Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Bedřich Pospíšil

Sur un problème des M. M. S. Bernstein et A. Kolmogoroff

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 65 (1936), No. 2, 64--76

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120840

Sur un problème de M. M. S. Bernstein et A. Kolmogoroff.

R. N. C. **Bedřich Pospíšil,** Brno.

(Reçu le 8 Octobre 1935.)

Introduction.

Ce problème[1]) consiste à trouver une solution Φ de l'équation (Ch) telle que

$$\Phi \geqq 0, \ \Phi(<s, t> \mid x, R) = 1. \tag{0}$$

Je montre l'existence d'une et *d'une seule* solution de l'équation (Ch) qui satisfasse aux conditions (c) et (d) et je déduis les conditions nécéssaires et suffisantes (pour A) pourque les relations (0) soient vérifiées.

Note: La solution d'un problème voisin est le but d'un travail de M. Hostinský.[2]) R étant un intervalle, cet auteur cherche à trouver une solution Φ' de l'équation (s, t réels; $x, y \in R$)

$$\Phi'(<s, t> \mid x, y) = \int_R \Phi'(<s, u> \mid x, z) \,\mathrm{d}z \,\Phi'(<u, t> \mid z, y) \tag{Ch'}$$

sous la condition

$$\lim_{t \to s} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi' (<s, t > \mid x, y) = A'(s \mid x, y) \text{ pour } x \neq y. \tag{c'}$$

Le point $x = y$ jouit toujours d'un rôle exceptionnel (par exemple, la dernière condition ne dit rien sur la dérivée de $\Phi'(<s, t> \mid x, x)$ par rapport à t). Par conséquent, on ne peut plus démontrer l'existence d'une seule solution Φ'. Au contraire, M. Hostinský trouve une solution Φ' qui dépend d'une fonction auxiliaire j qui peut être choisie de plusieurs manières différentes. Si $A' \geqq 0$, un choix plus spécial de j permet de satisfaire aux conditions

$$\Phi' \geqq 0, \int_R \Phi'(<s, t> \mid x, y) \,\mathrm{d}y = 1. \tag{0'}$$

---

[1]) A. Kolmogoroff: Math. Annalen, 1931, Bd. 104, p. 415—458. — S. Bernstein: Zentralblatt für Mathematik, 1931, Bd. I, p. 149.

[2]) B. Hostinský: Sur une équation fonctionnelle (Publications de la Faculté des Sciences de l'université Masaryk, 1932, 156).

Néanmoins, on peut toujours trouver plusieurs fonctions j — alors de même *plusieurs fonctions* Φ' — telles que toutes les conditions données plus haut (les conditions (0') inclusivement) restent valables.

Les résultats de la théorie de la mesure que je suppose connus peuvent être appris dans la „Théorie de l'intégrale" de M. Saks (Monografje matematyczne II, Warszawa 1933) dont les passages seront cités entre parenthèses.

* * *

Soit R un espace donné quelconque.

Définition: 1. Les éléments d'une famille additive (p. 247, § 2) fixe dans l'espace R seront dites mesurables.

2. Une fonction $f(x)$ $(x \in R)$ réelle (c. à d. à valeurs réelles) sera dite mesurable (en x) lorsque pour tout c réell l'ensemble des x pour lesquels $f(x) > c$ est mesurable.

3. La fonction $F(X)$ $(X \subset R$ mesurable) étant complètement additive, $F(X)^+$ $(F(X)^-)$ est par définition la valeur absolue de sa variation supérieure (inférieure) (p. 248).

Toutes les intégrales seront prises au sens de Lebesgue (p. 247 et les suivantes).[3])

Lemme 1: *Les fonctions* $F_\nu(X)$ $(X \subset R$ *mesurable) étant complètement additives, la fonction* $F(X) = \sum_\nu F_\nu(X)$ *l'est également, supposé que les deux séries* $\sum_\nu F_\nu(X)^+$ *et* $\sum_\nu F_\nu(X)^-$ *soient convergentes pour tout* X *mesurable.*

Démonstration:

$$
\begin{aligned}
F(\sum_\mu X_\mu) &= \sum_\nu F_\nu(\sum_\mu X_\mu) = \sum_\nu \sum_\mu F_\nu(X_\mu) = \\
&= \sum_\nu\sum_\mu F_\nu(X_\mu)^+ - \sum_\nu\sum_\mu F_\nu(X_\mu)^- = \\
&= \sum_\mu\sum_\nu F_\nu(X_\mu)^+ - \sum_\nu\sum_\mu F_\nu(X_\mu)^- = \\
&= \sum_\mu\sum_\nu F_\nu(X_\mu) = \sum_\mu F(X_\mu), \text{ c. q. f. d.}
\end{aligned}
$$

Lemme 2: *Les fonctions* $F_\nu(X)$ (X *mesurable) soient complètement additives; si* $\sum F_\nu(X)$ *converge uniformément vers* $F(X)$, *on a*

