Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Emanuel Klier

Sférické a hyperbolické pentagramma mirificum

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 67 (1938), No. Suppl., D173--D177

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120817

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYSIKY

ČLÁNKY A REFERÁTY.

Sférické a hyperbolické pentagramma mirificum.

Em. Klier, Plzeň.

V článku „Gaussovo pentagramma mirificum" uveřejněném v 62. ročníku (1933) 4. a 5. čís. tohoto časopisu pokusil jsem se o nalezení společného základu pravidla Neperova a Neper-Engelova. V ročníku 64 (1935), č. 6 a 8 snažil se p. řed. Vavřinec a p. prof. Friedrich odůvodniti pro středoškolské vyučování pravidlo Neperovo. Důkaz a zobecnění téhož pravidla podal jsem v článku „Důkaz a zobecnění pravidla Neperova" v 66. ročníku (1936), seš. 1. V následujících řádcích objasním poměr Gaussova pentagrammatu k hyperbolickému a vyslovím pravidlo společné oběma geometriím. Tím doplním jednak svoje články a jednak Liebmannovu práci o témže tématě: „Das Pentagramma mirificum und die nichteuklidischen Parallelen" z roku 1912 (Sitzungsberichte der königlichen Bayerischen Akademie der Wissenschaften).

Gaussovo pentagramma. a) Prvá a druhá cosinová věta sférické geometrie dávají pro pravoúhlý trojúhelník vztah, z něhož vyjdeme

$$\cos c_k = \cos a_k \cos b_k = \operatorname{cotg} \alpha_k \operatorname{cotg} \beta_k. \tag{1}$$

Z daného trojúhelníka, který označme jako k-tý, odvodíme další, položíme-li

$$c_{k\pm1} = \frac{1}{2}\pi - \begin{cases} a_k \\ b_k \end{cases}, \quad c_{k\pm2} = \begin{cases} \alpha_k \\ \beta_k \end{cases}, \quad \alpha_k = \beta_{k-1}. \tag{2}$$

Prvá relace ve tvaru $c_{k+1} + a_k = \frac{1}{2}\pi$, $c_k + b_{k+1} = \frac{1}{2}\pi$ praví, že dva přidružené trojúhelníky doplňují svoji přeponu s odvěsnou druhého na $\frac{1}{2}\pi$, t. j. na výšku kulového oktantu, takže třetí relace je toho důsledkem, jakož i druhá.[1])

Třetí relace s druhou dává

$$c_{k\pm5} = c_k \quad \alpha_{k\pm5} = \alpha_k \quad \beta_{k\pm5} = \beta_k$$

a podle první relace

$$a_{k\pm5} = a_k \quad b_{k\pm5} = b_k.$$

[1]) Viz obr. 1 na str. D 15 v 1. seš. ročn. 66 tohoto časopisu.

Je tedy možno odvodit z k-tého trojúhelníku čtyři další a pátý je shodný s původním. Tento cyklus je známé Gaussovo pentagramma mirificum.

Pomocí rovnic (2) přepišme (1) na tvar

$$\cos c_k = \sin c_{k+1} \sin c_{k-1} = \operatorname{cotg} c_{k+2} \operatorname{cotg} c_{k-2} \tag{3}$$

což je známé cyklické pravidlo Neperovo v poněkud pozměněné formě, k němuž (2) popisuje příslušné pětiúhelníkové schema.

b) Kdybychom očíslovali trojúhelníky v pořadí podle úhlopříček pětiúhelníka, nahradili bychom $k \pm 2$ za $k \pm 1$ a $k \mp 1$ za $k \pm 2$. Tím bychom nahradili (2) relacemi:

$$c_{k\pm 1} = \begin{cases} \alpha_k \\ \beta_k \end{cases}, \quad c_{k\pm 2} = \frac{1}{2}\pi - \begin{cases} b_k \\ a_k \end{cases}, \quad a_k = b_{k+1}. \tag{4}$$

Trojúhelníky jsou přiřazeny podle stejných odvěsen (3. relace), kdežto v prvém případě byly seřazeny podle stejných úhlů.

