Řešení úloh

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 22 (1893), No. 3, 214--224

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120901

velikého elektromagnetu Faradayova. Kapalina vznášela se v nádobce z kamenné soli, ke kteréž nejeví přilnavosti, v podobě sploštěné koule právě jako kapka vodní ve tvaru sferoidálném na rozžhaveném plechu platinovém při pokusu Leidenfrostově. Jakmile elektromagnet počal působiti, hladina kapaliny právě jako u jiných kapalin magnetických značně se v blízkosti polů zvýšila a tam setrvala až do úplného vypaření. Tím stvrzena byla domněnka nijak dosud nedokázaná, že kyslík i ve stavu kapalném podržuje své vlastnosti magnetické. Ch. Ed. *Guillaume*,*) vycházeje z hypothesy, že magnetismus molekulárný při proměně skupenstva se nemění — dospívá jednoduchou úvahou k výsledku, že kyslík jest ze všech hmot známých, železa nevyjímaje, za stejných jinak okolností nejvíce magnetickým, maje největší známý specifický magnetismus (asi dvakráte větší než železo, u něhož se udává v maximu $200\, cm^{\frac{5}{2}}\, g^{-\frac{1}{2}}\, sec^{-1}$). Úvaha tato ovšem opírá se o celou řadu nedokázaných dosud vět, neboť nelze zajisté jeden důležitý faktor při jeho extrapolacích přehlédnouti, totiž změnu skupenstva a zvláště nízkou temperaturu, takže třeba dalších prací, které by studovaly otázky sem spadající i se stránky quantitativné. Ale přes to nabyla pokusem tímto zajímavého stvrzení věta, že s klesající temperaturou zvětšuje se magnetismus a s ním i magnetický moment, jakož pro obvyklé nám temperatury u tuhých těles magnetických bylo již dávno známo.

Phys. Revue 1892. 3.

Řešení úloh.

Úloha 1.

Řešiti rovnici

$$\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{b^2 - x^2} = \frac{ab}{x}.$$

Řešení. (Zaslal p. *Josef Langr*, stud. VI. tř. r. v Hradci Král.)

*) Viz Zeitschrift für Elektrotechnik 1892 V. p. 242.

Dvojnásobným zmocněním obdrží rovnice daná tvar

$$[(a^2+b^2)x^2-a^2b^2]^2=0,$$

odkud vypočítáme

$$x=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\,.$$

Značí-li odmocniny v rovnici hodnoty kladné, jest x též voliti kladným.

Úloha 2.

Řešiti jest rovnici

$$a^x b^{1-x}+b^x a^{1-x}=1.$$

Řešení. (Zaslal p. *Jaroslav Doležal*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích.)

Píšeme-li rovnici danou v podobě

$$b\left(\frac{a}{b}\right)^x+a\left(\frac{b}{a}\right)^x=1$$

a položíme-li

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x=y\,,$$

vznikne rovnice kvadratická

$$by^2-y+a=0,$$

z níž

$$y=\frac{1\pm\sqrt{1-4ab}}{2b}\,,$$

$$x=\frac{\log y}{\log a-\log b}\,.$$

Úloha 3.

Tři čísla, jichž součet jest 28, tvoří řadu geometrickou; zvětšíme-li je postupně o 6, 7, 4, tvoří nová čísla řadu arithmetickou. Která jsou to čísla?

Řešení. (Zaslal p. *Jan Pexider*, stud. VIII. tř. g. střední školy na Malé Straně v Praze.)

Označíme-li první člen řady geometrické a, podíl q, jest dle podmínek úlohy

$$(1)\qquad \begin{aligned} a + aq + aq^2 &= 28, \\ aq + 7 - a - 6 &= aq^2 + 4 - aq + 7\,; \end{aligned}$$

rovnice poslední zjednodušená jest

$$(2)\qquad a - 2aq + aq^2 = 4.$$

Z rozdílu rovnic (1) a (2) jde

$$q = \frac{8}{a},$$

dosazením do (1) obdržíme

$$a^2 - 20a + 64 = 0.$$

Jest tedy

$$\begin{aligned} a_1 &= 16, & a_2 &= 4, \\ q_1 &= \tfrac{1}{2}, & q_2 &= 2; \end{aligned}$$

žádané řady pak jsou:

	geometrická:	16,	8,	4,	arithmetická:	22,	15,	8,
aneb	„	4,	8,	16,	„	10,	15,	25.

