Bohuslav Hostinský

Absolutní minimum při odrazu světla

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 46 (1917), No. 2-3, 159--170

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120915

Ukážeme nyní applikací naší formule na speciální případ, vypočtení na př. počtu

$$\Gamma^{(6)}(S\,15),$$

kterýžto počet jest dle formule *Sternovy* stanoven též na str. 128. citované zde knihy *Nettovy* o kombinatorice.

Dle obecné, právě odvozené formule máme patrně:

$$\Gamma^{(6)}S(15) = \sum_{\mu_1\mu_2\mu_3} E\left(\frac{[12 - 4\mu_1 - 5\mu_2 - 6\mu_3]^2 + 3}{12}\right).$$

kde

$$\mu_1 = 0,\ 1,\ 2,\ 3;\quad \mu_2 = 0,\ 1,\ 2;\quad \mu_3 = 0,\ 1,\ 2.$$

Aby však výraz za symbolem E byl větší než nulla, vidíme, že toliko následujících 6 trojin hodnot (μ_1, μ_2, μ_3) jest přípustno: $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(2, 0, 0)$ a tu jest:

$$\Gamma^{(6)}(S\,15) = E(\tfrac{147}{12}) + E(\tfrac{39}{12}) + E(\tfrac{52}{12}) + E(\tfrac{67}{12}) + E(\tfrac{12}{12}) + E(\tfrac{19}{12}) = 12 + 3 + 4 + 5 + 1 + 1 = 26.$$

Absolutní minimum při odrazu světla.

Napsal **Bohuslav Hostinský.**

1. Světelný paprsek, jenž dospěje ze svítícího bodu A do iného bodu A' po odrazu na rovinném zrcadle, urazí dráhu AOA', která jest kratší než jakákoliv jiná lomená čára AMA'; O značí bod dopadu a M libovolný jiný bod v zrcadlící rovině.

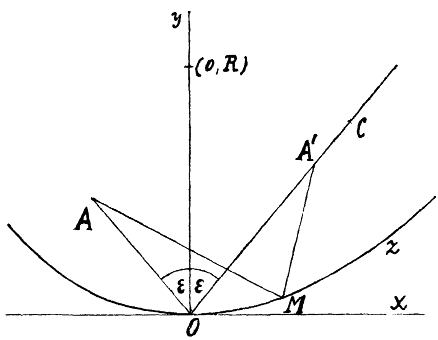
Tuto známou větu (Fermatův princip) lze rozšířiti pro případ odrazu na křivé ploše; jest však třeba připojiti různá omezení, poněvadž dráha AOA' paprsku není vždy minimální.

V následujících řádcích jest diskutován případ, který nazveme zkrátka odrazem na rovinné křivce z: zrcadlící plocha jest válcová s libovolnou křivkou řídící a paprsky dopadající i odražené jsou obsaženy v rovině kolmé k hranám válcové plochy; průsek plochy s rovinou dopadu jest právě křivka z.

Obyčejnou methodou pro vyhledávání maxim a minim dokazuje se věta: Buďiž M bod pohybující se po dané křivce z; proměnlivá délka lomené čáry AMA' spojující dva pevné body A a A' s bodem M může nabýti minimální hodnoty jen v případě, že AMA' splývá s drahou světelného paprsku vyhovujícího v bodě M zákonu o rovnosti úhlu odrazu a úhlu dopadu. Z toho plyne, že v bodě dopadu, jenž odpovídá hledanému minimu, dotýká se křivka z určité ellipsy mající body A a A' za ohniska. Představme si všechny konfokální ellipsy o ohniskách A a A'. Některé z nich dotýkají se křivky z; budiž O jeden z bodů dotyku.

První úlohou bude vyšetřiti podmínky *relativního minima*, t. j. podmínky, za kterých jest lomená čára AOA' skutečně kratší než AMA', značí-li M bod křivky z nekonečně blízký bodu O.