[3]) Soit $\mu(X)$ une fonction complètement additive de $X \subset R$ mesurable, je pose

$$\int_X f(x)\, \mu(\mathrm{d}X) = (\mu) \int_X f(x)\, \mathrm{d}x,$$

si $\mu(X)$ ne prend que les valeurs non négatives; plus généralement, si $\mu(X)$ n'est soumise qu'à la condition d'être réelle, je définis

$$\int_X f(x)\, \mu(\mathrm{d}X) = \int_X f(x)\, \mu(\mathrm{d}X)^+ - \int_X f(x)\, \mu(\mathrm{d}X)^-.$$

$$\int\limits_X^{\nu} F(\mathrm{d}X)\, f(x) = \sum_{\nu}\int\limits_X F_\nu(\mathrm{d}X)\, f(x)$$

pour toute fonction mesurable bornée $f(x)$.

Démonstration: Si la série considérée n'a qu'un nombre fini de termes, la formule à démontrer est évidente. Dans le cas général, on a

$$\int\limits_X F(\mathrm{d}X)\, f(x) - \sum_{\nu=1}^{n}\int\limits_X F_\nu(\mathrm{d}X)\, f(x) = \int\limits_X \sum_{\nu=n+1}^{\infty} F_\nu(\mathrm{d}X)\, f(x).$$

La fonction $f(x)$ peut être écrite sous la forme de différence de deux fonctions mesurables bornées $\geqq 0$; on en tire que la dernière expression peut être majorisée par la suivante arbitrairement petite (si $n \to \infty$):

$$\int\limits_A \Big| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} F_\nu(\mathrm{d}X) \Big|\, | f(x) | + \int\limits_{X-A} \Big| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} F_\nu(\mathrm{d}X) \Big|\, | f(x) |,$$

A étant un ensemble mesurable tel que

$$\Big\{ \sum_{\nu=n+1}^{\infty} F_\nu(A) \Big\}^{+} = 0 = \Big\{ \sum_{\nu=n+1}^{\infty} F_\nu(R - A) \Big\}^{-} \text{(p. 249, th. 1).}$$

Lemme 3: *Les fonctions* $F(X)$, $G(z, X)$ ($z \in R$, X *mesurable*) *soient complètement additives; les fonctions* $G(z, X)$, $H(z)$ *soient bornées et mesurables; pour tout couple d'ensembles mesurables* X *et* Y, *on a*

$$\int\limits_X [\int\limits_Y F(\mathrm{d}Y)\, G(y, \mathrm{d}X)]\, H(x) = \int\limits_Y F(\mathrm{d}Y) \int\limits_X G(y, \mathrm{d}X)\, H(x).$$

Démonstration: La fonction $F(X)$ peut être supposée $\geqq 0$ [p. 249, (3. 2)]. Soit $\{H_\nu(x)\}$ une suite de fonctions élémentaires uniformément convergente vers $H(x)$ (p. 251, §4). L'intégrale à gauche est égale à

$$\lim \int\limits_X [\int\limits_Y F(\mathrm{d}Y)\, G(y, \mathrm{d}X)]\, H_\nu(x) = \lim \int\limits_Y F(\mathrm{d}Y)\, G_\nu(y)$$

avec

$$G_\nu(y) = \int\limits_X G(y, \mathrm{d}X)\, H_\nu(x);$$

Pour $f(x)$ mesurable posons

$$f(x)_+ = f(x) \text{ pour } f(x) \geqq 0,\quad f(x)_+ = 0 \text{ pour } f(x) < 0,$$
$$f(x)_- = f(x)_+ - f(x).$$

Pour chaque $\varepsilon > 0$, on a

$$\left| \int_X G(y, dX)\, H(x) - G_\nu(y) \right| \leqq \sum_{\varkappa, \lambda = +, -} \int_X G(y, dX)^\varkappa\, [H(x) - H_\nu(x)]_\lambda < \varepsilon,$$

ν étant si grand que

$$| H(x) - H_\nu(x) | < \frac{\varepsilon}{4\gamma}\ [\gamma = \text{borne sup.}\ G(y, X)].$$

La suite $\{G_\nu(y)\}$ étant alors uniformément convergente, on en tire la thèse du lemme [p. 254, (7. 1)].

Définitions: 4. $\mathfrak{R}$ sera l'ensemble des nombres réels.

5. Une fonction réelle $f(t \mid x)$ $(t \in \mathfrak{R},\ x \in R)$ est dite *mesurable en* $(t \mid x)$, lorsque pour tout c réel l'ensemble des $(t \mid x)$, pour lesquels $f(t \mid x) > c$, appartient à la plus petite famille borelienne[4]) qui contient tous les ensembles du type $L \times M$, L étant un sous-ensemble de $\mathfrak{R}$ mesurable au sens de Lebesgue, M étant un sous-ensemble mesurable de R.