Úloha 4.

Stanoviti součet řady, jejíž obecný člen jest

$$a_n = \frac{4n + 2}{n^3 + 3n^2 + 2n}.$$

Řešení. (Zaslal p. *Jaroslav Skála*, stud. VIII. tř. g. v Prostějově.)

Obecný člen dané řady lze rozložiti takto:

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n+1} - \frac{3}{n+2}.$$

Jest tedy

$$a_{n-1} = \frac{1}{n-1} + \frac{2}{n} - \frac{3}{n+1}$$

$$a_{n-2} = \frac{1}{n-2} + \frac{2}{n-1} - \frac{3}{n}$$

$$\vdots$$

$$a_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4}$$

$$a_1 = 1 + 1 - 1.$$

Sečtouce všechny tyto rovnice, najdeme

$$S_n = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{3}{n+2}$$

čili

$$S_n = \frac{n(5n+7)}{2(n+1)(n+2)} .$$

Úloha 5.

Řešiti rovnici

$$\sin x = 3 \sin 3x.$$

Řešení. (Zaslal p. *A. Haas*, stud. VII. tř. českého gymnasia v Opavě.)

Vyjádříme-li $\sin 3x$ funkcemi úhlu jednoduchého, obdržíme rovnici

$$\sin x (3 \sin^2 x - 2) = 0,$$

z níž

$$\sin x = 0$$

aneb

$$\sin x = \pm \frac{1}{3}\sqrt{6} .$$

Odtud ustanovíme, hledíce k úhlům 4R nepřesahujícím:

$x_1 = 0$, $x_2 = 180^\circ$, $x_3 = 360^\circ$,
$x_4 = 54^\circ 44' 7''$, $x_5 = 2R - x_4 = 125^\circ 15' 53''$,
$x_6 = 2R + x_4 = 234^\circ 44' 7''$, $x_7 = 4R - x_4 = 305^\circ 15' 53''$.

Úloha 6.

Řešiti rovnici

$$\sin 2x \,.\, \operatorname{tg} \frac{R - x}{2} = 0{\cdot}375.$$

Řešení. (Zaslal p. *Josef Pithardt,* stud. VII. tř. r. v Pardubicích.)

Položíme-li

$$\sin 2\,x = 2 \sin x \cos x,$$

$$\operatorname{tg} \frac{R - x}{2} = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{1 - \sin x}{\cos x},$$

nabývá rovnice daná podoby

$$2 \sin x\,(1 - \sin x) = \frac{3}{8}$$

čili

$$16 \sin^2 x - 16 \sin x + 3 = 0.$$

Odtud obdržíme

$$\sin x = \frac{1}{4} \quad \text{aneb} \quad \sin x = \frac{3}{4},$$

z čehož

$$x_1 = 14^0 28' 39'',\ x_2 = 2R - x_1,$$
$$x_3 = 48^0 35' 25'',\ x_4 = 2R - x_3.$$

Úloha 7.

Kterak možno čtverec rozvrhnouti ve čtyři shodné různoběžníky? Kdy mají tyto čtvrtiny obvod největší, kdy nejmenší?

Řešení. (Zaslal p. *Otak. Bureš,* stud. VI. tř. česk. r. v Praze).

Středem *s* daného čtverce *abcd* proložme dvě navzájem kolmé příčky *eg*, *fh* a úloha jest řešena. Obdržené různoběžníky jsou čtyrúhelníky z tětiv a každý má dvé stran stejných. Pokládáme-li daný čtverec za stálý, rozhoduje o $\left\{\begin{matrix}\text{maximum}\\\text{minimum}\end{matrix}\right.$ obvodů všech a tudíž i každého zvlášť $\left\{\begin{matrix}\text{minimum}\\\text{maximum}\end{matrix}\right.$ délky *eg* nebo *se*.

Patrně tedy různoběžník má obvod

minimum, je-li $se \perp ab$,
maximum, je-li $se = sb$.

V případě prvém z různoběžníků stanou se čtverce, ve druhém trojúhelníky pravoúhlé.

Úloha 8.

