Jan Vojtěch

Úvod do rozboru nejjednodušších křivek užitím differenciálního počtu. [III.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 38 (1909), No. 3, 355--371

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120863`

musíme doznati, že již Wattův parní stroj dosáhl vrcholu svého vývoje a že musil ustoupiti na mnohých místech motorům výbušným. Neméně mocný sok vyvstal parnímu stroji v podobě turbiny parní. A již dovídáme se o prvních pokusech uvésti v činnost turbiny výbušné. I přijde konečně doba, kdy pístový parní stroj nebude již hráti první roli na světovém jevišti. Sic transit gloria mundi. Vynález, jenž způsobil netušený vzrůst průmyslu, jenž sblíživ země způsobil převrat celého světa, jenž podmínil vznik jiných strojů, sám jimi zatlačen bude jednou ze světového jeviště, vykonav své velkolepé poslání.

Prameny nejdůležitější:

L. Marchis. Production et utilisation des gaz pauvres.

H. Güldner. Entwerfen und Berechnen der Verbrennungsmotoren.

L. Marchis. Moteurs à essence.

H. Güldner. Fahrzeugmotoren für flüssige Brennstoffe.

A. Witz. Moteurs à gaz et à pétrole.

L. Mathot. Manuel pratique des moteurs à gaz et pétrole.

Úvod do rozboru nejjednodušších křivek užitím differenciálního počtu.

Dr. **Jan Vojtěch** v Brně.

(Pokračování.)

Pro x veliké, na př. $x = 1000$ dostáváme $y = 1{,}000.000$ a rovnici tečny $\eta = 2000\,\xi - 1000000$, úsek tečny této na ose Y (pro $\xi = 0$) je -10^6, úsek na ose X (pro $\eta = 0$) je $\frac{1}{2} \cdot 10^3$; čím větší zvolíme x, tím více vzroste y bodu na křivce a tím větší jsou úseky tečny na osách. Blíží-li se x hodnotě ∞, blíží se y také hodnotě ∞, úseky tečny vzrůstají do ∞ čili tečna celá leží v nekonečnu, pravíme, že parabola nemá v bodě (∞, ∞) tečnu. Hyperbola má v bodě (x, y) tečnu

$$\eta - y = -\frac{1}{x^2}(\xi - x) \text{ čili } \eta = -\frac{1}{x^2}\xi - \frac{1}{x} + y$$

$$\text{čili } \left(y = \frac{1}{x}\right) \text{ konečně } \eta = -\frac{1}{x^2}\xi.$$

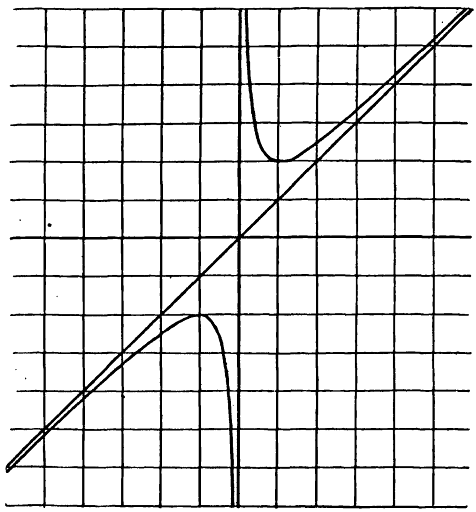
Pro $x = 1000$ jest $y = 0{\cdot}001$ a rovnice tečny

$$\eta = -\,0{\cdot}000001\,.\,\xi,$$

pro $x = 10^6$ jest $y = \frac{1}{10^6}$ a tečna má rovnici

$$\eta = -\,\frac{1}{10^{12}}\,.\,\xi;$$

blíží-li se x hodnotě ∞, blíží se y hodnotě 0, rovnice tečny se blíží tvaru $\eta = 0$, pravíme, že v bodě $(\infty, 0)$ má hyperbola



Obr. 18. $y = x + \frac{1}{x}$.

za tečnu určitou přímku $\eta = 0$, t. j. osu úseček. Taková tečna sluje *asymptota* křivky; je to tedy tečna, jejíž dotykový bod je v nekonečnu, jež však sama není celá v nekonečnu. Lépe dle uvedeného postupu říkáme, že asymptota je určitá přímka, kteé se jako mezní poloze blíží tečna bodu na křivce, když tento bod dotyku se vzdaluje do nekonečna.