6. Nous désignons par (N) l'ensemble de tous les points de l'espace $\mathfrak{R}^N$ aux coordonnées $t_1, t_2, \ldots, t_N$ tels que $t_1 < t_2 < \ldots < t_N$.

7. Pour une fonction $A(t \mid x, Y)$ $(t \in \mathfrak{R},\ x \in R,\ Y \subset R$ mesurable) réelle, bornée et mesurable en $(t \mid x)$ posons

$$A(U \mid x, Y)_1 = \int_U A(u \mid x, Y)\, du$$

(U mesurable au sens de Lebesgue, $U \subset \mathfrak{R}$). Cette fonction est mesurable en x (p. 262, th. 6).

8. Nous posons

$$A(U_1 \times U_2 \times U_3 \times \ldots \times U_N \mid x, Y)_N =$$
$$= \int_R A(U_1 \mid x, dZ)_1\, A(U_2 \times U_3 \times \ldots \times U_N \mid z, Y)_{N-1}$$

Cette fonction est mesurable en x (on le voit par induction en se servant du lemme 3) et complètement additive en Y (car A est borné, alors $\lim \int A = \int \lim A$), supposé que $A(t \mid x, Y)$ le soit.

9. La condition $(UV = 0,\ U \subset \mathfrak{R}^N \supset V)$

$$A(U + V \mid x, Y)_N = A(U \mid x, Y)_N + A(V \mid x, Y)_N$$

permet d'étendre la définition de $A(W \mid x, Y)_N$ sur les ensembles W étant somme d'un nombre fini d'ensembles disjoints du type $U_1 \times \ldots \times U_N$ ($U_k \subset \mathfrak{R}$ mesurable); cette extension est univoque.

10. Pour tout $U \subset \mathfrak{R}^N$ mesurable, nous désignons par $|U|$ la mesure lebesguienne de U.

Supposons que l'on ait

$$| A(U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n \mid x, Y)_n | \leqq \tfrac{1}{4}\,(4\alpha)^n\, | U_1 \times \ldots \times U_n | \quad \textbf{(f)}$$

pour $n = 1, 2, \ldots, N$; on en tire

---

[4]) c. à d. additive (p. 247, § 2).

$$\begin{aligned} | A(U_0 \times U_1 \times \ldots \times U_n \mid x, Y)_{n+1} | &= \\ = | \int_R A(U_0 \mid x, \mathrm{d}Z)_1 A(U_1 \times \ldots \times U_n \mid z, Y)_n | & \\ \leqq \sum_{\varkappa, \lambda = +, -} \int_R A(U_0 \mid x, \mathrm{d}Z)_1^{\varkappa} A(U_1 \times \ldots \times U_n \mid z, Y)_{n\lambda} & \\ \leqq 4 \cdot \tfrac{1}{4} (4\alpha) \mid U_0 \mid \cdot \tfrac{1}{4} (4\alpha)^n \mid U_1 \times \ldots \times U_n \mid &= \\ = \tfrac{1}{4} (4\alpha)^{n+1} \mid U_0 \times U_1 \times \ldots \times U_n \mid & \end{aligned}$$

[p. 261, (11, 3)]. Alors, si $| A(t \mid x, Y) | \leqq \alpha$, on a démontré la formule (f) pour $n = 1, 2, \ldots$

Plus généralement, on peut écrire

$$| A(W \mid x, Y)_N | \leqq \tfrac{1}{4} (4\alpha)^N \mid W \mid .$$

Soit $\{W_\mu\}$ une suite d'ensembles $W_\mu \subset \mathfrak{R}^N$ tels que $A(W_\mu)_N$ est déjà defini (j'omets x et Y); soit $U \subset \mathfrak{R}^N$ tel que

$$| U + W_\mu - U W_\mu | \to 0 \quad (\mu \to \infty);$$

on en tire que $| W_\mu + W_\nu - W_\mu W_\nu |$ est aussi petit que l'on veut pour μ et ν assez grands, car

$$W_\mu + W_\nu - W_\mu W_\nu \subset (U + W_\mu - U W_\mu) + (U + W_\nu - U W_\nu).$$

On a de plus

$$\begin{aligned} | A(W_\mu)_N - A(W_\nu)_N | = | A(W_\mu - W_\mu W_\nu)_N - A(W_\nu - W_\mu W_\nu)_N | & \\ \leqq \tfrac{1}{4} (4\alpha)^N \mid W_\mu + W_\nu - W_\mu W_\nu \mid ; & \end{aligned}$$

la suite $\{A(W_\mu \mid x, Y)_N\}$ est alors convergente. $\{W'_\mu\}$ étant une autre suite d'ensembles $W'_\mu \subset \mathfrak{R}^N$ tels que $A(W'_\mu)_N$ est déjà défini et

$$| U + W'_\mu - U W'_\mu | \to 0 \quad (\mu \to \infty);$$

les deux suites $\{W_\mu\}$ et $\{W'_\mu\}$ peuvent être réunies en une autre - désignons - la par $\{V_\mu\}$ — telle que

$$| U + V_\mu - U V_\mu | \to 0 \quad (\mu \to \infty);$$

il suit de là l'existence de la limite de $A(V_\mu \mid x, Y)_N$; on en tire que la limite de $A(W_\mu \mid x, Y)_N$ ne dépend pas du choix spécial de la suite $\{W_\mu\}$.