Různoběžníky úlohy předešlé složte tak, aby vznikl čtverec, z něhož jiný čtverec jest vykrojen. Kterak mají se k sobě tyto dva čtverce? V kterém případě rovná se plocha výkrojku ploše zbývající?

Řešení. (Zaslal p. *Jan Vykruta*, stud. VIII. tř. g. v Jindř. Hradci).

Složme různoběžníky úlohy předešlé tak, aby polovice příček eg, fh staly se stranami nového čtverce. Vnitřní vykrojený čtverec bude nyní $abcd$ a stranou jeho jest rozdíl dílů, na něž byla strana m původního čtverce příčkou rozdělena. Jest tedy obsah původního čtverce $P_1 = m^2$, obsah čtverce nově složeného $P_2 = m^2 + n^2$ a obsah výkrojku $P_3 = n^2$. Má-li býti $P_3 = \frac{1}{2} P_2$, musí býti $m = n$, což nastane při rozvržení původního čtverce úhlopříčnami.

Poznámka: Na myšlence v úloze této obsažené, lze dle prof. *Ot. Jandečky* v Novém Bydžově založiti důkaz Pythagorovy věty. Sestrojíme-li na odvěsnách AC, BC pravoúhlého trojúhelníka ABC čtverce a vedeme-li ve větším z nich středem dvě příčky rovné přeponě AB, rozdělíme čtverec tento na čtyři různoběžníky, z kterých pospolu se čtvercem menší odvěsny lze složiti čtverec přepony.

Úloha 9.

Je-li $abcd$ rovnoběžník pravoúhlý a o bod kdekoli v jeho rovině neb i mimo ni, jest vždy

$$\overline{oa}^2 + \overline{oc}^2 = \overline{ob}^2 + \overline{od}^2.$$

Podejte důkaz.

Řešení. (Zaslal p. *Josef Hájíček*, učitel v Grygově u Olomouce.)

Nechať jest bod o kdekoli, veďme jím

$$om \perp ab\,,\quad on \perp cd\,,$$

i bude

$$am = dn\,,\quad bm = cn\,,$$

$$\overline{oa}^2 = \overline{am}^2 + \overline{om}^2,\qquad \overline{ob}^2 = \overline{bm}^2 + \overline{om}^2,$$

$$\overline{oc}^2 = \overline{cn}^2 + \overline{on}^2,\qquad \overline{od}^2 = \overline{dn}^2 + \overline{on}^2.$$

Sečtením těchto rovnic obdržíme, hledíce k rovnosti délek svrchu uvedených,

$$\overline{oa}^2 + \overline{oc}^2 = \overline{ob}^2 + \overline{od}^2.$$

Úloha 10.

Jak velké jsou ostré úhly trojúhelníka pravoúhlého, je-li čtverec na přeponě roven čtyřnásobnému obdélníku sestrojenému z odvěsen?

Řešení. (Zaslal p. *Fr. Očadlík*, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži).

V trojúhelníku pravoúhlém buďtež a, b odvěsny a c přepona. Dle podmínky v úloze jest

$$c^2 = 4ab\,;$$

ježto

$$a = c \sin\alpha\,,\quad b = c\cos\alpha\,,$$

jest

$$ab = c^2 \sin\alpha\cos\alpha\,,$$

pročež dle podmínky hořejší

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}.$$

Z rovnice této plyne dále $\sin 2\alpha = \dfrac{1}{2}$,

tedy

$$2\alpha = 30^\circ,\quad \alpha = 15^\circ,\quad \beta = 75^\circ.$$

Správné řešení úloh zaslali pp.:

Vojtěch Břečka, stud. VII. tř. g. v Budějovicích, úl. 1., 5.
Václav Kolář, stud. VIII. tř. g. v Budějovicích, úl. 1., 3., 5., 10.
Ant. Picha, stud. VIII. tř. g. v Budějovicích, úl. 3., 10.
Jan Vykruta, stud. VIII. tř. g. v Jindř. Hradci, úl. 1., 3., 5., 6., 7., 8., 9., 10.
Otakar Janků, stud. VI. tř. r. v Karlíně, úl. 1., 2., 3., 4., 5., 7., 8., 9., 10.
Frant. Nachtikal, stud. VIII. tř. g. v Klatovech, úl. 1., 2., 3., 5., 6., 7., 8., 9., 10.

