Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Tomeš

I. Konstrukce os ellipsy, znám-li její středobod

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 9 (1880), No. 5, 275--279

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120887

I. Konstrukce os ellipsy, znám-li její středobod.

Podává

Frant. Tomeš, kand. prof. ve Vídni.

Opíšeme-li z daného středobodu ellipsy kruh libovolným poloměrem, nalezneme-li průsečíky čáry kruhové s ellipsou danými částkami náležitě stanovenou, obdržíme rozpolením středových úhlů oněch průsečíků osy ellipsy.

Konstrukci tuto lze přímo provésti, považujeme-li daný kruh co půdorys rotačního k půdorysné rovině neb půdorysně kolmo stojícího válce, jehož obrys jednou tečnou z daných částek ellipsy stanoven jest, ellipsu pak co průsek válce s rovinou; rovina i válec ve zvláštní poloze.

Nalezejž se (obr. 6.) osa rotačního k půdorysně kolmo stojícího válce v rovině nárysné (neb nárysně), rovina elliptického průseku procházejž půdorysnou stopou osy O; její stopy tedy $\overline{mn}$, $\overline{no}$.

Nárysný průmět ellipsy jest úplně stanoven body a'', b'', c'', d'', pak tečnami: A'' v bodu a'', B'' v bodu b''; oba průměty elliptického průseku jsou soustředné a protínají se ve čtyrech symmetricky ležících bodech.

Známo jest, že každá rovina obsahuje přímku, jejíž průměty se kryjí; průmět této přímky lze obdržeti co spojnou na př. bodu

$$n \text{ s bodem } (\xi) \equiv \overline{(a''d'')}\ \overline{(a^1d^1)},$$

tedy
$$X \equiv \overline{[n\,(\xi)]}.$$

Průsekem $(XK^1) \equiv \left\{\begin{matrix} x \\ \xi \end{matrix}\right.$ obdrželi jsme 2 body ellipse i kruhu společné.

Druhé dva nalezneme tímtéž spůsobem, považujeme-li ellipsu co řez roviny m_1no, kde $\sphericalangle m_1nx_2 = mnx_1$. Průmět tohoto elliptického průseku jest totožný s průmětem průseku dřívějšího, a tedy vzhledem k rovině m_1no průmět přímky Y, týchže vlastností jako X, jest spojná bodu

$$n \text{ s bodem } (\eta) \equiv \overline{(a''d'')}\ (a^1d_1{}^1),$$

tedy
$$Y \equiv \overline{[n\,(\eta)]}.$$

Ostatní dva body ellipse i kruhu společné jsou průsečíky $(YK^1) \equiv \begin{cases} y \\ \eta \end{cases}$.

Přímky, rozpolující úhel $\widehat{XY}$, jsou osy ellipsy co do jich polohy; jich délky najdeme z příslušících jim půdorysů a to buď vzhledem k rovině mno neb m_1no.

Na základě těchto úvah provésti lze konstrukci os ellipsy, dán-li:

a) středobod s (obr. 7), tečná A s bodem styku a, pak libovolný bod b, aneb

b) středobod s (obr. 8.), A, a a libovolná tečna B.

Opišme kruhovou čáru K (obr. 7.) z bodu s poloměrem rovným vzdálenosti s od A; pak veďme paprsek $P_b \parallel A$ a určíme $(P_b K) \equiv \begin{cases} b^1{}_1 \\ b_1 \end{cases}$ co půdorysy bodů, jichž společný nárys b jest. Rozpolující přímky úhlu XY, kde

$$X \equiv s_1 \overline{(ab)}\ \overline{(a^1b^1)} \equiv \overline{sx}$$
$$Y \equiv s_1 \overline{(ab)}\ \overline{(a^1b^1{}_1)} \equiv \overline{sy},$$

jsouť hledané osy. Jich délku nalezneme dle pravidla dříve naznačeného.

Sestrojení os v obr. 8. liší se od onoho v obr. 7. jen tím, že k určení přímek X a Y užito tangenty B a této příslušných tangent kruhu B^1 a $B^1{}_1$; B^1 a $B_1{}^1$ jsou opět půdorysy tečen, jichž společný nárys B jest.