Définitions: 11. Soit $\{W_\mu\}$ une suite d'ensembles $W_\mu \subset \mathfrak{R}^N$ tels que $A(W_\mu \mid x, Y)_N$ est déjà défini; soit $U \subset \mathfrak{R}^N$ tel que

$$| U + W_\mu - U W_\mu | \to 0 \quad (\mu \to \infty);$$

alors, on pose

$$A(U \mid x, Y)_N = \lim_{\mu \to \infty} A(W_\mu \mid x, Y)_N.$$

12. Soit ($x \in R$, $Y \subset R$ mesurable)

$$E(x, Y) = \begin{cases} 1 \text{ pour } x \in Y. \\ 0 \text{ pour } x \in R - Y. \end{cases}$$

13. Posons ($U \subset \mathfrak{R}$ mesurable)

$$K_U\, A(u \mid x, Y)\, \mathrm{d}u = E(x, Y) + \sum_{N=1}^{\infty} A(U^N \,.\, (N) \mid x, Y)_N.$$

Les ensembles du type $U^N \,.\, (N)$ appartiennent à la famille de tels ensembles W pour lesquels $A(W \mid x, Y)_N$ a été défini. La série qui définit K_U est convergente étant majorisée par la suivante:

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(4\alpha \mid U \mid)^N}{4N!},$$

car on a

$$\mid A(W \mid x, Y)_N \mid \leqq \tfrac{1}{4}\, (4\alpha)^N \mid W \mid$$

pour tout W, pour lequel $A(W \mid x, Y)_N$ est défini, et $\mid U^N \,.\, (N) \mid =$ $= \mid U \mid^N : N!$

14. Deux ensembles U et $V \subset \mathfrak{R}$ mesurables sont dits *presque, égaux,* si $\mid U + V - UV \mid = 0$; on l'écrit $U \doteq V$.

15. Deux ensembles U et $V \subset \mathfrak{R}$ mesurables sont dits *presque disjoints,* si $\mid UV \mid = 0$.

16. Dans ce qui suit, les ensembles sur la droite $\mathfrak{R}$ seront pris positivement orientés; les sommes $\underset{\nu}{\Sigma^*} V_\nu$ resp. $U * V$ ne seront que les sommes $\underset{\nu}{\Sigma} V_\nu (\subset \mathfrak{R})$ resp. $U + V (\subset \mathfrak{R})$, mais, elles ne seront définies que si tous les points de $V_\mu - V_\nu$ suivent ceux de $V_\nu - V_\mu$ pour $\mu > \nu$, resp. si tous les points de $V - U$ suivent ceux de $U - V$.

Lemme 4: *L'expression* $K_U\, A(u \mid x, Y)\, \mathrm{d}u$ *est mesurable en* x, *complètement additive en* Y *et l'on a*

$$K_{U*V}\, A(u \mid x, Y)\, \mathrm{d}u = \int_R \{K_U\, A(u \mid x, \mathrm{d}Z)\, \mathrm{d}u\} \,.\, \{K_V\, A(v \mid z, Y)\, \mathrm{d}v\}$$

pour tout couple d'ensembles U *et* $V \subset \mathfrak{R}$ *mesurables presque disjoints.*

Démonstration: Quant à la mesurabilité et l'additivité complète, voir (p. 39, th. 19) et le lemme 1. Dans la relation à démontrer, écrivons-y $K_U\, A(u \mid x, \mathrm{d}Z)$ sous la forme de la série infinie; suivant le lemme 2, on peut intégrer terme à terme. Dans chaque membre de la série ainsi obtenue, substituons l'expression $K_V\, A(v \mid z, Y)\, \mathrm{d}v$ par la série qui la définit. On peut de même l'intégrer terme à terme à cause de sa convergence uniforme par rapport à z [p. 254, (7, 1)]; la série double ainsi acquise est majorisée par une série double étant produit de deux séries exponentielles à termes positifs. Elle est alors absolument convergente. En appliquant le lemme 3, on obtient

$$\int_R A(S \mid x, \mathrm{d}Z)_m\, A(T \mid z, Y)_n = A(S \times T \mid x, Y)_{m+n}$$

pour $S = U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_m (U_k \subset \mathfrak{R})$; la dernière formule s'étend immédiatement au cas général. En vertu de la convergence absolue de notre série double, on peut réunir les termes avec $S = U^m \,.\, (m)$, $T = V^n \,.\, (n)$, pour $m + n$ fixe ce qui donne — à l'aide de la dernière formule — le résultat désiré, car

$$\sum_{m+n=N} U^m \,.\, (m) \times V^n \,.\, (n) \doteq (U * V)^N \,.\, (N), \quad UV \doteq 0$$

(voir Hostinský, l. c. p. 9).