Chceme-li vyšetřiti, zdali daná křivka má asymptotu, zkoumáme nejprve, má-li křivka nějaké body v nekonečnu. Potom počítáme, jakému tvaru se blíží rovnice tečny pro nalezené body. Protože rovnice tečny u křivky $y = f(x)$ v bodě (x, y) jest

$$\eta - y = y'(\xi - x) \text{ čili } \eta = y' \,.\, \xi + (y - xy'),$$

hledáme, jakých hodnot nabývají koefficient y a absolutní člen $y - xy'$ pro bod v nekonečnu; protože bod ten leží na křivce, užíváme také rovnice křivky k stanovení hodnot těch. Křivka na př. $y = x + \frac{1}{x}$ (obr. 18.) má tečnu, jejíž směrnice jest

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Pro $x = \infty$ jest $y = \infty$; směrnice y' jest pro tento bod $= 1$,

$$y - xy' = x + \frac{1}{x} - x\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x} = 0,$$

i má křivka v bodě (∞, ∞) asymptotu $\eta = \xi$. Podobně křivka

$$y = \frac{2x + 3}{x - 4}$$

(obr. 19.) má tečnu, jejíž směrnici y' nalezneme dle návodu odst. 17.; platí

$$y(x - 4) - 2x - 3 = 0$$

a po derivování

$$y'(x - 4) + y \,.\, 1 - 2 = 0,$$

odkud

$$y' = \frac{2 - y}{x - 4}.$$

Pro $x = \infty$ jest (z rovnice křivky) $y = \frac{\infty}{\infty}$, tedy neurčitý výraz, jehož hodnotu určíme, dělíme-li napřed v čitateli i jmenovateli veličinou x, i jest

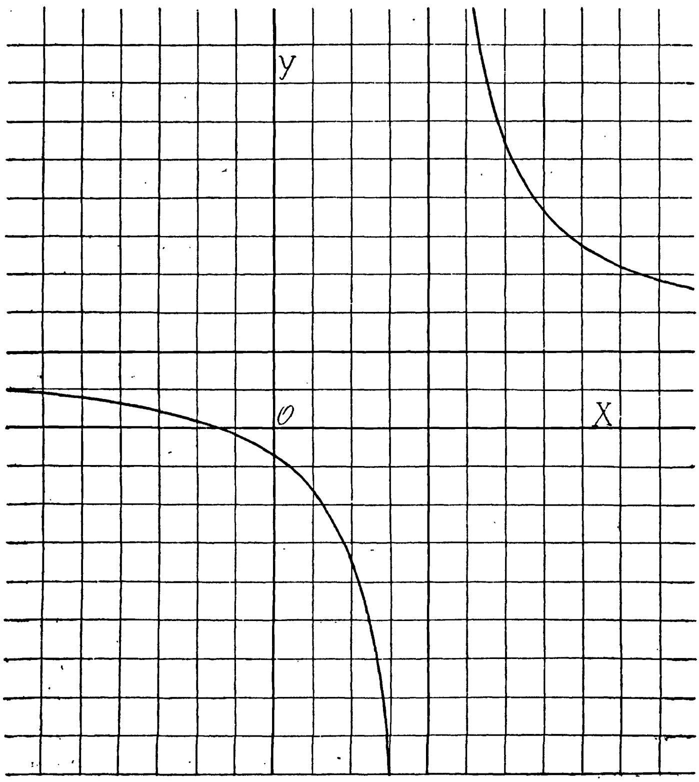
$$y = \frac{2 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{4}{x}} = 2.$$

Pro bod $(\infty, 2)$ jest

$$y' = 0,\ y - xy' = \frac{2x+3}{x-4} - x\,\frac{2-y}{x-4} = \frac{3+xy}{x-4}$$

$$= \frac{\frac{3}{x} + y}{1 - \frac{4}{x}} = 2;$$

rovnice asymptoty v bodě tom jest $\eta = 2$.



Obr. 19. $y = \frac{2x+3}{x-4}$.

Z obr. 18. a 19. vysvítá, že obě křivky mají asi ještě druhou asymptotu, první křivka osu Y, tedy $\xi = 0$, druhá přímku $\xi = 4$. Vskutku má křivka

$$y = x + \frac{1}{x}$$

pro $x = 0$ bod, jehož $y = \infty$, křivka

$$y = \frac{2x + 3}{x - 4}$$

má pro $x = 4$ bod, jehož $y = \infty$, každá má tedy ještě druhý bod v nekonečnu. Asymptoty v bodech těchto tvaru $\xi = c$, existují-li, nenalezneme však z rovnice

$$\eta = y' \,.\, \xi + (y - xy'),$$

poněvadž rovnici přímky $\xi = c$ nelze vyvoditi z tvaru

$$\eta = a\xi + b$$

pro speciální hodnoty konstant a, b; musíme rovnici tečny upraviti na tvar

$$\xi = \frac{1}{y'} \,.\, \eta + \frac{xy' - y}{y'}$$

a potom obdržíme pro bod $(0, \infty)$ u první křivky skutečně

$$\frac{1}{y'} = 0, \quad \frac{xy' - y}{y'} = 0,$$

tedy asymptotu $\xi = 0$; pro bod $(4, \infty)$ druhé křivky podobně

$$\frac{1}{y'} = 0, \quad \frac{xy' - y}{y'} = 4,$$

asymptotu $\xi = 4$.