Z rovnice (3) dostáváme Neperovo pravidlo v obvyklé formě

$$\cos c_k = \sin c_{k-2} \sin c_{k+2} = \operatorname{cotg} c_{k+1} \operatorname{cotg} c_{k-1}$$

a k němu pětiúhelníkové schema (4) shoduje se s pořadem prvků tak, jak se v trojúhelníku vyskytují.

Z uvedeného je zřejmo, že Gaussovo pentagramma, které se uvádívá[2]) nepříluší k pětiúhelníkovému schematu a Neperovu pravidlu obvykle užívanému.

Hyperbolické pentagramma. Hyperbolická geometrie označuje se někdy jako imaginární. Zdůrazněme však, že je reálná; vždyť není vyloučeno, že je náš prostor hyperbolický. Toliko model, na němž studujeme hyp. geom. je koule o imaginárním poloměru.

Je-li dán v hyperb. rovině pravoúhlý trojúhelník o prvcích a, b, c, α, β, odpovídá mu na modelu trojúhelník o stranách a/i, b/i, c/i a úhlech α, β. Podle toho můžeme do výsledků sférické geom. vložiti tyto hodnoty, zavést hyperbolické funkce a dostaneme relace platné pro hyp. rovinu. Tento postup je pro skutečné řešení trojúhelníků nejjednodušší.

Gaussovo pentagramma na imaginární kouli bude vyjádřeno relací

$$\cos c_k/i = \sin (\tfrac{1}{2}\pi - a_k/i) \sin (\tfrac{1}{2}\pi - b_k/i) = \operatorname{cotg} \alpha_k \operatorname{cotg} \beta_k. \tag{5}$$

takže $c_{k\pm 1} = \frac{1}{2}\pi i - \begin{cases} a_k \\ b_k \end{cases}$. Již sousední trojúhelník byl by imaginární. To ostatně vyplývá i takto: Prodloužíme-li na př. odvěsnu a až k pólu odvěsny b, t. j. k (imaginárnímu) průsečíku s kolmicí na

[2]) Hessenberg: Ebene u. sphärische Geometrie. Str. 115. Nebo obr. 2, str. D 16 1. seš. ročn. 66 tohoto časopisu.

odvěsnu b ve vrcholu A, má tento imaginární bod být jedním vrcholem přiřazeného trojúhelníka.

Na tuto okolnost upozornil v dříve jmenované práci Liebmann. Aby dospěl k reálnému pentagrammatu, nahrazuje kulový oktant, v němž jeví se přiřazený čtyřúhelník, jiným obrazcem, v němž povstává čtyřúhelník o 3 pravých úhlech. Dosti zdlouhavou cestou určuje prvky tohoto čtyřúhelníka, z něhož teprve stanoví přidružený trojúhelník.

K reálnému p. dojdeme však i jinak.

Vyjděme od vztahu (5) analogickému k (1)

$$\operatorname{Cos} c_k = \operatorname{Cos} a_k \operatorname{Cos} b_k = \operatorname{cotg} \alpha_k \operatorname{cotg} \beta_k \tag{6}$$

a zaveďme úhel rovnoběžnosti $\Pi(v)$ příslušný úsečce v známými vztahy

$$\operatorname{Cos} v = \frac{1}{\sin \Pi(v)} \qquad \operatorname{Sin} v = \operatorname{cotg} \Pi(v). \tag{7}$$

Rovnici (6) pak lze dáti tvar

$$\sin \Pi c_k = \sin \Pi a_k \sin \Pi b_k = \operatorname{tg} \alpha_k \operatorname{tg} \beta_k. \tag{8}$$