Définition: 16. Pour une suite $\{V_n\}$ croissante (décroissante) d'ensembles posons $\lim\limits_n V_n = \sum\limits_n V_n (\prod\limits_n V_n)$.

Lemme 5: *Pour toute suite monotone d'ensembles mesurables* $\subset \mathfrak{R}$, *on a*

$$K_{\lim\limits_n V_n} = \lim_n K_{V_n}.$$

Démonstration: Posons $V = \lim V_n$; on a $|V_n| \to |V|$, d'où il suit l'existence d'un indice m (pour chaque $\varepsilon > 0$) tel que

$$|\, e^{4\alpha\,|V|} - e^{4\alpha\,|V_n|} \,| < 4\varepsilon \quad (n > m);$$

soit

$$(n, N) = \begin{cases} (V^N - V_n^N) \,.\, (N), & \text{si } \{V_n\} \text{ croît} \\ (V_n^N - V^N) \,.\, (N), & \text{si } \{V_n\} \text{ décroît.} \end{cases}$$

On a (je supprime x et Y)

$$|\, K_V A - K_{V_n} A \,| = \left| \sum_{N=1}^{\infty} A[(n, N)]_N \right| \leqq$$

$$\sum_{N=1}^{\infty} |\,(n, N)\,| \,.\, \tfrac{1}{4} (4\alpha)^N = \left| \tfrac{1}{4} \sum_{N=1}^{\infty} (4\alpha)^N \left\{ \frac{|V|^N}{N!} - \frac{|V_n|^N}{N!} \right\} \right|$$

$$= \tfrac{1}{4} \,|\, e^{4\alpha\,|V|} - e^{4\alpha\,|V_n|} \,| < \varepsilon, \text{ c. q. f. d.}$$

Définition: 17. Posons encore

$$A(t_0 + 0,\ t_1 + 0, \ldots, t_N + 0 \mid x, Y)$$
$$= \int_R A(t_0 + 0 \mid x, dZ)\, A(t_1 + 0, \ldots, t_N + 0 \mid z, Y);$$

les fonctions $A(t + h_\nu \mid x, Y)$ $(0 < h_\nu \to 0)$ étant mesurables en $(t \mid x)$, leur limite $A(t + 0 \mid x, Y)$ l'est de même; il en est de même de la fonction $A(t + 0, t_1 + 0, \ldots, t_N + 0 \mid x, Y)$ (lemme 3). On a de plus

$$|\, A(t_1 + 0, t_2 + 0, \ldots, t_N + 0 \mid x, Y) \,| \leqq \tfrac{1}{4} (4\alpha)^N$$

ce qui se voit sans peine par induction.

Désignons par $\frac{d^+}{dt} f(t)$ (t réel) la dérivée droite de la fonction $f(t)$.

Théorème: *La fonction* $A(t \mid x, Y)$ $(t \in \Re,\ x \in R,\ Y \subset R$ *mesurable) réelle et bornée soit mesurable en* $(t \mid x)$, *complètement additive en* Y *et telle que* $A(t + 0 \mid x, Y)$ *existe.*

Il existe une et une seule fonction $\Phi(U \mid x, Y)$ $(U \subset \Re$ *mesurable,* $x \in R$, $Y \subset R$ *mesurable), bornée si* $|U| \leqq H$ *(*H *arbitraire), mesurable en* x, *complètement additive en* Y *et telle que* $\Phi(\langle s, t\rangle \mid x, Y)$ *est absolument continu en* t, *ayant partout la dérivée* $\frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}t}\Phi(\langle s, t\rangle \mid x, Y)$ *bornée si* $t - s < H$ $(t > s)$ *et de plus*

$$\Phi(U * V \mid x, Y) = \int_R \Phi(U \mid x, \mathrm{d}Z)\, \Phi(V \mid z, Y) \text{ pour } UV = 0, \quad \text{(a)}$$

$$\Phi(U_\nu \mid x, Y) \to \Phi(U \mid x, Y) \text{ pour } \{U_\nu\} \text{ monotone, } U \doteq \lim U_\nu \quad \text{(b)}$$

$$\left\{\frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}t}\Phi(\langle s, t\rangle \mid x, Y)\right\}_{t=s} = A(s + 0 \mid x, Y), \quad \text{(c)}$$

$$\Phi(0 \mid x, Y) = E(x, Y). \quad \text{(d)}$$

Corollaire:

$$\Phi(U \mid x, Y) = K_U\, A(u \mid x, Y)\, \mathrm{d}u;$$

$\{V_n\}$ *étant alors une suite monotone d'ensembles mesurables* $\subset \Re$, *on a*

$$\Phi(\lim V_n \mid x, Y) = \lim \Phi(V_n \mid x, Y).$$

Spécialement, $\{U_\nu\}$ *étant une suite d'ensemble mesurables presque disjoints, on a* $\Phi\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}{}^{*} U_\nu \mid x, Y\right) =$

$$= \lim_{N\to\infty} \underbrace{\int_R \cdots \int_R}_{N-1} \Phi(U_1 \mid x, \mathrm{d}Z_1)\, \Phi(U_2 \mid z_1, \mathrm{d}Z_2) \ldots \Phi(U_N \mid z_{N-1}, Y).$$