Můžeme však ještě jiným, často kratším způsobem nalézti asymptoty. Sečna křivky přejde, jak jsme sledovali, v tečnu, přibližší-li se dva její průsečíky s křivkou k sobě tak, že splynou v jediný bod; splynou-li oba body v nekonečnu, stane se sečna asymptotou křivky. Přímka $y = ax + b$ bude tedy asymptotou křivky, bude-li s ní míti společné dva splývající body v nekonečnu. Položme do rovnice křivky za y dvojčlen $ax + b$, na př. do

$$y = x + \frac{1}{x},$$

obdržíme

$$ax + b = x + \frac{1}{x}$$

čili

$$(a - 1)\,x^2 + bx - 1 = 0;$$

hodnoty x z této rovnice určené udávají úsečky bodů společných přímce i křivce. Aby x bylo ∞, musí vymizeti součinitel u nejvyšší mocniny veličiny x v uvedené rovnici; aby dvojí x bylo ∞, musí vymizeti mimo to součinitel u nejblíže nižší mocniny x. V našem případě jest tedy $a - 1 = 0$, $b = 0$ čili $a = 1$, $b = 0$; asymptota má dle toho rovnici $y = x$.

Zbývá dokázati, že jeden kořen rovnice tvaru

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + px + q = 0$$

jest ∞, jestliže součinitel u nejvyšší mocniny $a = 0$. Zvolme případ

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

(k vůli lepšímu přehledu), vytkněme x^4, i bude

$$x^4\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3} + \frac{e}{x^4}\right) = 0;$$

avšak $x = 0$ není kořenem rovnice ($e \neq 0$), i platí

$$a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3} + \frac{e}{x^4} = 0.$$

Je-li pak $a = 0$, jest součet zbývajících členů $= 0$ a tedy

$$\frac{1}{x}\left(b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} + \frac{e}{x^3}\right) = 0,$$

proto

$$\frac{1}{x} = 0 \text{ čili } x = \infty.$$

Stejným postupem dokážeme, že pro $b = 0$ jest i druhý kořen rovnice $= \infty$.

U křivky

$$y = \frac{2x + 3}{x - 4}$$

dostaneme takto

$$(ax + b)(x - 4) = 2x + 3$$

čili

$$ax^2 + (b - 4a - 2)\,x - 4b - 3 = 0,$$

i jest

$$a = 0,\ b - 4a - 2 = 0$$

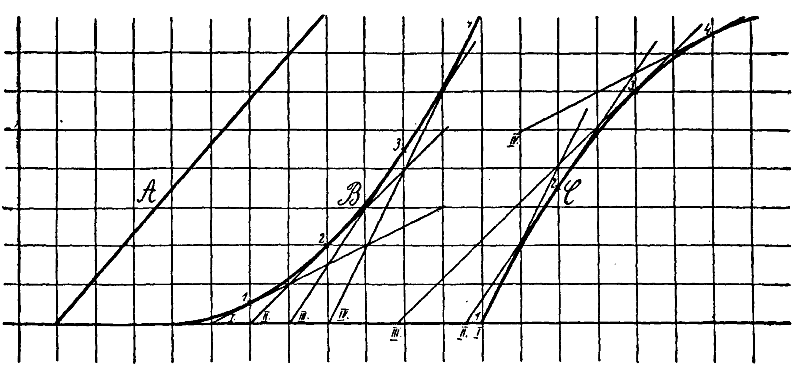
čili $b = 2$, asymptota jako prve má rovnici $y = 2$. Asymptoty, jichž rovnice má tvar $x = c$ nedostaneme takto z $y = ax + b$; zkusme položiti pro ten případ do rovnice křivky $x = c$, i bude u křivky obr. 18.

$$y = c + \frac{1}{c} \text{ čili } cy - c^2 - 1 = 0,$$

tedy $c = 0$ (asymptota $x = 0$) u křivky obr. 19. jest

$$y = \frac{2c + 3}{c - 4} \text{ čili } y\,(c - 4) - 2c - 3 = 0,$$

tedy $c - 4 = 0$, $c = 4$ (asymptota $x = 4$). Rovnice po substituci v obou případech jest 1. stupně, její stupeň jest tedy z původního druhého už snížený, takže stačí položiti rovným nulle součinitel u nejvyšší (jedné) mocniny y. —



Obr. 20. *A* stoupá rovnoměrně, *B* jest vypuklá, *C* dutá.