Lad. Fahoun, stud. VIII. tř. g. v Klatovech, úl. 1., 2., 3., 5., 6.
Josef Poláček, stud. VIII. tř. g. v Kolíně, úl. 1., 3., 5., 6., 7., 8., 10.
Boh. Mikyska, stud. VII. tř. g. v Král. Hradci, úl. 1., 3., 5., 6., 10.
Josef Kincl, stud. VII. tř. r. v Král. Hradci, úl. 1., 2., 3., 5., 6., 9., 10.
Josef Langr, stud. VII. tř. r. v Král. Hradci, úl. 1., 2., 5., 6., 7., 8., 9., 10.
Vinc. Sura, stud. VII. tř. r. v Král. Hradci, úl. 1., 2., 5., 6., 9., 10.
M. Vehle, stud. VII. tř. r. v Král Hradci, úl. 1., 2., 5., 6.
Karel Slavík, stud. VII. tř. g. v Litomyšli, úl. 1., 7.
Ant. Maryánek, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži, úl. 1., 2., 3., 5., 6, 7, 8, 9, 10.
Frant. Očadlík, stud. VIII. tř. g. v Kroměříži, úl. 1., 2., 3., 4., 5., 6., 7., 8., 9., 10.
Václav Vraný, stud. VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi, úl. 1., 5., 6., 7.
Vítězslav Pavlousek, stud. VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi, úl. 1., 5., 6.
Ant. Haas, stud. VIII. tř. g. v Opavě, úl. 1., 2., 3., 5., 6., 7., 8., 9., 10.
Zd. Dvořák, stud. VIII. tř. g. v Opavě, úl. 1., 2., 3., 5., 9., 10.
Jarosl. Doležal, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 1., 2., 3., 5., 6., 7., 8., 9., 10.
Václ. Kmoníček, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 1., 2., 3., 5., 6., 10.
Josef Pithardt, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 1., 2., 3., 5., 6., 7., 8., 9., 10.
Eman. Svoboda, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 1., 2., 3., 5.
Karel Urban, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 1., 10.
Josef Vlasák, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 1., 2., 3., 5.
Josef Volf, stud. V. tř. r. v Pardubicích, úl. 7.
Zd. Schmidt, stud. V. tř. r. v Pardubicích, úl. 7.
Josef Záleský, stud. V. tr. r. v Pardubicích, úl. 7.
Josef Partaj, stud. VI. tř. r. v Písku, úl. 1., 2., 3., 5., 6., 7.
Josef Kučera, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1.
Jan Pospíšil, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 1., 10.
Jarosl. Klika, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 9.
Boh. Lauschmann, stud. VIII. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 1., 3., 5., 6., 10.
Jan Pexider, stud. VIII. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 1., 3., 5., 6., 7., 8., 9., 10.
Ant. Beneš, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 1.
Lad. Baimler, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 5., 10.
Otak. Bureš, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 1., 3., 5., 6., 7., 8.
Václ. Bubeník, stud. VI. tř. r. v Ječné ul. v Praze, úl. 1., 3., 5., 7.

Ludv. Kottík, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 1., 3., 5., 6., 10.
Josef Kamzík, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 1., 3., 5., 6.
Frant. Marek, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 1., 3., 5., 6., 7., 8.
Jarosl. Polák, stud. VI. tř. r. v Ječné ulici v Praze, úl. 3.
Vladimír List, stud. VI. tř. akad. g. v Praze, úl. 7., 8., 9.
Alfred Hořínek, stud. V. tř. g. v Žitné ul. v Praze, úl. 1., 7., 9.
Adolf Sláma, stud. V. tř. g. v Žitné ul. v Praze, úl. 1., 7., 8., 9.
Jarosl. Skála, stud. VII. tř. r. v Prostějově, úl. 1., 2., 3., 4., 5., 7., 8., 9.
Josef Hájíček, učitel v Grygově u Olomouce, úl. 1., 2., 3. 4., 5., 6., 7., 8., 9., 10.
Václav Jelínek, stud. v Praze, úl. 1., 2., 3., 4., 5., 7., 8., 9., 10.
Frant. Moravan na Král. Vinohradech, úl. 1., 2., 3., 5., 6., 7., 8., 9., 10.

Úlohy.

Úloha 28.