Přímky X a Y nalezneme z následujících identit:

$$X \equiv s_1 (BB^1) \equiv \overline{sx}$$
$$Y \equiv s_1 (BB_1{}^1) \equiv \overline{sy}.$$

Mají-li se osy sestrojiti, je-li známo 5 bodů neb 5 tečen, pak se hledá nejprvé pomocí věty Pascalovy neb Brianchonovy tečna v jednom z daných bodů, v případě druhém bod styku jedné z daných tečen.

Pomocí těchže vět středobod.

II. Šestiúhelník, jemuž kuželosečka opsána i vepsána býti může.

Dle věty Désarguesovy protínají protilehlé strany kuželosečce vepsaného čtyřúhelníku libovolnou v rovině této kuželosečky se nalézající přímku v bodech, tvořících involuční řadu. A obdobně: Paprsky od libovolného bodu roviny kuželosečky k vrcholům této kuželosečce opsaného čtyrstranu vedené tvoří involuční svazek. Na základě tom lze provésti úlohy:

a) Dané kuželosečce (obr. 9.) má trojúhelník vepsán býti tak, aby jeho strany danými body *acd* přímé řady *R* procházely.

Sestrojíme čtyrúhelník, jehož tři strany body *acd* procházejí; strana čtvrtá určuje na přímce *R* bod *b*, od něhož pak vedeme-li tečné ku křivce, shledáme, že dva trojúhelníky vyhovují dané úloze. Jsouť to trojúhelníky $t\gamma\delta$ a $t_1\gamma_1\delta_1$.

α) Vždy *dva* trojúhelníky jsou možny, seče-li *R* kuželosečku v bodech imaginarních.

β) *dva* neb *žádný*, seče-li *R* kuželosečku v bodech realních a je-li bod *b zevně* neb *uvnitř* křivky;

γ) *dva* možny, je-li *R* tečnou kuželosečky; v případě tomto přechází jeden z obou trojúhelníků v bod styku tečné *R*.

Obdobně lze řešiti úlohu:

b) Dané kuželosečce má trojstran opsán býti tak, aby jeho vrchole v daných třech paprscích svazku se nalézaly. Nalezneme, že

α) vždy *dva* trojstrany jsou možné, nalézá-li se vrchol svazku paprsků uvnitř křivky;

β) *dva* neb *žádný*, je-li vrchol zevně křivky a seče-li paprsek čtvrtý s danými třemi involuci tvořící křivku v bodech *realních* neb *imaginarních*;

γ) *dva* možny, pakli vrchol svazku na kuželosečce samé se nalézá: v tomto případě přechází jeden z obou trojstranů v tečnou ke kuželosečce ve vrcholu.

Máme-li zřetel ku případům α), lze následující větu vysloviti:

Vrcholy obou trojúhelníků kuželosečce vepsaných, jichž strany danými třemi body přímé řady procházejí, určují šestiúhelník, jemuž se kuželosečka též vepsati nechá.

Budiž pořadí vrcholů (obr. 9.) vepsaného šestiúhelníka $t \gamma \delta t_1 \gamma_1 \delta_1$ a vrcholy protilehlé

$$\begin{matrix} t & t_1 \\ \gamma & \gamma_1 \\ \delta & \delta_1. \end{matrix}$$

Možná dokázati, že spojné vrcholů protilehlých jediným bodem r prochází; pak platí zde obrácená věta Brianchonova:

Protínají-li se spojné vrcholů protilehlých šestiúhelníku v bodu jediném, nechá se šestiúhelníku tomu kuželosečka vepsati. Neb

svazek	paprsků	$\overline{tb}$	jest perspektivný	svazku		$\overline{t_1b}$
"	"	$\overline{tc}$	"	"	"	$\overline{t_1c}$
"	"	$\overline{td}$	"	"	"	$\overline{t_1d}$
"	"	$\overline{t\varrho}$	"	"	"	$\overline{t_1\varrho}$.

Jich průsek přímka R, paprsek společný $\overline{tt_1\varrho}$.

Na přímce r povstane průsekem svazku t přímá řada bodů $\gamma\ \delta\ a$,
" " r_1 " " " t_1 " " " $\gamma_1 \delta_1 a$.