19. Vyšetřili jsme, že křivka stoupá v bodech, pro jejichž souřadnice platí $\frac{dy}{dx} > 0$. Všimněme si však, že toto stoupání jest různé v případech na př. *A* na obr. 10., *A* na obr. 12. (pro kladná x), *B* na obr. 12. (pro záporná x), totiž v případech *A*, *B*, *C* na obr. 20. V případě prvním říkáme, že křivka stoupá

(funkce roste) rovnoměrně, pro stejně veliké přírůstky úsečky jsou zde stejně veliké přírůstky pořadnice y. V případě B jest proti tomu viděti, že pořadnice přibývá rychleji než úsečky, v třetím pomaleji; můžeme říci, že pořadnice tu roste zrychleně, resp. zpožděně.

To je v souhlasu s výrazem pro směrnici tečny; v případě přímky (A) je směrnice konstantní, u křivky však je to zase funkce proměnné x. Dejme tomu, že oblouky předvedené (B, C) patří parabolám (obr. 12.); směrnice tečny je zde $2ax+b$, což je lineární funkce argumentu x, jejíž hodnota stoupá s rostoucím x, je-li a kladné, klesá s rostoucí úsečkou při a záporném. Mění se stoupání tečny, sledujeme-li tečny křivky v bodech s rostoucím x, a to v prvním případě (B) se stoupání tečen zvětšuje, v druhém (C) se zmenšuje. Pravíme, že křivka B je zdola vypuklá, C vydutá.

Pro důkladnější posouzení stoupání křivky a vůbec jejího průběhu jest tedy potřeba podrobiti směrnici tečny čili $\frac{dy}{dx}$ stejnému rozboru, jaký jsme provedli u funkce $y=f(x)$ samé. Musíme vyšetřiti, roste-li tato směrnice čili derivace dané funkce s rostoucím x nebo zdali klesá, po případě přechází od stoupání ke klesání nebo naopak. K tomu cíli nutno tedy utvořiti derivaci této derivace nebo geometricky: vyšetřiti směrnici tečny ke křivce, jež byla by grafickým znázorněním průběhu směrnice dané křivky jako funkce proměnné x.

Označíme-li derivaci y', v bodě (x_1, y_1) tedy y'_1, dostaneme differenční poměr této derivace jako funkce argumentu x ve tvaru

$$\frac{y'_2-y'_1}{x_2-x_1}=\frac{\Delta y'_1}{\Delta x_1}$$

a poměr differenciální $\frac{dy'_1}{dx_1}$, v libovolném bodě (x, y) pak

$$\frac{dy'}{dx}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx},$$

což píšeme

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y''$$

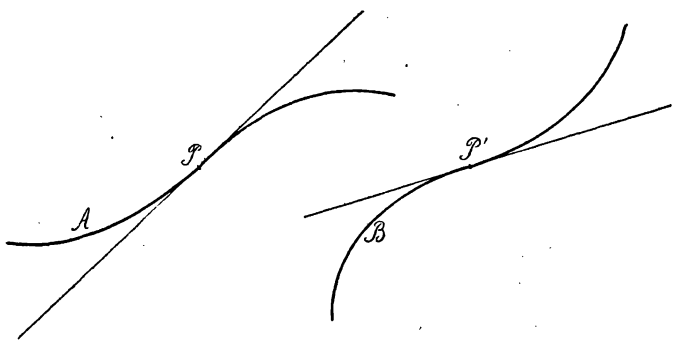
a nazýváme *druhou derivací* původní funkce y.

Můžeme teď určiti podmínky, aby křivka měla tvar B nebo C (obr. 20.). Předem je záhodno výslovně uvésti, kdy pravíme, že křivka je (zdola sledována) vypuklá (B) a kdy dutá (C). Křivka je *dutá* (konkávní) zdola v okolí bodu P, jestliže na obou stranách bodu toho ve vzdálenostech dosti malých leží křivka pod tečnou v bodě P; křivka je *vypuklá* (konvexní) zdola v okolí P, leží-li v okolí tom nad tečnou tohoto bodu. Jak patrno, točí se tečna u křivky duté při rostoucí úsečce směrem záporným, úhel tečny s kladným směrem osy X se zmenšuje, směrnice tečny klesá, derivace směrnice je záporná čili $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$; u křivky vypuklé naopak tečna při rostoucím x točí se směrem kladným, úhel tečny s osou $+X$ se zvětšuje, směrnice tečny roste, derivace směrnice je kladná čili $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$. Pravíme odtud, že křivka dutá C má zakřivení negativní, křivka vypuklá B positivní.

Dosud měli jsme na mysli křivky stoupající; pravidlo nalezené zůstává beze změny v platnosti i pro křivky klesající, stejně jeho odvození. U zmíněných na počátku křivek $y = x^2$ (obr. 12. A), $y = -x^2$ (obr. 12. B) je směrnice $2x$ resp. $-2x$ a její derivace $\frac{d^2y}{dx^2}$ jest 2 resp. -2, tedy kladná u prvé, záporná u druhé křivky; vskutku také křivka $y = x^2$ je vypuklá, $y = -x^2$ dutá zdola.