Předpokládáme, že křivka z nemá v O žádné singularity. Pro jednoduchost volme O za počátek soustavy souřadnic a tečnu



Obr. 1.

křivky z v O za osu Ox. Křivka z, jejíž bod M má souřadnice x a y, jest vyjádřena rovnicí *)

$$y = \frac{1}{2R} x^2 - \frac{1}{6R^2} \frac{dR}{ds} x^3 + \ldots;$$

R a $\frac{dR}{ds}$ značí hodnoty poloměru křivosti a jeho derivace dle oblouku s v bodě O. Dle toho, leží-li střed křivosti, příslušný bodu O, na kladné nebo na záporné části osy Oy, čítáme R kladně nebo záporně; obr. 1. odpovídá případu prvému. Bod A volme v druhém kvadrantu; A' bude pak v prvním. Je-li

$$r = AO > o, r' = A'O > o$$

*) Viz *B. Hostinský*: Differenciální geometrie křivek a ploch str. 12.

a ε úhel dopadu ($o < \varepsilon \leqq 90^0$), mají body A a A' souřadnice:

$$A\,(-r \sin\varepsilon,\ r \cos\varepsilon),\ A'\,(r' \sin\varepsilon,\ r' \cos\varepsilon).$$

Z toho vypočteme

$$AM^2 = (r\sin\varepsilon + x + \ldots)^2 + \left(r\cos\varepsilon - \frac{x^2}{2R} + \frac{1}{6R^2}\frac{dR}{ds}x^3 + \ldots\right)^2$$

$$= r^2\left[1 + \frac{2\sin\varepsilon}{r}x + \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{r\cos\varepsilon}{R}\right)x^2 + \frac{\cos\varepsilon}{3rR^2}\frac{dR}{ds}x^3 + \ldots\right]$$

a dále užívajíce binomického rozvoje

$$AM = r\left[1 + \frac{\sin\varepsilon}{r}x + \frac{\cos\varepsilon}{2r^2}\left(\cos\varepsilon - \frac{r}{R}\right)x^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos\varepsilon}{2r}\left(\frac{1}{3R^2}\frac{dR}{ds} - \frac{\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{r^2} + \frac{\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{rR}\right)x^3 + \ldots\right]$$

Píšeme-li zde všude $-\varepsilon$ místo $+\varepsilon$, obdržíme výraz pro $A'M$ a z toho sečtením vzorec, který udává délku lomené čáry $AM + MA'$ jako funkci proměnné x:

$$AM + MA' = r + r' + \cos\varepsilon\left[\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{\cos\varepsilon}{2} - \frac{1}{R}\right]x^2$$

$$+ \cos\varepsilon\left[\frac{1}{3R^2}\frac{dR}{ds} + \frac{(r'-r)\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{2rr'}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)\right]x^3 + \ldots \tag{1}$$

Proměnnou x považujeme za nekonečně malou veličinu 1. stupně; členy vynechané na pravé straně rovnice (1) tvoří veličinu nekonečně malou 4. stupně.

2. Vzorec (1) obsahuje vše, čeho jest třeba k vyšetření relativního minima. Poznamenejme nejprve, že se na pravé straně nevyskytuje člen prvního stupně v x; délka $AM + MA'$ nabývá tedy obecně extrémní hodnoty $r + r' = AO + OA'$ pro $x = 0$. Relativní minimum nastane však jen tehdy, je-li

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} - \frac{2}{R\cos\varepsilon} > 0. \tag{2}$$

Považujme svítící bod A za pevný; r a ε jsou konstantní, takže v nerovnosti (2) zbývá jediná proměnná veličina r'. Pokud r' nedosáhne délky

$$OC = \frac{Rr\cos\varepsilon}{2r - R\cos\varepsilon}, \tag{3}$$

jest podmínce (2) vyhověno. Bod C definovaný rovnicí (3) na odraženém paprsku nazývá se *fokálním bodem*. Jakmile jest $r' > OC$, jest koefficient při x^2 v rovnici (1) záporný a nastává obecně maximum ($r + r' = AO + OA' > AM + MA'$). Pro $r' = OC$ není obecně ani maximum ani minimum, poněvadž koefficient při x^3 v rovnici (1) nerovná se nulle.