Obě řady jsou perspektivné, musí tedy spojné bodů sobě příslušících v jediném bodě paprsku $\overline{tt_1}$ se protínati. Spojné ty jsou přímky $\overline{tt_1}$, $\overline{\gamma\gamma_1}$, $\overline{\delta\delta_1}$, úhlopříčny neúplného šestiúhelníka $t\gamma\delta t_1\gamma_1\delta_1$. Tím důkaz podán.

Způsobem obdobným možná dokázati větu:

Strany obou kuželosečce opsaných trojstranů, jichž vrcholy na daných třech paprscích svazku se nalézají, určují šestistran, jemuž kuželosečku též opsati možná.

Z obrazce 8. vysvítá, že r jest pólem přímky R a tedy musí dvojpoměry

$$(\delta\, r\, \delta_1\, c) = (t_1\, r\, t\, \varrho) = (\gamma\, r\, \gamma_1\, \varrho) = -1.$$

Z toho plyne věta:

Na úhlopříčnách šestiúhelníku, jemuž kuželosečka opsána i vepsána býti má, tvoří vrchole s bodem Brianchonovým (r) *a s průsekem* (ϱ, c, ϱ) *přímky Pascalové* (R) *řady harmonické.*

Dle této věty lze snadno takový šestiúhelník sestrojiti:

Sestrojíme libovolný čtyřúhelník (obr. 10.) $m\,n\,o\,p$; průsekem úhlopříčen $\overline{mn}$ a $\overline{op}$ t. j. bodem r vedeme libovolnou přímku $\overline{r\varrho_2}$, na této zvolíme x a sestrojíme k bodům r, x, ϱ_2 čtvrtý harmonicky sdružený y,

$$(\varrho_2 x\, r\, y) = (\varrho_1\, o\, r\, p) = (\varrho\, m\, r\, n) = -1.$$

Šestiúhelníku $m\,o\,x\,n\,p\,y$ možná kuželosečku opsati i vepsati.

Body styku stran šestiúhelníka $m\,o\,x\,n\,p\,y$, vzhledem ke kuželosečce vepsané, určují opět šestiúhelník, jemuž se jiná kuželosečka dá vepsati.

A podobně: Tečné v rozích šestiúhelníku $moxnpy$, vzhledem ke kuželosečce opsané, určují šestistran, jemuž se jiná kuželosečka dá vepsati.

O rekurentním vzorci k sestrojování rovnic involučních.

Sděluje

prof. **Em. Weyr** ve Vídni.

Rovnice involuce n-tého stupně zní:

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_0) - y(b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots b_0) = 0, \quad (1)$$

aneb kratčeji:

$$f(x) - y\,\varphi(x) = 0. \qquad (1')$$

Jsou-li x x' dva prvky téže skupině náležející, máme:

$$f(x) - y\,\varphi(x) = 0,$$
$$f(x') - y\,\varphi(x') = 0,$$

z kterýchžto rovnic vyloučením hodnoty y obdržíme

$$f(x)\,\varphi(x') - f(x')\,\varphi(x) = 0$$

co rovnici vyjadřující vztah mezi dvěma prvky téže skupině náležejícími. Rovnice poslední obsahuje patrně činitele $(x - x')$, t. j. nechá se vždy vpraviti do tvaru

$$(x - x')\,\psi(x\,x') = 0,$$

kde $\psi\,(x\,x')$ značí symmetrickou funkci $(n - 1)$-ho stupně.

Rovnice (involuční) vyjadřující vztah dvou téže skupině náležejících prvků jest tudíž

$$\psi\,(x\,x') = 0. \qquad (2')$$

Provedeme-li zde naznačený průběh skutečně, shledáme, že rovnice (2') sestavena jest z členů všeobecného tvaru

$$\begin{vmatrix} a_{n-r} & a_{n-p} \\ b_{n-r} & b_{n-p} \end{vmatrix} x^{n-p}\, x'^{n-p}\, (x^{p-r-1} + x^{p-r-2}\, x'^{p-r-3}\, x'^2 + \ldots x'^{p-r-1})$$

pro $r < p$.