Kterou hodnotu musí míti prostý člen p v rovnici

$$x^3 - 9x^2 + 23x + p = 0,$$

aby kořeny její tvořily řadu arithmetickou a které jsou pak tyto kořeny?

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 29.

Čísly racionálnými řešiti rovnici

$$\begin{vmatrix} x & 2 & x \\ 2 & y & 4 \\ x & 4 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & x & 4 \\ x & y & x \\ 4 & x & 2 \end{vmatrix}.$$

Týž.

Úloha 30.

Dvě osoby A a B vydají se současně na cestu týmž směrem z míst od sebe 60 *km* vzdálených. A urazí první den 40 *km* a každý následující den o 3 *km* méně; B pak urazí první den 30 *km* a každý den následující o 2 *km* více. Za kolik dní dohoní B osobu A? Za kolik dní budou od sebe nejvíce vzdáleny, a která jest tato vzdálenost.

Prof. *Jos. Fürst.*

Úloha 31.

Vedeme-li dvěma sousedními vrcholy n úhelníka všechny úhlopříčky, rozdělí se tento na

$$\tfrac{1}{2}(n^2 - n - 4)$$

části (dílem trojúhelníky, dílem čtyrúhelníky). Podati toho důkaz.

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 32.

Sestrojiti trojúhelník ABC, dána-li pata V výšky na AB, průsečík U strany AB s příčkou půlící úhel ACB a střed O kružnice o trojúhelník opsané.

Prof. *V. Jelínek.*

Úloha 33.

V přímce X dány body o, a, b; bodem o veden libovolný paprsek P a k bodu a stanoven dle P souměrně sdružený bod a'. Které jest geometrické místo průsečíku p paprsku P se spojnicí $a'b$?

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 34.

Do pravidelného čtyrstěnu vepsána jest koule a směrem ku všem vrcholům opět a opět vepsány jsou koule tak, že každá tří stěn čtyrstěnu a předešlé koule se dotýká. Budiž určen součet všech koulí, jež takto čtyrstěn vyplňují.

Prof. *Jos. Fürst.*

Úloha 35.

Úhlopříčna rovnoběžnostěnu pravoúhlého $= 5\sqrt{2}$, povrch $= 94$, obsah $= 60$; určiti hrany.

Týž.

Úloha 36.

V kolmém kruhovém kuželi jest zvětšiti poloměr a zmenšiti výšku tak, aby se tím nezměnil ani povrch ani obsah kužele.

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 37.

Rovnice přímek P, Q, R jsou:

$$\begin{aligned} P &\equiv y = 0 \\ Q &\equiv 4y + 3x - 24 = 0 \\ R &\equiv y - 3x - 6 = 0. \end{aligned}$$

Vyhledati jest na přímce P bod m, aby paty kolmic, které jsou z něho spuštěny na přímky Q a R byly na přímce, která jest rovnoběžná s přímkou $S \equiv 7x - 24y = 0$.

Prof. *Václav Hübner.*

Úloha 38.

Dány jsou osy $X \perp Y$, v ose X body a, b a bodem a přímka $T \parallel Y$. Vedeme-li kterýmkoli bodem k osy Y přímku $M \parallel X$ a přeneseme-li na ni délku $km = km' = kl$, kdež l jest průsečík přímky T se spojnicí bk, jest geom. místo bodů m, m' hyperbola. Je-li n průsečík osy Y s přímkou $bn \perp bk$, jest mn tečnou hyperboly v bodě m. Odůvodniti toto sestrojení.

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 39.

Po nakloněné rovině počaly současně se pohybovati dvě koule proti sobě a setkaly se rovnými rychlostmi. Vyšla-li horní koule volně ze klidu, jakou počáteční rychlost měla dolní? Jak dlouho pohybovaly se a jak se mají k sobě jejich dráhy?

Prof. *V. Jelínek.*

Úloha 40.

K místu A blíží se přímým směrem a rychlostí $c_1 = 20\frac{13}{16}\,m$ těleso znějící tonem $\overline{a}$, jehož absolutní výška $N = 435$. Má se dokázati, že posluchač v A stojící slyší ton $\overline{ais}$, je-li relat. výška půltonu $\frac{16}{15}$ a rychlost zvuku ve vzduchu $c = 333\,m$. (Princip Dopplerův.)

Prof. *Jos. Fürst.*