Démonstration: I. Supposons qu'une fonction $\Phi(U \mid x, Y)$ satisfasse à nos conditions; il est à démontrer qu'elle est ainsi parfaitement déterminée.

En effet, on a

$$\text{(Ch)}\quad \Phi(\langle s, t\rangle \mid x, Y) = \int_R \Phi(\langle s, u\rangle \mid x, \mathrm{d}Z)\, \Phi(\langle u, t\rangle \mid z, Y).$$

La dérivée $\frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}t}\Phi(\langle u, t\rangle \mid x, Y)$ étant bornée, il en est de même de

$$h^{-1}\{\Phi(\langle u, t + h\rangle \mid x, Y) - \Phi(\langle u, t\rangle \mid x, Y)\}\left(= \int_t^{t+h} \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}t}\Phi(\langle u, t\rangle \mid x, Y)\, h^{-1}\right),$$

pour $0 < h < 1$ en vertu du I[er] théorème de la moyenne (p. 86).

On en tire que l'on peut — pour évaluer $\frac{d^+}{dt}\Phi(<s, t> \mid x, Y)$ — dériver sous le signe d'intégration dans l'équation (Ch) de Chapman, l'intégrale de la limite d'une suite uniformément bornée de fonctions mesurables étant égale à la limite de l'intégrale du terme de notre suite [p. 39, th. 16; p. 43, th. 24; p. 254, (7. 1)]. Dans l'équation ainsi obtenue, mettons-y $u = t$; on obtient ainsi

$$\frac{d^+}{dt}\Phi(<s, t> \mid x, Y) = \int_R \Phi(<s, t> \mid x, dZ)\, A(t + 0 \mid z, Y).$$

Supposons qu'il y ait deux fonctions telles que notre $\Phi(<s, t> \mid x, Y)$; pour leur différence $\Delta(<s, t> \mid x, Y)$, on a $\Delta(<s, s> \mid x, Y) = 0$ [voir (b) et (d)]. La dernière relation pour Φ reste valable si l'on y met Δ au lieu de Φ. On obtient par intégration

$$\Delta(<s, t> \mid x, Y) = \int_s^t du \int_R \Delta\,(<s, u> \mid x, dZ)\, A(u + 0 \mid z, Y).$$

Supposons alors pour procéder par induction que

$$\Delta(< s, t > \mid x, Y) =$$
$$= \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} dt_2 \int_s^{t_2} \ldots \int_s^{t_{N-1}} dt_N \int_R \Delta(< s, t_N >) \mid x, dZ)\, A(\tau_N + 0 \mid z, Y)$$

avec $\tau_N = (t_N, t_{N-1}, \ldots, t_1)$; on en tire que (j'omets Y)

$$\Delta(< s, t > \mid x, Y) =$$
$$= \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} \ldots \int_s^{t_{N-1}} dt_N \int_R \Big\{\int_s^{t_N} dt_{N+1} \int_R \Delta(<s, t_{N+1}> \mid x, dW)\,.$$
$$.\, A(t_{N+1} + 0 \mid w, dZ)\Big\}\, A(\tau_N + 0 \mid z, Y) =$$
$$= \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} \ldots \int_s^{t_{N-1}} dt_N \int_s^{t_N} dt_{N+1} \int_R \Delta(< s, t_{N+1}> \mid x, dZ)\, A(\tau_{N+1} + 0) \mid z, Y),$$

d'après le lemme 3. M étant la borne supérieure de $|\Delta(<s,u> \mid x, Z)|$ pour $s \leq u \leq t$, la dernière expression (où l'on écrit N au lieu de $N + 1$) est au plus égale en valeur absolue à

$$\frac{M\,.\,(4\alpha)^N\,(t - s)^N}{N!}$$

ce qui tend vers zéro, si $N \to \infty$; alors, la fonction $\Phi(<s,t> \mid x, Y)$ est identiquement nulle; il n'en existe alors qu'un seul $\Phi(<s,t> \mid x, Y)$; d'autre part, on verra (II) que c'est $K_{<s,t>}\, A(u \mid x, Y)\, du$ qui satisfait à nos conditions pour Φ, ce qui implique que

$$\Phi(<s, t> \mid x, Y) = K_{<s,t>}\, A(u \mid x, Y)\, du.$$

Tout U ouvert (borné) est une somme d'un nombre dénombrable d'intervalles ouverts; on peut alors écrire

$$U = \lim U_\nu, \quad U_\nu \subset U_{\nu+1},$$

tout U_ν étant une somme d'une nombre fini d'intervalles disjoints; d'après (a) et la dernière formule, on a alors

$$\Phi(U_\nu \mid x, Y) = K_{U_\nu} A(u \mid x, Y)\, \mathrm{d}u.$$

Pour $\nu \to \infty$, on en obtient — en se servant du lemme 5 et de la condition (b) — la relation

$$\Phi(U \mid x, Y) = K_U\, A(u \mid x, Y)\, \mathrm{d}u$$

pour tout U ouvert.