Sledujme nyní, jak jest možno vyhověti podmínce (2) v různých případech; podle tvaru křivky z v okolí bodu O rozeznáváme tři případy:

a) $R < 0$; křivka obrací konvexní stranu k dopadajícímu paprsku. Nechť má bod A' na odraženém paprsku jakoukoliv polohu, jest AOA' vždy relativní minimum.

b) $R > 0$; křivka obrací konkávní stranu k dopadajícímu paprsku. Fokální bod C má obecně konečnou vzdálenost (3) od bodu dopadu O. Je-li však $2r = R \cos \varepsilon$, jest fokální bod v nekonečnu.

c) $R^{-1} = 0$; křivka má O inflexní bod. Na odraženém paprsku můžeme voliti bod A' kdekoliv; AOA' jest vždy relativní minimum.*)

Jest tedy v každém případě (nechť mají svítící bod A a bod dopadu O jakoukoli polohu) možno voliti na odraženém paprsku bod A' tak, aby délka AOA' dávala relativní minimum.

3. Fokální bod C byl definován jakožto rozhraní mezi těmi body A' na odraženém paprsku, které dávají relativní minimum výrazu AOA' a těmi, které dávají relativní maximum. Dokažme nyní, že C jest zároveň průsečíkem paprsku OA' s paprskem, jenž vychází z A a odráží se na z v bodě M nekonečně blízkém k O.

K důkazu použijeme věty, kterou lze snadno odůvodniti: Rovnice

$$[l(M^2 - L^2) - 2mLM]X + [m(L^2 - M^2) - 2lLM]Y + n(L^2 + M^2) - 2N(lL + mM) = 0, \quad (4)$$

kde X, Y, Z značí proměnné souřadnice, náleží přímce, která jest souměrně sdružena k přímce

$$lX + nY + n = 0 \quad (5)$$

*) V případech *a*) a *c*) vychází OC vzhledem k (3) záporně, fokální bod jest virtuální (za zrcadlem).

dle osy souměrnosti

$$LX + MY + N = 0. \tag{6}$$

Dopadající paprsek AM má rovnici

$$(Y - r\cos\varepsilon)(r\sin\varepsilon + x) + (X + r\sin\varepsilon)(r\cos\varepsilon - y) = 0.$$

Dosaďme sem za y řadu uvedenou v odst. 1. a srovnejme pak s rovnicí (5); vynechávajíce členy obsahující třetí a vyšší mocniny veličiny x obdržíme

$$l = r\cos\varepsilon - \frac{x^2}{2R},\ m = r\sin\varepsilon + x,\ n = -rx\cos\varepsilon - \frac{r\sin\varepsilon}{2R}x^2$$

Normála křivky z v M sestrojená má rovnici

$$(Y - y)\,y' + (X - x) = 0.$$

Dosaďme opět za y a y' příslušné řady; srovnáním s (6) vychází

$$L = 1,\ M = \frac{x}{R} - \frac{x^2}{3R^2}\frac{dR}{ds},\quad N = -x.$$

Nahraďme nyní v rovnici (4) veličiny l, m, n, L, M, N výrazy právě nalezenými; po jednoduchých redukcích nabude rovnice paprsku odraženého v bodě $M(x, y)$ křivky z tvaru

$$-r\cos\varepsilon\, X + r\sin\varepsilon\,.\,Y$$
$$+ x\left[-\frac{2r\sin\varepsilon}{R}X + \left(1 - \frac{2r\cos\varepsilon}{R}\right)Y + r\cos\varepsilon\right] = 0.$$

Pro $x = 0$ přechází (7) v rovnici paprsku OA', jenž se odráží v bodě O. Budiž F bod, v němž jest OA' proťat paprskem odrážejícím se v bodě $M(xy)$ křivky nekonečně blízkém bodu O; souřadnice X, Y bodu F vypočteme připojíce k (7) druhou rovnici, která se odvodí ze (7) derivováním dle x. V obou rovnicích jest pak položiti $x = 0$. X a Y vyhovují tedy rovnicím

$$-r\cos\varepsilon\,.\,X + r\sin\varepsilon\,.\,Y = 0,$$
$$-2r\sin\varepsilon\,.\,X + (R - 2r\cos\varepsilon)\,Y + rR\cos\varepsilon = 0.$$

Řešením těchto rovnic obdržíme pro vzdálenost OF výraz

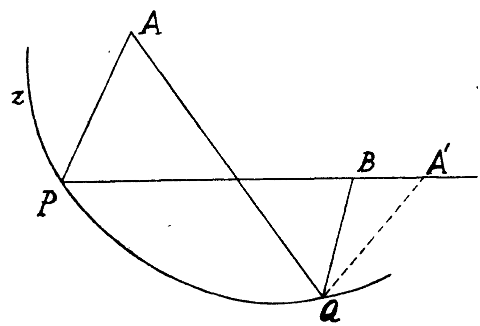
$$OF = \frac{\cos\varepsilon}{Y} = \frac{X}{\sin\varepsilon} = \frac{rR\cos\varepsilon}{2r - R\cos\varepsilon}.$$

Bod F jest totožný s fokálním bodem C; srv. (3).