Při hořejší úvaze a pravidle nezáleží na poloze křivky vzhledem k osám; někdy však se mluví o tom, zda je křivka vypuklou nebo dutou vzhledem k ose X (od osy X sledována); a tu je jasno, že křivka ležící nad osou X a dutá k ní, stane se k ose té vypuklou, jakmile ji pošineme pod osu X a naopak. Sluje totiž křivka vypuklou, resp. dutou vzhledem k přímce (jiné křivce) v okolí daného bodu svého, jestliže tečna v bodě tom leží, resp. neleží mezi křivkou uvažovanou a přímkou (jinou křivkou), ovšem jen pro dosti malou vzdálenost na každé straně od bodu dotykového. Máme-li na mysli osu X, jest snadno doplniti hořejší pravidlo o znaménku druhé derivace; je-li křivka nad osou X, platí pravidlo i vzhledem k ose X (osa X je dole), přejde-li vyšetřovaná část křivky pošinutím pod osu X, změní se ovšem dutost ve vypuklost a naopak — vzhledem k ose X; ale současně změní se kladné znaménko pořadnice bodu, v jehož okolí křivku pozorujeme, v záporné, a proto změní se znaménko součinu $y \frac{d^2y}{dx^2}$. I jest tedy křivka v okolí bodu (x_1, y_1) konvexní nebo konkávní vzhledem k ose X, dle toho, je-li součin $y_1 \frac{d^2y_1}{dx_1^2}$ positivní nebo negativní.

20. Zbývá všimnouti si případu, kdy $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

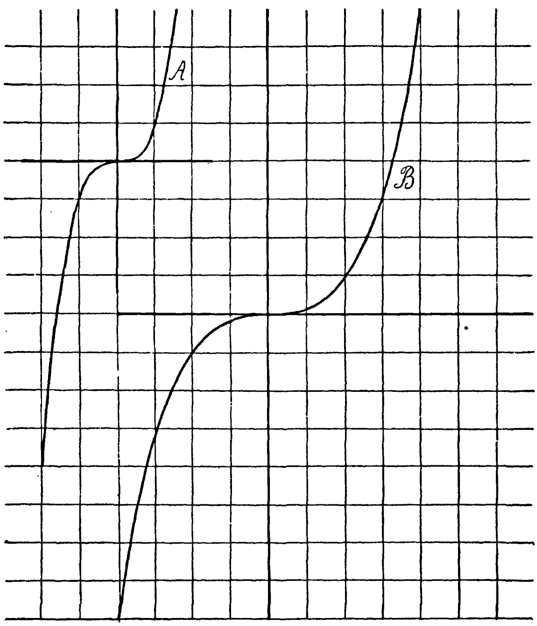


Obr. 21. Bod inflekční (u křivek stoupajících).

Vraťme se k představě, že při zakřivení positivním (negativním) tečna křivky s rostoucí úsečkou bodů dotyčných stáčí se směrem kladným (záporným). V případech zobrazených na obr. 21. stáčí se u A tečna nejprve směrem kladným, potom záporným, u B naopak. Existuje zde bod (P, resp. P'), v němž se smysl tohoto otáčení tečny mění; takový bod sluje *inflekční* (bod obratu). Jak viděti, protíná tečna v bodě obratu křivku, body sousední s bodem inflekčním leží na různých stranách tečny té.

Jaký je početní ekvivalent pro existenci bodu inflekčního? V případě A je křivka s počátku vypuklá, $\frac{dy}{dx}$ roste, potom dutá, $\frac{dy}{dx}$ klesá, jest tedy $\frac{dy}{dx}$ v bodě inflekčním maximinální; u křivky B derivace příslušné funkce napřed klesá, potom roste, jest tedy v bodě inflekčním minimální. V obou případech jest derivace této funkce $\frac{dy}{dx}$ nullovou čili $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

Příkladem budiž uvedena křivka $y = x^3$ (obr. 22. A) a $y = \frac{1}{8}x^3$ (obr. 22. B). Pro x záporné (kladné) jest y záporné



Obr. 22. $A: y = x^3$; $B: y = \frac{1}{8}x^3$.

(kladné), křivka leží v III. a I. kvadrantu; derivace $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ resp. $\frac{3}{8}x^2$, jest pro x kladné i záporné kladná, křivka stále stoupá. Druhá derivace $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$, resp. $\frac{6}{8}x$, jest pro záporné (kladné) x záporná (kladná), křivka je v III. čtvrti dutá, v I. vypuklá; v počátku mění se označení druhé derivace, $y'' = 0$, křivka má v (0, 0) bod inflekční.