Položme

$$\begin{matrix} m_k \\ n_k \end{matrix} = \frac{1}{2}\pi - \Pi\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mu_k \\ \nu_k \end{matrix} = \frac{1}{2}\pi - \begin{matrix} \beta_k \\ \alpha_k \end{matrix}, \quad p_k = \frac{1}{2}\pi - \Pi(c_k) \tag{9}$$

tím dostaneme z (8)

$$\cos p_k = \cos m_k \cos n_k = \operatorname{cotg} \mu_k \operatorname{cotg} \nu_k \tag{10}$$

z čehož je zřejmo, že veličiny m, n, p, μ, ν určují sférický pravoúhlý trojúhelník. K němu sestrojíme Gaussovo pentagramma podle (2)

$$p_{k\pm1} = \frac{1}{2}\pi - \begin{matrix} m_k \\ n_k \end{matrix}, \quad p_{k\pm2} = \begin{matrix} \mu_k \\ \nu_k \end{matrix} \quad \mu_k = \nu_{k-1}, \tag{11}$$

čili podle (9)

$$c_{k\pm1} = \Delta\left[\frac{1}{2}\pi - \Pi\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}\right], \quad c_{k\pm2} = \Delta\begin{pmatrix} \beta_k \\ \alpha_k \end{pmatrix} \quad \beta_k = \alpha_{k-1}, \tag{12}$$

čímž je dáno reálné hyperbolické pentagramma a rovnice (8) pomocí (9) a (12) dává

$$\sin \Pi(c_k) = \cos \Pi(c_{k+1}) \cos \Pi(c_{K-1}) = \operatorname{tg} \Pi(c_{k+2}) \operatorname{tg} \Pi(c_{K-2}), \tag{13}$$

jakožto (pozměněné) pravidlo Neper-Engelovo[3]) s kruhovým sche-

[3]) N. J. Lobatschewskij: Zwei geometrische Abhandlungen. Přeložil z ruštiny F. Engel.

matem podle (12):

$$\Pi(c_{k\pm1}) = \frac{1}{2}\pi - \Pi\begin{pmatrix}a_k\\ b_k\end{pmatrix}. \quad \Pi(c_{k\pm2}) = \frac{\beta_k}{\alpha_k}. \tag{14}$$

Rovnici (10) odpovídá podle (11) kruhové pravidlo Neperovo

$$\cos p_k = \sin p_{k+1} \sin p_{k-1} = \operatorname{cotg} p_{k+2} \operatorname{cotg} p_{k-2} \tag{15}$$

se schematem (podle (9) a (11))

$$p_k = \frac{1}{2}\pi - \Pi(c_k), \; p_{k\pm1} = \Pi\begin{pmatrix}a_k\\ b_k\end{pmatrix}, \; p_{k\pm2} = \frac{1}{2}\pi - \frac{\beta_k}{\alpha_k}. \; \beta_k = \alpha_{k-1}. \tag{16}$$

Pravidlo (13) je homogenní v úhlech. Zaměníme-li i zde pořadí trojúhelníků tak jako ve sférické geometrii v odstavci b), dostaneme z (15) pravidlo Neper-Engelovo, tak jak se uvádí a užitím (7) a (8) dojdeme k pravidlu homogennímu v úsečkách

$$\operatorname{Cos} c_k = \operatorname{Sin} (c_{k+1}) \operatorname{Sin} c_{k-1} = \operatorname{Cotg} c_{k+2} \operatorname{Cotg} c_{k-1} \tag{17}$$

s prvky kruhového schematu

$$c_{k\pm1} = \Delta\begin{pmatrix}\alpha_k\\ \beta_k\end{pmatrix}, \quad c_{k\pm2} = \Delta\left[\frac{1}{2}\pi - \Pi\begin{pmatrix}a_k\\ b_k\end{pmatrix}\right]. \quad a_k = b_{k-1}. \tag{18}$$

Přehled. Gaussovo pentagramma dává pro hyperbolickou rovinu imaginární pentagramma. Zavedením úhlu rovnoběžnosti dospěli jsme k reálnému pentagrammatu hyperbolické roviny, které není Gaussovým. Kdybychom zavedli úhel rovnoběžnosti rovnicí $\cos v = 1/\sin \Pi(v)$ i do sférické geometrie, dostali bychom pentagramma imaginárních trojúhelníků, které by také nebylo Gaussovo. Z tohoto hlediska můžeme považovati pravidlo Neper-Engelovo za platné pro obě geometrie.