Sledujme všechny paprsky, jež původně vycházejí z bodu A a odrážejí se pak v různých bodech křivky z; na každém odraženém paprsku jest určitý fokální bod a geometrické místo všech fokálních bodů jest *kaustická křivka* (obálka odražených paprsků).

4. Obraťme se nyní k úloze o *absolutním minimu*: v rovině křivky z jsou dány dva body A a A'; na křivce z jest vyhledati bod P, pro který lomená čára APA' má nejmenší možnou délku.

Vyhovuje-li určitý bod P této podmínce, jest APA' zároveň relativní minimum; lomená čára APA' jest jistě tvořena paprskem dopadajícím v P a odrážejícím se podle základního zákona o odrazu. Předpokládejme, že se bod A' vzdaluje po odraženém paprsku od bodu dopadu P. Relativní minimum přestane, splyne-li A' s fokálním bodem C. Absolutní minimum přestává však (obecně před relativním) tenkráte, splyne-li A' s bodem B, kterýžto jest určen na odraženém paprsku dvěma podmínkami:



Obr. 2.

a) na křivce z lze vyhledati bod Q, nesplývající s P, tak, že obě lomené čáry: APB i AQB vyhovují v P resp. v Q zákonu o rovnosti úhlu odrazu a dopadu.

b) $$AP + PB = AQ + QB.$$

Důkaz plyne z obr. 2.: Je-li bod A' na prodlouženém paprsku PB za bodem B, platí

$$AP + PA' = AQ + QB + BA' > AQ + QA';$$

lomená čára APA' nemůže dávati absolutní minimum.*)

---

*) Podobně lze vyšetřovati dle Darbouxa absolutní minimum i v jiných případech. Srv. můj článek o absolutním minimu v theorii geodetických čar (Časopis pro pěst. m. a f. r. 42, str. 529—534).

Bod B lze vyhledati na každém odraženém paprsku. Geometrické místo bodu B nazveme křivkou p; její tvar a poloha závisí na dané křivce z a na poloze bodu A. Křivku p vytvoří ohnisko proměnlivé ellipsy, která se dotýká křivky z ve dvou bodech a má druhé ohnisko ve svítícím bodě A.

Výsledek všech dosavadních úvah vyjádříme větou: *Každému bodu A roviny náležejí vzhledem k dané zrcadlící křivce z dvě význačné křivky, totiž křivka p a křivka kaustická. Libovolný paprsek vycházející z bodu A a odrážející se v bodě P čáry z protne po odrazu nejprve první křivku v bodě B, pak dotkne se druhé v bodě C. Pokud jest bod A' mezi P a B, dává lomená čára APA' absolutní minimum; je-li A' mezi B a C, dává APA' pouze relativní minimum; je-li konečně A' za bodem C, není délka APA' ani relativní minimum.*

Ke konstrukci křivky p poznamenávám: kdežto fokální bod C jest na odraženém paprsku určen jednoznačně, může se státi, že podmínkám a) a b) shora uvedeným vyhovuje na témže paprsku několik bodů B. V takovém případě počítáme ke křivce p jen ten z nich, který jest nejblíže bodu dopadu; ostatní body B nemají v naší úloze významu.

5. Přejděme nyní k specielnímu případu: křivkou z budiž kružnice

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{8}$$

Souřadnice x, y bodu dopadu P vyjádříme pomocným úhlem u:

$$x = R \cos u, \quad y = R \sin u.$$

Svítící bod A nechť má souřadnice $x = x_0$, $y = o$. Paprsek dopadající AP jest tedy vyjádřen rovnicí

$$(X - x_0)\, y + Y\, (x_0 - x) = 0,$$

kolmice dopadu OP rovnicí

$$X \sin u - Y \cos u = 0.$$

Rovnici odraženého paprsku odvodíme dosadíce do (4)

$$l = R \sin u, \quad m = x_0 - R \cos u, \quad n = - R\, x_0 \sin u,$$
$$L = \sin u, \quad M = - \cos u, \quad N = 0.$$