Avšak uveďme si teď, kdy seznali jsme význam případu $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, na pamět případ $\frac{dy}{dx} = 0$. V odst. 12. a 15. jsme došli k tomu, že pro bod, v němž křivka má vrchol, platí $\frac{dy}{dx} = 0$; jest naopak bod křivky, pro nějž platí $\frac{dy}{dx} = 0$, vždy vrcholem křivky? Příklad uvedený ukazuje právě, že nikoli; neboť pro křivku $y = x^3$ jest $y' = 3x^2$ a tedy v bodě (0, 0) jest $y' = 0$, ač křivka (obr. 22.) nemá žádný vrchol. Příčina je na snadě: křivka stále stoupá, nemění se znaménko u y' v bodě (0, 0). Sledujeme-li body křivky stoupající (klesající) s rostoucí úsečkou až k místu, v němž $\frac{dy}{dx} = 0$, tečna tedy rovnoběžná s osou X, může odtud sice křivka klesati (stoupati) [vrchol horní nebo dolní], může však zajisté dále stoupati (klesati) s opačným zakřivením [případ u $y = x^3$], bod onen je potom inflekčním s tečnou || s osou X a platí také $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

Jest nyní tedy na místě doplniti dřívější rozbor o vrcholech křivky. Vrchol křivky nazveme patrně horním, jestliže je v něm křivka zdola dutá, dolním tehdy, je-li v něm křivka zdola vypuklá; jinak řečeno: křivka má *vrchol* v bodě (x_1, y_1), jestliže $\frac{dy_1}{dx_1} = 0$ a $\frac{d^2y_1}{dx_1^2} \neq 0$, ten jest *horní*, jestliže $\frac{d^2y_1}{dx_1^2} < 0$, *dolní* v případě $\frac{d^2y_1}{dx_1^2} > 0$; je-li však též $\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = 0$, má křivka v (x_1, y_1) bod inflekční s tečnou || s osou X.

Podobně je platnost vztahu $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ nutnou sice, ne však dostatečnou podmínkou pro existenci bodu inflekčního; ukazuje se to příkladem na křivce $y = x^4$. Zde jest $\frac{dy}{dx} = 4x^3, \frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2$, ale křivka nemá pro $x = 0$ bod inflekční, ač $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ v tom případě; prostě proto, že $\frac{d^2y}{dx^2}$ nemění v $x = 0$, $y = 0$ svého znaménka (pro $x = -1$ jest $y'' = 12.(-1)^2 = +12$, pro $x = +1$ jest $y'' = +12$). Abychom okolnost tu lépe objasnili, vezměme na pomoc grafické znázornění průběhu druhé derivace u funkce $y = x^4$; znázornění této funkce $y'' = 12x^2$, bereme-li x za úsečku, y'' za pořadnici, jest parabola polohy C (A) z obr. 12. Jak viděti, nemění pořadnice pro $x = 0$ svého znaménka, je tam dolní vrchol hodnot y'', směrnice tečny má hodnotu $= 0$. Početně tedy derivace funkce y'' je rovna nulle, t. j.

$$\frac{d\,(12x^2)}{dx} = 24x = 0 \quad \text{pro } x = 0.$$

Křivka $y = x^4$ má v bodě (0, 0) vrchol, který můžeme nazvati vyšším vrcholem $\left(\text{proti obyčejnému při } \frac{dy}{dx} = 0,\ \frac{d^2y}{dx^2} \neq 0\right)$.

Druhou derivaci, jejíž geometrický význam byl vyložen, utvoříme z první derivace tak, jako jsme tuto určovali z dané funkce. Platí pravidla odst. 16. a 17.

21. První derivace funkce $y = f(x)$ značí rychlost, jakou probíhají změny rovnicí tou vyjádřené. Má druhá derivace také význam toho druhu?

V odst. 8. bylo vyloženo, že pohyb rovnoměrný a vůbec každá změna rovnoměrně se dějící je znázorněna přímkou, jejíž směrnice udává rychlost změny. Prohlédněme si nyní obr. 8., kde znázorněno je, jak přibývá dráhy s rostoucí dobou při volném pádu; křivka ta je vyjádřena rovnicí $y = \frac{g}{2} x^2$. Směrnice křivky, t. j. derivace funkce uvedené, $y' = gx$, t. j. rychlost pohybu se mění, mění-li se x; průběh této změny znázorňuje přímka $y' = gx$ (jejíž pořadnice značí jednotlivé rychlosti y'). Odtud vidíme, že rychlost se mění rovnoměrně (přímka) a to stoupá (g kladné). Směrnice přímky té, t. j. derivace funkce gx, t. j. rychlost změny rychlosti jest g; rychlost změny rychlosti nazýváme zrychlením, pročež derivace derivace čili *druhá derivace funkce značí zrychlení*, s jakým se funkce mění. V našem případě volného pádu jest gx (čili gt) známá koncová rychlost po x (t) vteřinách, g známé zrychlení zemské tíže.