Uvažovali jsme k-tý trojúhelník jako základní. Označme nyní jeho prvky bez indexu, jakožto prvky daného trojúhelníka (nultého) a pro přehled sestavme kruhová schemata podle rovnic (2), (16), (18) a k nim příslušná pravidla (3), (15), (17) vyslovíme souborně.

Sfér. geom.		Sfér. i hyp. geom.		Hyperb. geom.	
β	α	$\frac{1}{2}\pi - \alpha$	$\frac{1}{2}\pi - \beta$	$\Delta\,[\frac{1}{2}\pi - \Pi(b)]$	$\Delta\,[\frac{1}{2}\pi - \Pi(a)]$
$\frac{1}{2}\pi - b$	$\frac{1}{2}\pi - a$	$\Pi(b)$	$\Pi(a)$	$\Delta(\beta)$	$\Delta(\alpha)$
c		$\frac{1}{2}\pi - \Pi(c)$		c	

Pro trigonometrii $\left\{\begin{matrix}\text{sférickou}\\ \text{obojí}\\ \text{hyperbolickou}\end{matrix}\right\}$ cosinus $\left\{\begin{matrix}\text{goniometrický}\\ \text{goniometrický}\\ \text{hyperbolický}\end{matrix}\right\}$ libovolného prvku příslušného schematu rovná se součinů sinů

$\begin{Bmatrix}\text{goniometrických}\\ \text{goniometrických}\\ \text{hyperbolických}\end{Bmatrix}$ prvků přilehlých nebo součinu cotangent

$\begin{Bmatrix}\text{goniometrických}\\ \text{goniometrických}\\ \text{hyperbolických}\end{Bmatrix}$ přilehlých prvků.

Poznámky. Prvky všech trojúhelníků Gaussova pentagr. jsou sestaveny na str. D 16, 1. seš. ročníku 66 (1936). Prvky hyperbolického p. na str. 167, 4. a 5. seš. roč. 62; v těchže číslech jsou p. zobrazena. Obraz p. trojúhelníků řazených podle stejných odvěsen lze snadno sestrojiti.

Zobecnění hyperbolického p. lze provést obdobně jako jsem v dříve zmíněném článku zobecnil Gaussovo p. pro kosoúhlé trojúhelníky. Dospěli bychom tak na př. ke 3 vzorcům obsahujícím všech šest prvků trojúhelníka tvaru:

$$-\operatorname{Sin} b \operatorname{Sin} c + \operatorname{Cos} b \operatorname{Cos} c \cos \alpha = \sin \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma \operatorname{Cos} a$$

nebo

$$-\cos \Pi(b) \cos \Pi(c) - \cos \beta \cos \gamma \frac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} + \cos \alpha -$$

$$- \sin \beta \sin \gamma \sin \Pi(b) \sin \Pi(c) = 0,$$

což je obecnější vzorec než starý vzorec Lobačevského o pěti prvcích

$$1 - \frac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} - \cos \alpha \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) = 0.$$

Pro zajímavost uveďme číselný příklad, z něhož bude patrno, jak liší se hyperbolická rovina od euklidovské. Volme známý trojúhelník $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, jehož úhly (přibližně) jsou $\alpha = 36° 50'$, $\beta = 33° 10'$. Počítejme prvky hyperbolického pentagrammatu odvozeného z trojúhelníka $a = 3$, $b = 4$ délkových jednotek a nechť poloměr křivosti je $Ri = 100i$ jednotek délkových. Výsledky shrnuty jsou v tabulce a mimo to je:

$\Pi(a) = 72° 30'$ $\Pi(b) = 68° 0'$ $\Pi(c) = 61° 50'$ $\Delta(\alpha) = 11{,}5$ $\Delta(\beta) = 7{,}3$ d. j.

	a	b	c	α	β
0	3,0	4,0	5,1	35° 20′	51° 20′
1	4,0	10,4	11,5	18° 0′	61° 50′
2	10,4	13,5	18,4	22° 0′	35° 20′
3	13,5	6,7	14,7	51° 20′	18° 0′
4	6,7	3,0	7,3	61° 50′	22° 0′