D'après (b), la dernière formule est valable pour tout U étant un G_δ et de même (p. 31, th. 11c) pour tout U mesurable (lemme 5).

II. Cela étant posons alors

$$\Phi(U \mid x, Y) = K_U\, A(u \mid x, Y)\, \mathrm{d}u.$$

Pour $h > 0$, on a

$$\frac{1}{h}\{\Phi(< s, s+h > \mid x, Y) - \Phi(< s, s > \mid x, Y)\}$$

$$= \frac{1}{h}\int_s^{s+h} A(s \mid x, Y)\, \mathrm{d}s + \frac{1}{h}\sum_{N=2}^{\infty} A(< s, s+h >^N . (N) \mid x, Y)_N.$$

Pour $h \to 0$, le premier terme converge vers $A(s+0 \mid x, Y)$, tandis que le second devient nul étant au plus égal en valeur absolue à $(4h)^{-1}$ $(\exp 4\alpha h - 1 - 4\alpha h)$, d'où l'on tire (c).

Soit

$$h > 0, \exp 4\alpha h - 1 < 8\alpha h, \;\; h_k > 0, \;\; h_1 + h_2 + \ldots + h_n < h.$$

La borne supérieure de $|\,\Phi(< s, t > \mid x, Y)\,|$ pour s et t dans un intervalle J assez long étant désignée par $\varphi(< \infty)$, les relations $(t_k \in J)$

$$\sum_{k=1}^{n} |\,\Phi(< s, t_k + h_k > \mid x, Y) - \Phi(< s, t_k > \mid x, Y)\,|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left| \int_R \Phi(< s, t_k > \mid x, \mathrm{d}Z)\,\{\Phi(< t_k, t_k + h_k > \mid z, Y) - \right.$$

$$\left. - \Phi(< t_k, t_k > \mid z, Y)\} \right|$$

$$\leqq 4\varphi \,.\, 4^{-1} \sum_{k=1}^{n} (\exp\, 4\alpha h_k - 1) < 8\varphi\alpha h$$

démontrent la continuité absolue de $\Phi(< s, t > \mid x, Y)$ en fonction de t.

Pour $h > 0$, on a de même

$$\frac{1}{h}\{\Phi(< s, t+h > \mid x, Y) - \Phi(< s, t > \mid x, Y)\}$$

$$= \int_R \Phi(< s, t > \mid x, \mathrm{d}Z) \cdot \frac{1}{h}\{\Phi(< t; t+h > \mid z, Y) -$$

$$- \Phi(< t, t > \mid z, Y)\}.$$

L'expression à intégrer étant bornée pour $0 < h < 1$, les opérateurs $\lim\limits_{h \to 0}$ et $\int\limits_R$ sont commutables, d'où l'on a

$$\frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}t} \Phi(< s, t > \mid x, Y) = \int_R \Phi(< s, t > \mid x, \mathrm{d}Z)\, A(t+0 \mid z, Y);$$

cette expression est au plus égale en valeur absolue à

$$4\alpha \exp 4\alpha \mid J \mid \quad (< s, t > \subset J),$$

donc elle est bornée.

En tenant compte des lemmes précédents, on voit alors que la fonction Φ possède les propriétés énoncées au théorème.

Supposons que tout sous-ensemble de R ne contenant qu'un seul point soit mesurable.

Théorème:

Prémisse: *La fonction* $A(t \mid x, Y)$ ($t \in \mathfrak{R}$, $x \in R$, $Y \subset R$ *mesurable*) *est bornée, mesurable en* $(t \mid x)$, *complètement additive en* Y *et l'on a*

$$A(t \mid x, R) = 0,$$
$$A(t \mid x, Y) \geqq 0 \text{ pour } x \in R - Y.$$

Thèse: *On a*

$$K_U\, A(u \mid x, R)\, \mathrm{d}u = 1,$$
$$K_U\, A(u \mid x, Y)\, \mathrm{d}u \geqq 0.$$

Démonstration: La première relation de la thèse est évidente; d'après la démonstration du théorème précédent, la seconde n'est à démontrer que si $U = < s, t >$.