Vrhneme-li těleso svisně vzhůru rychlostí c, jest dráha jím vykonaná za x sekund $y = cx - \frac{g}{2} x^2$; odtud rychlost za

x sekund $y' = c \,.\, 1 - 2 \,\frac{g}{2} \,.\, x = c - gx$, konečně zrychlení $y'' = 0 - g \,.\, 1 = - g$. Záporné zrychlení nazýváme také zpozděním. Kdežto křivka volného pádu (obr. 8.) je vypuklá ($y'' = g$ kladné), je křivka znázorňující pohyb při vrhu vzhůru dutá (y'' záporné).

Znázorníme-li si, jak se mění objem těles geometricky podobných (podobných hranolů, koulí,...) s jedním rozměrem jich (hranou podstavy, poloměrem), dostaneme křivku $y = ax^3$, tedy tvaru obr. 22. (pro kladná x). Rychlost změny jest $y' = 3ax^2$, tedy roste způsobem v obr. 12. podaným, zrychlení jest $y'' = 6ax$, roste rovnoměrně.

Křivka $y = \frac{1}{x}$ (obr. 15.) znázorňuje pro kladná x, jak se mění napjetí plynu s měnícím se objemem; $y' = -\frac{1}{x^2}$, rychlost změny je záporná, ubývá tedy napjetí s rostoucím objemem;

$$y'' = -\left(-\frac{2}{x^3}\right) = + \frac{2}{x^3}$$

(dle 16. c), zrychlení této změny je kladné, záporné rychlosti přibývá, absolutně tedy klesá, t. j. čím dále tím méně ubývá napjetí; toto zrychlení je proměnlivé.

22. Pozorujme znova parabolu na př. na obr. 12. A; už zběžný pohled poučuje, že je křivka v počátku nejvíce zakřivena, sledujeme-li pak její body s rostoucí úsečkou, že jest čím dále tím méně křivá. Podobně u hyperboly obr. 15. jest zakřivení v různých bodech různé. Vzniká otázka, jak posoudíme přesněji tuto okolnost u grafického znázornění a jaký potom jest početní ekvivalent toho fakta.

Stoupání křivky v určitém bodě posuzovali jsme a udávali stoupáním tečny, přímky totiž, jež v bodě tom ke křivce přiléhá; přímka ta a křivka mají tam touž hodnotu derivace $\frac{dy}{dx}$. Není snad možno podobně posouditi zakřivení jakékoli křivky dané zakřivením jednoduché nějaké křivky? Hodila by se k tomu kružnice svou pravidelností, majíc ve všech svých částech patrně stejné zakřivení; podobně je přímka jakožto křivka konstantního stoupání vhodná pro posouzení stoupání křivky. Kružnice dosti přiléhající ke křivce v jednotlivých bodech jejích má, jak patrno, poloměr tím větší, čím menší má křivka zakřivení; byla by tedy zvratná hodnota poloměru toho vhodnou měrou zakřivení. Kdežto stoupání křivky posuzujeme na přímce přiléhající a udáváme početně první derivací, zkusíme posuzovati zakřivení na kružnici přiléhající a udávati zvratnou hodnotou jejího poloměru; neboť druhá derivace nestačí udati zakřivení, jsouc na př. u paraboly $y = x^2$ ve všech bodech stejná $y' = 2$, ač zakřivení křivky se mění.

Musí ovšem taková kružnice, svědčící o zakřivení dané křivky v určitém bodě, přiléhati v tomto bodě ke křivce do té míry, aby předně bodem tím procházela, potom aby v něm měla tutéž tečnu $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ jako křivka, a konečně — podmínka nová a tím podstatná — aby se stoupání její v nejbližším okolí bodu toho měnilo stejně rychle jako u křivky dané, t. j. aby derivace směrnice tečny čili $\frac{d^2y}{dx^2}$ byly u kružnice té i křivky sobě rovny v uvažovaném bodě. To jsou tři nezávislé podmínky.

Je potřeba nyní nalézti rovnici kružnice, totiž početní vyjádření závislosti úsečky a pořadnice u bodů křivky té. Zvolíme-li nejprve střed kružnice v počátku, platí, že každý bod její (obr. 23. *A*) má od počátku stejnou vzdálenost (= poloměru kružnice); čili z pravoúhlého trojúhelníka *OLR* $x^2 + y^2 = r^2$. Pošineme-li střed kružnice o délku a směrem osy X, o délku b směrem osy Y, pošine se tím každý bod kružnice o tytéž délky; i bude úsečka každého bodu o a větší, pořadnice o b větší; aby platil hořejší vztah, musíme zvětšené x i y o a, resp. b zmenšiti, t. j. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ je rovnice kružnice, jejíž střed má souřadnice (a, b) čili obecná rovnice kruhu. Ostatně tuto rovnici můžeme vyčísti přímo z obr. 23. *B*.