Vychází

$$X\,(- R \sin u + x_0 \sin 2u) + Y\,(R \cos u - x_0 \cos 2u) - R x_0 \sin u = 0.$$

Označme levou stranu této rovnice $f(u)$. Souřadnice X, Y fokálního bodu vyhovují rovnicím

$$f(u) = 0, \quad \frac{df(u)}{du} = 0,$$

ze kterých plynou vzorce vyjadřující obě souřadnice jakožto funkce parametru u:

$$\begin{aligned} X &= Rx_0 \frac{-R + 3x_0 \cos u - 2x_0 \cos^3 u}{R^2 - 3Rx_0 \cos u + 2x_0^2}, \\ Y &= Rx_0^2 \frac{(2\cos^2 u - 1) \sin u}{R^2 - 3Rx_0 \cos u + 2x_0^2}. \end{aligned} \tag{9}$$

V dalším předpokládáme, že R a x_0 jsou kladná čísla.

6. Rovnicemi (9) jest definována kaustická křivka pro kružnici (8) a svítící bod A $(x_0, 0)$; zbývá ustanoviti křivku p. K tomu cíli vyhledáme všechny ellipsy, které se dotýkají kružnice (8) ve dvou bodech a mají jedno ohnisko v bodě A; křivka p jest geometrickým místem druhého ohniska. Střed O kružnice (8) leží vždy na jedné z obou os ellipsy; proto rozeznáváme dva případy:

a) Hlavní osa ellipsy prochází středem O kružnice (8). Jedno ohnisko ellipsy jest v bodě A, hlavní její osa splývá tedy s Ox. Druhé ohnisko budiž E $(e, 0)$. Konfokální kuželosečky s ohnisky A a E mají střed v bodě $\left(\frac{x_0 + e}{2}, 0\right)$; jejich rovnice zní

$$\frac{\left(x - \frac{x_0 + e}{2}\right)^2}{\left(\frac{x_0 - e}{2}\right)^2 + \lambda} + \frac{y^2}{\lambda} = 1. \tag{9}$$

y lze eliminovati rovnicí (8); po úpravě vychází

$$x^2 + 4x \frac{x_0 + e}{(x_0 - e)^2} \lambda - \left(\frac{x_0 + e}{x_0 - e}\right)^2 \lambda$$
$$+ \left[1 + \frac{4\lambda}{(x_0 - e)^2}\right] (\lambda - R^2) = 0.$$

Kořeny této rovnice, kvadratické v x, určují abscissy dvou tětiv (rovnoběžných s osou Oy), které jsou společné ellipse a kružnici (8); mají li se, jak žádáme, obě křivky dotýkati, musí býti diskriminant poslední rovnice roven nulle, což vede k nové kvadratické rovnici pro λ. Kořeny této nové rovnice jsou

$$\lambda_1 = -\frac{R^2 (x_0 - e)^2}{4 x_0 e}, \quad \lambda_2 = -\frac{(x_0 - e)^2}{4}.$$

Z rovnice (9) jest patrno, že λ rovná se čtverci vedlejší poloosy. Kořen λ_2 náleží tudíž hyperbole; λ_1 náleží ellipse, avšak jen za podmínky

$$e < 0. \tag{10}$$

Abscissa příslušná tětivě (rovnoběžné s osou Oy), která spojuje oba body dotyku kružnice s ellipsou jest pak

$$x_1 = -\frac{2\lambda_1 (x_0 + e)}{(x_0 - e)^2} = -\frac{R^2 (x_0 + e)}{2x_0 e}.$$

