrických míst, i lze jej míti za pol, jemuž přísluší druhá plocha polárná válcová.)

Chtějíce příslušné sem *plochy kuželové* nalézti, prohlédejme k bodům, jež společny jsou křivce $A_{33} = 0$ (viz odst. 5.) a křivce rovnice (29).

Poněvadž křivka prvější jest stupně šestého, obdržíme celkem dvanácte bodů, ve kterých se s přímkami, rovnicí poslednější určenými, proniká.

*) Hyperbolické nemohou míti křivek kruhových.

V každé z přímek těchto jest tedy šest polů, jimž přisluší plochy kuželové. Zbývalo by vyšetřiti, kolik jest jich realných.

(Jestliže $R = r$, náleží jen jedinému bodu — středu plochy posouvání — druhá plocha polárná kuželová. Jest to zmíněná prve plocha válcová. Snadně se pozná, že degeneruje v jedinou přímku.)

14. Nebude snad od místa vyšetřiti geometrické místo středů druhých ploch polárných, jichž poly jsou v hyperbole (25) a o nichž jednali jsme již jinde.

Dosadíce

$$p^2 - n^2 = r^2, \; m = 0 \qquad (32)$$

do rovnice (9), obdržíme rovnici libovolné druhé plochy polárné tohoto místa geometrického.

Vyloučíme-li m, n, p z rovnic pro souřadnice středu této plochy a z rovnic (32), shledáme, že geometrickým místem středů příslušných ploch polárných jest stejnoramenná hyperbola

$$z^2 - y^2 = \frac{4\,r^2\,(R^2 - r^2)^2}{(R^2 + 2\,r^2)^2}, \; x = 0.$$

Snadně též poznati lze, že pol s příslušným ploše polárné středem obsažen vždy v přímce, střed plochy posouvání obsahující.

Jeť rovnice přímky, určené polem (n, p) a příslušným středem (y, z), tato:

$$n\,z = p\,y.$$

Jsou-li poloměry R a r stejny, vychází

$$x = 0, \; y = 0, \; z = 0,$$

což praví, uvážíme-li zároveň, že tyto druhé plochy polárné jsou zde vesměs kuželové, toto: *Polárné plochy kuželové plochy kruhokruhové o stejných poloměrech, příslušné stejnoramenné hyperbole* $z^2 - y^2 = r^2$ *roviny* $\overline{YZ}$ *(a mající v rovinách osnovy* $\overline{XY}$ *křivky kruhové), jsou soustředné s plochou posouvání.*

Zcela obdobně lze určiti středy druhých ploch polárných, příslušných polům, vyjadřeným rovnicí (27).

Shledáme tu jakožto místo geometrické zase hyperbolu stejnoramennou. Rovnice její obdrží se z předcházejícího, zavedeme-li za y, z; za R, r a naopak. I zde pol s příslušným středem obsažen jest v přímce, střed plochy posouvání obsahující.

Konečně pak pro $R = r$ vychází: *Polárné plochy kuželové, příslušné polům stejnoramenné hyperboly* $y^2 - z^2 = r^2$ *a mající v rovinách osnovy* $\overline{XZ}$ *křivky kruhové, jsou s plochou posouvání soustředné.*

Pro další geometrická místa polů, totiž pro křivky kruhové, vyznačené rovnicemi (26) a (28), není výsledků jednoduchých.

15. Nové hyperboly, v předešlém obdržené, povzbuzují k tomu, vyšetřiti, zdaž obdobné výsledky jednoduché neplatí též pro jiné stejnoramenné hyperboly roviny $\overline{YZ}$, jimž jsou $\overline{Y}$ a $\overline{Z}$ osami.

Obdobnou jako prve cestou obdržíme pro libovolnou hyperbolu stejnoramennou $z^2 - y^2 = A^2,\ x = 0$ *) (33) opět stejnoramennou hyperbolu, soustřednou a homothetickou, totiž:

$$z^2 - y^2 = \frac{4A^2(R^2 - r^2)^2}{(R^2 - r^2 + 3A^2)^2},\quad x = 0. \qquad (34)$$

Lze tedy říci:

Geometrickým místem středů druhých ploch polárných uvažované plochy kruho-kruhové, jichž poly tvoří hyperbolu s dvojnou hyperbolou soustřednou a homothetickou, jest jiná hyperbola soustředná a homothetická.

Snadno jest poznati, že obdobné výsledky platí též pro každou hyperbolu, jež soustředná jsouc s plochou a s hyperbolou dvojnou majíc společné asymptoty, její osu realnou má za svoji laterálnou a naopak.

Geometrickým místem středů druhých ploch polárných, jichž poly tvoří tuto hyperbolu, jest hyperbola s ní soustředná a homothetická, jejíž rovnice obdrží se ze (34), píšeme-li za z, y, za R, r a naopak.

Jsou-li poloměry R a r stejny, pak jsou všechny druhé plochy polárné, o kterých tuto jednáme, *plochy kuželové.*

Hyperbola (34) znamená tu pak hyperbole v (33) dané jakožto křivce *Hessiany* příslušnou křivku *Steineriany.*

Rovnice její zní: $z^2 - y^2 = 0$

i stotožňuje se s dvojnými přímkami plochy posouvání.

Lze tedy říci:

*) A znamená libovolnou kladnou hodnotu realnou.

Stejnoramenným hyperbolám Hessiany, jež mají dvojné přímky plochy kruho-kruhové za společné asymptoty, přísluší přímky tyto jakožto křivka Steineriany.

16. *Pro plochu, dané ploše kollinearnou, budou též plochy, kollinearné s polárnými plochami oné, plochami polárnými.* *) *I lze z výsledků, které až dosud jsme obdrželi pro polárné plochy zvláštní, orthogonálně souměrné plochy kruho-kruhové, souditi též na plochy polárné všech ostatních ploch posouvání kruho-kruhových a ellipso-elliptických.*

Rozbor rovnice druhého stupně.

Studujícím napsal **M. R.**

1. Rovnicí druhého stupně o dvou proměnných veličinách x, y nazýváme každou rovnici tvaru

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \qquad (1)$$

tedy rovnici, v níž nejvyšší členy jsou druhého stupně. Chtějíce pojednati o rovnici druhého stupně arci mlčky supponujeme, že nejsou všecky tři koëfficienty členů kvadratických, t. j. koëfficienty a_{11}, $2a_{12}$, a_{22} současně nullami, nebo pak by rovnice se stala linearnou. V následujícím přihlížíme jen k *reálné* rovnici druhého stupně, t. j. předpokládáme, že jsou všecky koëfficienty realné.

Dejme tomu, že x, y značí pravoúhlé souřadnice bodu v rovině, a položme si za úkol vyšetřiti, jakou čáru repraesentuje rovnice (1). Řešení tohoto úkolu označujeme jakožto rozbor dané rovnice.

2. Všecky body x, y, jichž souřadnice vyhovují rovnici prvního stupně, vyplňují přímku. Snadno lze ukázati, že v jistých případech totéž, nebo něco obdobného má platnost i vůči rovnici druhého stupně. Napíšeme-li na př. rovnici kvadratickou

$$a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 + 2acx + 2bcy + c^2 = 0,$$

---

*) Srovnej: Cremona-Weyr: Úvod do geometrické theorie křivek rovinných, pag. 23. odst. 18.