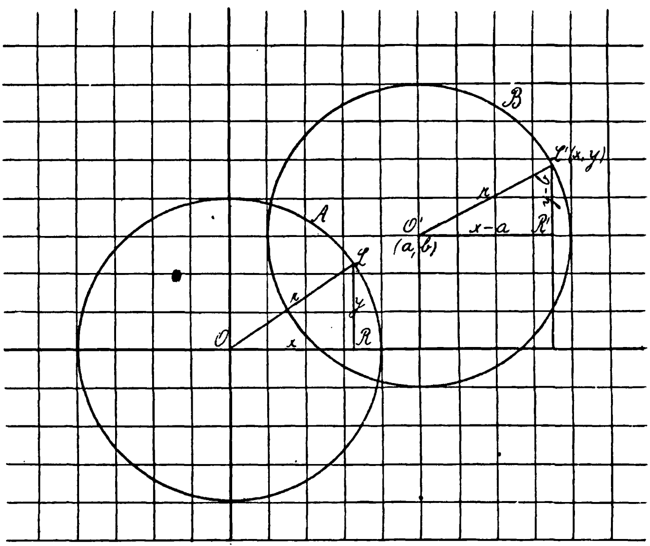
Jak vidíme, má obecná rovnice kruhu tři veličiny stálé (a, b, r), může tedy vyhověti právě třem podmínkám nezávislým, dříve stanoveným. Podobně přímka, jejíž rovnice $y = ax + b$ má dvě konstanty obecné, stala se jako tečna v bodě křivky určitou, vyhověvši dvěma podmínkám, procházejíc totiž bodem příslušným a majíc totéž $\frac{dy}{dx}$ jako křivka v bodě tom.

Přihlédněme blíže, zdali tomu vskutku tak, které jsou totiž souřadnice středu a poloměr kruhu, jenž by svědčil o zakřivení dané křivky. Jestliže nazveme souřadnice bodu na kružnici (ξ, η), jest obecná rovnice její

$$(1)\quad (\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 = r^2,$$

kde (a, b) jsou souřadnice středu, r poloměr. Rovnice uvažované křivky budiž

$$(2)\quad y = f(x)$$



Obr. 23. $A: x^2 + y^2 = r^2$, $B: (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ $(x^2 + y^2) = 16$, $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 16)$.

a bod na ní, který vyšetřujeme, (x_1, y_1). Dle uvedených podmínek musí kruh procházeti tímto bodem, musí tedy platiti

$$\text{I.}: (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2;$$

za druhé musí stoupání kruhu býti rovno stoupání křivky v tomto bodě $(= y'_1 = f'(x_1))$; stoupání kružnice nalezneme jako derivaci nerozvinuté funkce $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$, i jest

$$2(x - a) + 2(y - b) \cdot y' = 0,$$

odtud

$$y' = -\frac{x-a}{y-b},$$

v bodě (x_1, y_1)

$$y'_1 = -\frac{x_1-a}{y_1-b}.$$

Podmínka pak zní

$$\text{II.:}\ -\frac{x_1-a}{y_1-b} = f'(x_1).$$

(Pokračování.)

Mosaika.

Příroda, mladí přátelé, klade někdy našim meteorologům otázky, které je uvádějí do nemalých rozpaků, jako by chtěla jim říci: vidíte, jak dosud málo víte! A to si musí nechati říci i mistři této vědy — což pro žáky její bývá jakýmsi zadostučiněním. Taková otázka byla položena úkazem, který jsem sám měl náhodou příležitost pozorovati. Bylo to večer dne 30. června minulého roku. Na den 26. a 27. června byl jsem pozván do Vídně k poradám, kteréž se v ministerstvu kultu a vyučování konaly o organisaci nových typů středoškolských. Zdržel jsem se pak ještě v neděli 28. a na svátek v pondělí 29. června ve Vídni a vrátil jsem se do Prahy v úterý 30. odpoledním rychlíkem dráhy Františka Josefa. Slunce toho dne zapadalo $8^h 3^m$; v tu dobu náš vlak již vyjel z Tábora a byl blízký Voticům. Rád se při takové jízdě dívám z okna v tu stranu, kde slunce zapadlo, a se zálibou pozoruji, jak se soumrak ponenáhlu rozkládá nad krajinou. Pozorování bylo tentokráte usnadněno tím, že vlak náš jel převahou směrem k severu, tak že z okna na levo bylo viděti k západu; teprve před Prahou se obrací dráha na severozápad. Obloha v tu stranu, kde slunce zapadlo, byla jasná a jevila se v záři soumrakové, která ve větších výškách byla zelenavá, při zemi pak červenavá. Rozloha záře byla však neobyčejně veliká, a což mne podivením naplňovalo, úkaz postupem doby nikterak neslábl, jevil se i v pozdních již