Tětiva jest reální jen pokud $| x_1 | \leqq R$ t. j. pokud

$$| R (x_0 + e) | \leqq | 2x_0 e |. \tag{11}$$

Abychom vyšetřili geometrický obsah této podmínky, které má vyhověti ohnisko E proměnlivé ellipsy, předpokládejme nejprve, že e není menší než $- x_0$. Poněvadž x_0 jest kladné číslo, e pak záporné, můžeme místo (11) psáti

$$R (x_0 + e) \leqq - 2x_0 e$$

a tedy

$$e \leqq - \frac{Rx_0}{2x_0 + R}. \tag{12}$$

Tím jest určena horní mez veličiny e. Dolní mez určíme předpokládajíce $e < - x_0$; dle (11) bude

$$- R (x_0 + e) \leqq - 2x_0 e$$

a tedy

$$e (2x_0 - R) \leqq R x_0. \tag{12'}$$

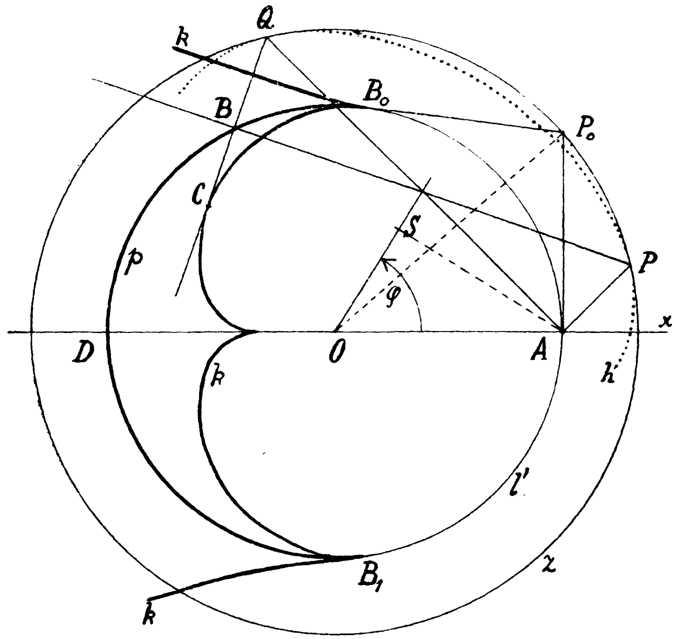
Zde jest nutno míti zřetel ku dvěma možnostem: je-li $2x_0 > R$, jest nerovnosti (12′) vyhověno, dosadíme-li za e zcela libovolné záporná číslo; dolní mez čísla e jest $- \infty$. Je-li však $2x_0 < R$, plyne z (12′), že

$$e \geqq - \frac{R x_0}{R - 2x_0}.$$

Výsledek diskusse shrneme větou:

Druhé ohnisko E $(e, 0)$ ellipsy, která má jedno ohnisko v bodě A $(x_0, 0)$, dvojnásobně se dotýká kružnice (8) a má střed na ose Ox, vyhovuje podmínkám

$$\left.\begin{array}{ll} -\infty \leqq e \leqq -\dfrac{R x_0}{R+2x_0} & \text{pro } 2x_0 \geqq R \\ \text{nebo} & \\ -\dfrac{R x_0}{R-2x_0} \leqq e \leqq -\dfrac{R x_0}{R+2x_0} & \text{pro } 2x_0 \leqq R. \end{array}\right\} \quad (13)$$



Obr. 3.

b) Vedlejší osa ellipsy prochází středem O kružnice (8). Poznamenejme především, že obě ohniska ellipsy jsou uvnitř kružnice, pročež $x_0 < R$. S pevného ohniska A spusťme kolmici AS na vedlejší osu proměnlivé ellipsy; pata Sté kolmice (střed ellipsy) opíše kružnici l, jež má OA za průměr (srov. obr. 3.), otáčí-li se vedlejší osa kolem bodu O. Druhé ohnisko B ellipsy jest souměrně sdruženo k A dle vedlejší osy, opisuje tedy kružnici l' o poloměru OA soustřednou s danou kružnicí z, jež má rovnici (8)

Avšak pouze část kružnice l' náleží křivce p. Budiž h uvažovaná proměnlivá ellipsa, jež má ohnisko B nad osou Ox (v obr. 3. jest naznačena tečkovaně polovina ellipsy h). Kružnice (8) dotýká se ellipsy v bodech P a Q. Paprsek, jenž vychází původně z A a odráží se v P, protne po odrazu kružnici l' v bodě B, jenž náleží křivce p, a v druhém bodě, jenž té křivce nenáleží; neboť tento druhý bod nemůže býti ohniskem ellipsy, která by se kružnice (8) dvojnásobně dotýkala a měla druhé ohnisko v A. Absolutní minimum na odraženém paprsku PB přestává v bodě B. Na paprsku, jenž vychází z A a odráží se pak v Q. přestává absolutní minimum v témže bodě B.