Pour $x \in Y$ (et $t > s$) on a

$$E(x, Y) - \int_s^t A(t \mid x, Y)\, \mathrm{d}t > 1 - \alpha(t - s)$$

ce qui est positif pour $t - s < \alpha^{-1}$.

Pour $x \epsilon R - Y$, on a $(t > s)$

$$E(x, Y) = 0, \int_s^t A(t \mid x, Y)\, \mathrm{d}t \geqq 0.$$

Pour $t - s < \alpha^{-1}$, l'expression

$$h(s, t \mid x, Y) = E(x, Y) + \int_s^t A(t \mid x, Y)\, \mathrm{d}t$$

n'est pas négative.

D'autre part, on verra que

$$K_{< s, t >} A(u \mid x, Y)\, \mathrm{d}u$$

$$= \lim_{N \to 0} \int_R h(s, t_1 \mid x, \mathrm{d}Z_1) \int_R h(t_1, t_2 \mid z_1, \mathrm{d}Z_2) \ldots h(t_N, t \mid z_N, Y)$$

avec

$$t_\nu = s + \frac{t - s}{N + 1}\nu,\ N = 2^n - 1\ (n = 1, 2, \ldots).$$

D'après ce qui précède, l'expression sous le signe *lim* n'est pas négative lorsque

$$N > \alpha(t - s),$$

d'où l'inégalité désirée pour U étant un intervalle, alors pour tout $U \subset \mathfrak{R}$ mesurable c. q. f. d.

Reste à vérifier la dernière formule pour K. Pour cela, posons

$$\Theta_N = \sum_{k=1}^{N} T_N^{(k)},$$

$T_N^{(k)}$ étant defini comme il suit:

Pour N fixe, l'ensemble $< s, t >$ est divisé en $N + 1$ intervalles qui n'empiètent pas l'un sur l'autre et sont de la même longueur. Ceci donne la division de $< s, t >^k$ en $(N + 1)^k$ cubes à k dimensions du même volume n'empiétant pas l'un sur l'autre; ceux d'eux qui appartiennent presque entiers à (k) forment l'ensemble $T_N^{(k)}$.

La fonction $A(F \mid x, Y)_N$ de figure $F \subset \mathfrak{R}^N$ (p. 5, §5) est additive et absolument continue (p. 11); on a alors (p. 61)

$$A(F \mid x, Y)_N = \int_F a(t \mid x, Y)\, \mathrm{d}t$$

et de plus

$$A\,[U^N . (N) \mid x, Y]_N = \int_{U^N . (N)} a(t \mid x, Y)\, \mathrm{d}t$$

pour $U = < s, t >$.

Soit $\mathsf{P} = \Sigma\, \mathfrak{R}^N (N = 1, 2, \ldots)$ les termes de la série étant pris disjoints; pour $T \subset \mathfrak{R}^N$, la mesure de T dans P soit égale à celle dans $\mathfrak{R}^N$ (prise au sens de Lebesgue); soit $a(t \mid x, Y)$ défini pour $t \in \mathsf{P}$ comme auparavant (on a $t \in \mathfrak{R}^N$ pour un N).

La suite $\{\Theta_N\}$ est croissante et sa limite est presque égale à $\Theta = \Sigma\, U^N . (N)$ $(N = 1, 2, \ldots)$. Pour chaque N fixe, l'expression sous le signe *lim* dans la relation à démontrer est égale à

$$E(x, Y) + \int_{\Theta_N} a(t \mid x, Y)\, dt,$$

ce qui tend (pour $N \to \infty$) vers

$$E(x, Y) + \int_{\Theta} a(t \mid x, Y)\, dt,$$

ce qui n'est que $K_U\, A(u \mid x, Y)\, dt$, c. q. f. d.

Si l'on reprend la démonstration du premier théorème, on voit que

$$K_U\, A(u + 0 \mid x, Y)\, du = K_U\, A(u \mid x, Y)\, du$$

ce qui donne le

Corollaire: *La fonction $A(t \mid x, Y)$ $(t \in \mathfrak{R},\ x \in R,\ Y \subset R$ mesurable), réelle et bornée étant mesurable en $(t \mid x)$, complètement additive en Y et telle que $A(t + 0 \mid x, Y)$ existe, les conditions*

$$A(t + 0 \mid x, R) = 0,$$
$$A(t + 0 \mid x, Y) \geqq 0 \quad pour \quad x \in R - Y$$

sont nécessaires et suffisantes pour que

$$K_U\, A(u \mid x, R)\, du = 1,$$
$$K_U\, A(u \mid x, Y)\, du \geqq 0.$$

*

O jistém problému S. Bernsteina a A. Kolmogorova.

(Obsah předchozího článku.)

Jest řešit rovnici (Ch) tak, aby platily vztahy (O).[1]) Ukazuji, že existuje právě jedno řešení rovnice (Ch) s podmínkami (c) a (d), a nalézám nutné a dostatečné podmínky (pro A), aby platilo (O) (viz poslední korolár).