Paprsek PB dotkl by se kaustické křivky k *), kdybychom jej prodloužili zpět za bod P; příslušná část kaustické křivky není v obr. 3. naznačena, ježto nemá významu v problému minima. Odražený paprsek PB dává tudíž relativní minimum neomezeně; na paprsku QB přestává však relativní minimum v bodě C (zde se dotýká QB kaustické křivky k).

Předpokládejme nyní, že se zvětšuje úhel φ, který svírá vedlejši osa OS ellipsy h s kladným směrem osy Ox; vzdálenost bodů P a Q jež jsou položeny souměrně dle OS, se při tom zvětšuje a dostoupí největší hodnoty $=$ průměru kružnice (8), je-li $\varphi = 90^0$. Nejmenší možná hodnota úhlu φ jest

$$\sphericalangle AOP_0 = \arccos \frac{x_0}{R};$$

v tomto případě stojí dopadající paprsek AP_0 kolmo na Ox, v bodě dopadu P_0 splývá P s Q a ellipsa má v P_0 s kružnicí z dotyk 3. stupně; na odraženém paprsku P_0B_0 přestává absolutní minimum současně s relativním v bodě B_0. V B_0 má kaustická křivka bod vratu; tečnou vratu jest právě paprsek B_0P_0, jenž se dotýká též kružnice l'.

Souřadnice ξ, η bodu na kružnici l' vyjádříme jako funkce polárního úhlu ω:

$$\xi = x_0 \cos \omega, \quad \eta = x_0 \sin \omega, \quad o \leqq \varphi < 2\pi.$$

*) V obr. 3. jest $x_0 = \frac{3}{4}R$. Jest zajímavo sledovati, jak závisí tvar kaustické křivky na poloze bodu A. Upozorňuji na příslušné obrazce v „Optice" p. dv. rady prof. Strouhala, která se nalezá v tisku.

Křivce p náleží oblouk B_0DB_1 kružnice l' definovaný nerovnostmi:

$$2 \arccos \frac{x_0}{R} \leqq \omega \leqq 2\pi - 2 \arccos \frac{x_0}{R} \cdot \qquad (14)$$

Z obr. 3. jest patrno, že odražený paprsek protne vždy dříve kružnici l' a pak teprve osu Ox; část křivky p definovaná vzorci (13) nepřichází tedy k platnosti. Tak tomu jest vůbec v případě, že A leží uvnitř kružnice z.

Konstrukce oblouku (14) odpadá v případě, že A jest vně kružnice z aneb na kružnici samé; neboť pak nelze sestrojiti reální ellipsu, která by se kružnice z dvojnásobně dotýkala, měla jedno ohnisko v A a jejíž vedlejší osa by procházela bodem O.

Křivka p redukuje se na část osy Ox — definovanou vzorci (13) — v případě, že bod A leží vně dané kružnice nebo na kružnici samé, a na oblouk kružnice l' — definovaný vzorcem (14) — v případě, že A leží uvnitř dané kružnice.

7. Fermatův princip, vyslovený v odst. *1.*, platí též, jak známo, pro lom světla. Úloha o absolutním minimu dala by se i v tomto případě řešiti podobně jako dříve. Tvar kaustických křivek a křivek p závisel by ovšem též na hodnotě indexu lomu.

Ku konci upozorňuji na krásné pojednání Duhemovo*), které jest věnováno přesnému rozboru Fermatova principu o relativním minimu jednak v případě, že paprsky lámou se a odrážejí opětovaně na daných plochách, jednak v případě, že světlo šíří se křivočarými paprsky v heterogenním mediu. Bylo by zajímavo doplniti Duhemovy resultáty diskussí absolutního minima.

O kuželosečkových plochách translačních.

Napsal Dr. **Frant. Kadeřávek.**

(Dokončení.)

13*a*. Ježto plocha α je stupně 4, musí v rovině, která obsahuje jednu kuželosečku C plochy (obr. 7) spočívati ještě druhá křivka 2° a obě protínají se v bodech d d' na křivce dvojné D.

---

*) *P. Duhem*: Sur le principe d'Optique géométrique énoncé par Fermat (Journal de math. p. et appl. 6e série t. 8, p. 1—58; 1912).